IM317 – Gabarito da 1ª. prova – 2º. semestre de 2001

1) Estudou-se o tempo de secagem de duas tintas: uma já em uso e outra em desenvolvimento. Dez corpos-de-prova foram pintados com a primeira tinta e outros oito corpos de prova foram pintados com a segunda tinta, obtendo-se respectivamente médias de tempo de secagem iguais a 121 min e 112 min, e desvios-padrões de 8 e 9 min respectivamente. Com α = 0,05 pergunta-se:

a) qual o número ideal de réplicas que deve ser empregado para esses ensaios?

Adotando-se que 95% das amostras devam ser encontradas numa faixa de tolerância de ± 10 min, ou seja, $\alpha/2$ = 2,5% e d = 10.
Como o número de réplicas usado para a primeira tinta foi igual a 10, tem-se n = 10.
Assim, $t_{\alpha/2,n-1} = t_{0.025,9} = 2{,}262$
A expressão para o valor ideal de réplicas para a primeira tinta é igual a:

$$n_{ideal} = \left(t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{d} \right)^2 = \left(2{,}262 . \frac{8}{10} \right)^2 = 3{,}275 \cong 4$$

Para a segunda tinta foram empregadas 8 réplicas, com n =8.
Assim, $t_{\alpha/2,n-1} = t_{0.025,7} = 2{,}365$.
A expressão para o valor ideal de réplicas para a segunda tinta é:

$$n_{ideal} = \left(t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{d} \right)^2 = \left(2{,}365 . \frac{9}{10} \right)^2 = 4{,}53 \cong 5$$

b) qual tinta deve ser empregada se pretende-se reduzir o tempo de secagem?

Trata-se de um planejamento totalmente aleatorizado, em que se está comparando as médias de duas populações. A variável de influência não é explicitada e a variável de resposta é o tempo de secagem das tintas.
Para responder qual tinta deve ser empregada deve-se testar qual delas fornece o menor tempo de secagem. Pelos valores de tempos médios, intui-se que a segunda tinta deva ter o menor tempo. Assim, testa-se:

$$H0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H1: \mu_1 > \mu_2$$

Como não se conhecem as variâncias das populações deve-se testar se elas são iguais ou não:

$$H0: \sigma^2_1 = \sigma^2_2$$
$$H1: \sigma^2_1 \neq \sigma^2_2$$

O teste estatístico é dado por $F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$, o que resulta em

$$F_0 = \frac{8^2}{9^2} = 0{,}79$$

A rejeição de H0 ocorre quando

$$F_0 > F_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1} \quad \text{ou se} \quad F_0 < F_{1-(\alpha/2), n_1-1, n_2-1}$$

Nesse caso, com α = 0,05, n_1 = 10 e n_2 =8:

$F_{0.025,9,7} = 4{,}82$ e $F_{(1-0.025),9,7} = 1/F_{0.025,9,7} = 0{,}208$.
Como F_0 =0,79, observa-se que H0 não é rejeitada, ou seja, as variâncias das duas populações são iguais.

Assim, o teste estatístico para comparação das médias é

$$t_0 = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \qquad \text{com} \qquad n = n_1 + n_2 - 2 \quad \text{e}$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

obtendo-se: $S_p = 8{,}45$ $\quad n = 16$ $\quad t_0 = 2{,}245$

A rejeição de H0 ocorre quando $t_0 > t_{\alpha,n}$

Nesse caso, como $t_{\alpha,n} = t_{0.05,16} = 1{,}746$ *tem-se que* $t_0 >$ $t_{\alpha,n}$. *Assim, rejeita-se H0 e conclui-se que a média estimada para a primeira tinta é estatisticamente maior que a média estimada para a segunda tinta.*

Ou seja, para minimizar o tempo de secagem deve-se empregar a segunda tinta.

2) A propaganda de uma dieta líquida afirma que seu uso resulta na perda média de 1,5 kg de peso por mês de dieta. Seis indivíduos fizeram essa dieta por um mês e os resultados são mostrados a seguir. Pode-se afirmar que a propaganda é correta? Use $\alpha = 0{,}10$.

Peso (kg)	Indivíduo					
j	1	2	3	4	5	6
Inicial	81,5	100,5	97,5	77,5	71,5	75
Final	80,5	97,5	96	75	70,5	73
d_j	1,0	3,0	1,5	2,5	1,0	2,0

Trata-se de um planejamento aleatorizado por blocos, em que deve ser empregada a análise por pares. A tabela já apresenta os valores j e d_j.

O teste de hipóteses é dado por

$H_0: \mu_d = 1{,}5$ *ou* $H_0: \mu_d - 1{,}5 = 0$

$H_1: \mu_d \neq 1{,}5$ *ou* $H_1: \mu_d - 1{,}5 \neq 0$

O teste estatístico é feito com

$$t_0 = \frac{\bar{d} - 1{,}5}{S_d/\sqrt{n}} \qquad \text{onde} \quad \bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} d_j \quad \text{é a média das diferenças da amostra e}$$

$$S_d = \left[\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(d_j - \bar{d}\right)^2}{n-1}\right]^{1/2} = \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} d_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} d_j\right)^2}{n-1}\right]^{1/2} \quad \text{é o desvio padrão d}$$

calculando-se, tem-se $\bar{d} = 1{,}833$ $\quad S_d = 0{,}816$ *e* $\quad t_0 = 1{,}0$.

A hipótese nula é rejeitada caso verifique-se que $|t_0| > t_{\alpha/2,n-1}$.

