IM317 - Metodologia para Planejamento Experimental
e Análise de Resultados

Primeira prova - 09/11/2000 - GABARITO A
(Respostas em itálico)

1) Analise o jogo dos palitos realizado em sala de aula considerando aspectos estatísticos como médias, variabilidade, dispersão (1,0).

Esse jogo mostra que a variabilidade de cada posto de trabalho afeta sobremaneira o desempenho dos postos subseqüentes, pois a produção de cada posto depende de sua própria capacidade, bem como da capacidade dos postos anteriores. As médias de cada posto aproximam-se de três e meio quanto maior o número de jogadas por posto. Como observamos em aula, a média geral após cinco jogadas com cinco postos , estava bem próxima de 3,5. A grande dispersão da produção final após cada jogada deve-se à interação das dispersões individuais de cada posto que são sobrepostas e diminuem consideravelmente a produção média esperada.

2) Uma fábrica produz eixos que apresentam diâmetro médio estimado igual a 10,09 mm e um desvio-padrão estimado igual a 0,03 mm.

Dados do problema: m *= 10,09 mm e* s *= 0,03 mm, ou seja, a princípio conhece-se a média e o desvio-padrão da população.*

a) qual é a probabilidade de que ao medir uma amostra com 10 réplicas encontre-se um valor médio amostrado maior que 10,07 e menor que 10,12 mm? (1,0)

$P(10{,}07 \le \bar{y} \le 10{,}12) = ?$ *para n =10. Como conhece-se* m *e* s *, pode-se empregar a distribuição normal padrão para determinar-se a probabilidade, calculando-se:*

$$z_1 = \frac{\bar{y}_1 - m}{s/\sqrt{n}} = \frac{10{,}07 - 10{,}09}{0{,}03/\sqrt{10}} = -2{,}11 \qquad e$$

$$z_2 = \frac{\bar{y}_2 - m}{s/\sqrt{n}} = \frac{10{,}12 - 10{,}09}{0{,}03/\sqrt{10}} = 3{,}162$$

Da tabela da distribuição normal padrão, tem-se que a área à esquerda de Z = 2,11 é igual a 0,98214. Ou seja, a área à direita de Z = 2,11 é igual a 1-0,98214 = 0,01786 que é a área à direita de Z = -2,11. Pela tabela, a área à esquerda de 3,162 é igual a 0,99921. Assim,

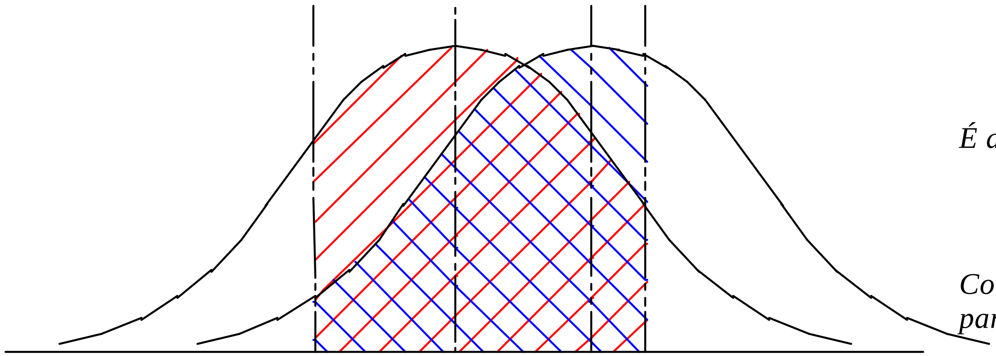
$$P(10{,}07 \le \bar{y} \le 10{,}12) = P(-2{,}11 \le Z \le 3{,}162) = P(Z \le 3{,}162) - P(Z \le -2{,}11)$$

$$= 0{,}99921 - 0{,}01786 = 0{,}9813$$

Resposta: A probabilidade de que o valor médio amostrado seja maior que 10,07 e menor que 10,12 mm é de 98,13%.

b) se na realidade o valor médio verdadeiro dos eixos é de 10,11 mm, qual é a probabilidade de cometer-se um erro do tipo II se adotamos amostras com valores médios na faixa apresentada no item (a)? (1,0)

Como se observa na figura a seguir, a área vermelha refere-se à probabilidade de aceitar-se que a média realmente é igual a 10,09 mm (entre os limites 10,07 e 10,12 mm). Esses limites definem a área azul sob a curva normal com a média real 10,11 mm que é a probabilidade b de aceitar-se que a média da população é igual a 10,09 quando na verdade ela é igual a 10,11 mm.



Para determinar-se qual a área azul sob a curva com m = 10,11 mm determina-se:

$$z_1 = \frac{\bar{y}_1 - m}{s/\sqrt{n}} = \frac{10{,}07 - 10{,}11}{0{,}03/\sqrt{10}} = -4{,}21 \qquad e$$

$$z_2 = \frac{\bar{y}_2 - m}{s/\sqrt{n}} = \frac{10{,}12 - 10{,}11}{0{,}03/\sqrt{10}} = 1{,}05$$

Da tabela da distribuição normal padrão, tem-se que a área à esquerda de Z = 4,21 é igual a 1,0. Ou seja, a área à direita de Z = 4,21 é igual a 1-1 = 0 que é a área à direita de Z = -4,21. Pela tabela, a área à esquerda de 1,05 é igual a 0,85314. Assim,

$$P(10{,}07 \le \bar{y} \le 10{,}12) = P(-4{,}21 \le Z \le 1{,}05) = P(Z \le 1{,}05) - P(Z \le -4{,}21)$$

$$= 0{,}85314 - 0 = 0{,}85314$$

Resposta: A probabilidade de cometer-se um erro do tipo II nesse caso é b = 85,31%.

c) Qual deve ser o tamanho ideal de amostra para que se encontre um valor médio amostrado maior que 10,06 e menor que 10,12 mm, com uma probabilidade de 90%? (1,0)

É definida a faixa de tolerância:

$$2d = 10{,}12 - 10{,}06 = 0{,}06 \qquad \text{ou seja, } d = 0{,}03$$

Como conhece-se m e s , pode-se empregar a distribuição normal padrão para determinar-se o tamanho ideal da amostra, calculando-se:

$$n_{ideal} = \left(\frac{Z_{a/2} . s}{d} \right)^2$$

Como foi definido uma probabilidade de 90%, tem-se que a = 10% = 0,1 e a/2 = 0,05. Na tabela da distribuição normal padrão procura-se o Z que tenha à esquerda uma área igual a 95%, o que fornece $Z_{0,05}$ = 1,65. Assim,

$$n_{ideal} = \left(\frac{1{,}65.0{,}03}{0{,}03} \right)^2 = 2{,}72 \approx 3$$

Resposta: O tamanho ideal de amostra é de 3 réplicas.

3) Uma nova marca de margarina diet foi avaliada para verificar-se se apresentava níveis de ácidos graxos poliinsaturados menores que 17 mg/kg. Uma amostra com 6 potes foi avaliada obtendo-se os seguintes resultados para a gordura, medidos em mg/kg:

16,9 17,1 16,9 16,5 17,4 17,3

a) adotando-se α = 0,10 pode-se afirmar que essa margarina atende a especificação exigida? (1,0)

Deseja-se verificar se a margarina atende a especificação, ou seja, se a média dos níveis de ácidos é menor que 17 mg/kg. Assim, o teste de hipóteses fica:

$H0$: $\mu = 17$
$H1$: $\mu < 17$

Como não se conhece o desvio-padrão da população, emprega-se o teste estatístico com a distribuição t de Student:

$$t_0 = \frac{\bar{y} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

com $n = 6$, $\bar{y} = 17{,}02$ *e* $S = 0{,}32$ $t_0 = \dfrac{17{,}02 - 17}{0{,}32/\sqrt{6}} = 0{,}153$

H0 será rejeitada se $t_0 < -t_{\alpha,n}$ *(por se tratar de análise monocaudal). Como* $-t_{\alpha,n}$ *será sempre um número negativo, não se rejeitará H0 qualquer que seja o valor de* α *adotado. Assim, conclui-se que H0 é estatisticamente verdadeira nessa análise e que o valor médio do teor de ácidos graxos não é menor que 17 mg/kg.*

b) em que faixa de níveis de ácidos graxos encontraremos 95% dos valores médios das amostras ensaiadas? (1,0)

Trata-se de calcular o intervalo de valores médios com 95% de confiança. Como é uma análise bicaudal tem-se que $\alpha/2 = 0{,}025$*. Utiliza-se a expressão:*

$$\bar{y} - t_{\alpha/2,n-1}\, S/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{y} + t_{\alpha/2,n-1}\, S/\sqrt{n}$$

Da tabela tem-se $t_{\alpha/2,n-1} = t_{0{,}025,5} = 2{,}571$*, obtendo-se:*

$$17{,}02 - 2{,}571.0{,}32/\sqrt{6} \le \mu \le 17{,}02 + 2{,}571.0{,}32/\sqrt{6}$$

Resposta: A faixa de valores em que encontram-se 95% das médias é: $16{,}68 \le \mu \le 17{,}35$

4) Duas marcas de veículos foram analisadas para verificar-se qual apresentava o menor consumo de combustível. Para cada marca foram escolhidos aleatoriamente 10 veículos que tiveram seus consumos medidos obtendo-se os seguintes resultados em distância percorrida por litro de combustível (km/l):