Nesse caso, com $\alpha = 0{,}10$, *tem-se:*

$t_{\alpha/2,n-1} = t_{0.05,5} = 2{,}015$. *Conclui-se que a hipótese nula não deve ser rejeitada pois* $t_0 < t_{\alpha/2,n-1}$

Assim, conclui-se que a propaganda está correta, ou seja, a dieta realmente resulta numa perda média de 1,5 kg por mês, mas não maior que isso..

3) A tensão limite de resistência de uma cerâmica apresenta média estimada de 250 MPa e desvio-padrão igual a 5 MPa.

a) Qual e a probabilidade de que uma amostra com cinco corpos-de-prova apresente médias de tensão entre 249 e 251 MPa?

Estima-se que para essa população a média seja de 250 MPa e que o desvio-padrão seja de 5 MPa. Assim, utiliza-se a distribuição normal para avaliação de amostras, no caso n = 5,
$\bar{y}_1 = 249$,
$\bar{y}_2 = 251$ *e* $s = 5$:

$$z_1 = \frac{\bar{y}_1 - m}{s/\sqrt{n}} = \frac{249-250}{5/\sqrt{5}} = -0{,}447$$

$$z_2 = \frac{\bar{y}_2 - m}{s/\sqrt{n}} = \frac{251-250}{5/\sqrt{5}} = 0{,}447$$

Assim, a probabilidade de que uma amostra com 5 réplicas apresente média entre 249 e 251 é dada por P(249 £ $\bar{y}$ £251) que é igual à probabilidade P(-0,447 £ z £ 0,447).
Pela tabela da distribuição normal P(z £ 0,447) = 0,673.
Já a probabilidade P(z £ -0,447) é igual a P(z ³ 0,447) =
1 – 0,673 =0,327.

Assim, P(-0,447 £ z £ 0,447) = 0,673 – 0,327 = 0,346.

A probabilidade de que uma amostra com 5 réplicas apresente média entre 249 e 251 MPa é de 34,6%.

b) Qual a probabilidade do erro de aceitar-se que a média da tensão é de 250 MPa quando na verdade ela é igual a 252 MPa?

Trata-se de determinar o erro b, ou seja, o erro de aceitar-se a hipótese nula, quando na realidade ela é falsa.
O erro b é igual à área sob a curva de média estimada em 252 MPa entre os limites 249 e 251 MPa. Assim, deve-se recalcular os valores de z_1 *e* z_2*, considerando* m *= 252:*

$$z_1 = \frac{\bar{y}_1 - m}{s/\sqrt{n}} = \frac{249-252}{5/\sqrt{5}} = -1{,}342$$

$$z_2 = \frac{\bar{y}_2 - m}{s/\sqrt{n}} = \frac{251-252}{5/\sqrt{5}} = -0{,}447$$

Assim, a probabilidade do erro b para uma amostra com 5 réplicas que apresente média entre 249 e 251 é dada por P(249 £ $\bar{y}$ £251) que é igual à probabilidade P(-1,342 £ z £ -0,447), considerando que a média verdadeira é m = 252 e não 250.
Pela tabela da distribuição normal P(z £ 0,447) = 0,673. Assim, a probabilidade P(z £ -0,447) é igual a P(z ³ 0,447) = 1 – 0,673 =0,327.
Já a probabilidade P(z £ -1,342) = P(z ³ 1,342) =
1 – 0,91 = 0,09
Assim, P(-1,342£ z £ -0,447) = 0,327 – 0,09 = 0,237.

A probabilidade de se aceitar que a média é 250 MPa quando na verdade ela é igual a 252 MPa, é de 23,7%, se considerarmos uma amostra com média entre 249 e 251 MPa.

4) O tempo de cura (em minutos) de uma resina foi medida para três métodos de preparação dessa resina, obtendo-se os resultados apresentados na tabela a seguir. Adotando α = 0,05, pergunta-se:

a) o método de preparação afeta o tempo de cura?

Trata-se de um planejamento aleatorizado por níveis (PAN) que não apresenta todos os níveis completos. A variável de influência é o método de preparação da resina e a variável de resposta é o tempo de cura da resina. Foram estudados três métodos de preparação (níveis).

Método de Preparação	Tempo de cura (minutos)				$y_{i.}$
1	14,8	14,1	12,7	13,5	*55,1*
2	14,6	14,2	12,8	13,9	*55,5*
3	12,7	12,4	13,2	-	*38,3*

$y_{...} = 148,9$

Como o planejamento não tem todos os níveis completos ($n_1 = 4$, $n_2 = 4$ e $n_3 = 3$) tem-se:

$$a = 3 \qquad N = \sum_{i=1}^{a} n_i = 11$$

$$SS_T = \left(\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 \right) - \frac{y_{..}^2}{N} = 6,96$$

e

$$SS_{TRAT} = \left(\sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i.}^2}{n_i} \right) - \frac{y_{..}^2}{N} = 2,46$$

$$SS_E = SS_T - Ss_{trat} = 4,5$$

$$F_0 = \frac{SS_{TRATAMENTOS} / (a-1)}{SS_E / (N-a)} = \frac{2,46/2}{4,5/8} = 2,19$$

Com $a = 0,05$, tem-se $F_{0.05,2,8} = 4,46$.
Como 0,0013 < 4,46, não se rejeita a hipótese nula de que as médias dos tratamentos são iguais.

Assim, conclui-se que o método de preparação não afeta o tempo de secagem e deste modo, não há necessidade de responder-se a questão b.