Marca A		Marca B	
9,88	9,96	16,68	17,12
9,92	9,84	16,92	16,96
9,94	9,56	16,68	15,96
9,82	9,96	15,8	16,36
9,80	9,92	16,76	11,84

a) verifique se há resultados a serem descartados em alguma das amostras. (1,0)

Cálculo das médias e desvios-padrão das duas amostras:

Marca A: $\bar{y}_1 = 9{,}86$ *e* $S_1 = 0{,}12$ *Marca B:* $\bar{y}_2 = 16{,}11$ *e* $S_2 = 1{,}56$ *com* $n = 10$.
Pela tabela da página 20 da apostila, DR0 = 1,96 para n = 10.
Para que ocorra descarte $|DR| > DR0$*. Assim, para resultados abaixo da média:* $DR < -DR0$ *serão descartados e para resultados acima da média serão descartados os que apresentarem* $|DR| > DR0$*.*
Os valores limites para a marca A são dados por:

$$y\min = \bar{y} - DR0 \cdot S = 9{,}86 - 1{,}96 \cdot 0{,}12 = 9{,}62$$
e
$$y\max = \bar{y} + DR0 \cdot S = 9{,}86 + 1{,}96 \cdot 0{,}12 = 10{,}09$$

Como se observa, somente o resultado 9,56 será descartado e recalculando a média e o desvio tem-se: $\bar{y}_1 = 9{,}915$ *e* $S_1 = 0{,}050$ *e* $n_1 = 9$.

Para a marca B, tem-se:
$$y\min = \bar{y} - DR0 \cdot S = 16{,}11 - 1{,}96 \cdot 1{,}56 = 13{,}05$$
e
$$y\max = \bar{y} + DR0 \cdot S = 16{,}11 + 1{,}96 \cdot 1{,}56 = 19{,}17$$

Como se observa, somente o resultado será descartado e recalculando a média e o desvio tem-se:

$\bar{y}_2 = 16{,}58$ *e* $S_2 = 0{,}45$ *e* $n_2 = 9$.

b) usando α = 0,01 pode-se afirmar que os veículos marca B percorrem em média 6 km/l a mais que os veículos da marca A? (1,0)

Deseja-se verificar se a média de consumo dos veículos da marca B é igual ao consumo dos veículos da marca A mais 6 km/l. Assim, o teste de hipóteses fica:

$$H0:\ m_1 = m_2 - 6$$
$$H1:\ m_1 \neq m_2 - 6$$

Como não se conhecem os desvios-padrão das duas populações, deve-se empregar o teste estatístico com a distribuição t de Student. Para facilidade de cálculo pode-se considerar que as variâncias das duas populações são iguais, apesar de desconhecidas. Assim, o teste fica:

$$t_0 = \frac{\bar{y}_1 - (\bar{y}_2 - 6)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

com $$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

$n_1 = 9$ *e* $n_2 = 9$

$$S_p^2 = \frac{(9-1).0{,}05^2 + (9-1).0{,}45^2}{9+9-2} = 0{,}10 \qquad S_p = 0{,}32$$

$$t_0 = \frac{9{,}915 - (16{,}58 - 6)}{0{,}32\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}}} \qquad t_0 = -4{,}408$$

Como se trata de uma análise bi-caudal, a hipótese nula H0 será rejeitada se $|t_0| > t_{a/2,n}$

Com a = 0,01, tem-se a/2 = 0,005. O valor do número de graus de liberdade n é dado por:

$$n = n_1 + n_2 - 2 = 16$$

Assim, tem-se $t_{a/2,n} = t_{0,005,16} = 2{,}921$. *Como* $|t_0| > t_{a/2,n}$ *, rejeita-se H0 e pode-se concluir que o consumo médio da marca B é diferente do consumo da marca A mais 6 km/l.*

c) com 90% de confiança em que faixa encontraremos a diferença das médias das populações representadas pelo consumo dos veículos dessas duas marcas? (1,0).

Trata-se de definir o intervalo com 90% de confiança para a diferença $m_1 - m_2$ *Pode-se empregar a expressão abaixo, usando a = 0,10 e a/2 = 0,05, com* $t_{a/2,n} = t_{0,05,17} = 1{,}74$

$$\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - t_{a/2,n_1+n_2-2} S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq m_1 - m_2 \leq \bar{y}_1 - \bar{y}_2 + t_{a/2,n_1+n_2-2} S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$9{,}915 - 16{,}58 - 1{,}74.0{,}32\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}} \leq m_1 - m_2 \leq 9{,}915 - 16{,}58 + 1{,}74.0{,}32\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}}$$

obtendo-se $$-6.927 \leq m_1 - m_2 \leq -6{,}402$$