Lista de Exercícios N.8 –
Modelos Algébricos: Escoamento com Ausência de Parede

1) Medidas experimentais na esteira de um corpo simétrico, realizadas por Townsend, apresentam as seguintes variações na seção transversal do escoamento (unidades são arbitrárias):

Y	U0-U	τ/ρ	$\overline{u'^2}$	$\overline{v'^2}$	$\overline{w'^2}$
0	2.28	0	1.5	1.99	1.40
0.1	1.97	0.479	1.8	1.83	1.50
0.2	1.27	0.675	1.92	1.42	1.52
0.3	0.48	0.485	1.25	0.84	0.80
0.4	0.08	0.130	0.32	0.31	0.22
0.5	---	0.017	0.05	0.08	0.04

Determine o perfil de energia cinética, a viscosidade turbulenta e o comprimento de mistura. Estes dados dão suporte experimental para se afirmar que a viscosidade turbulenta é constante para escoamentos em esteiras?

Este exercício propõe que você encontre a solução do campo médio de velocidades produzido pela descarga de um jato axi-simétrico livre e turbulento em um ambiente com fluido estacionário. Neste caso procure a solução por transformação similar e utilize o modelo de viscosidade turbulenta de Prandtl-Reichardt. Para se atingir este objetivo diversos passos intermediários serão solicitados:

a) A partir da informação na Tabela 1 (pg.7) sobre a velocidade na linha de centro do jato e da espessura da camada limite mostre que a viscosidade turbulenta do modelo é uma constante! *Comentário: o fato dela se apresentar como constante simplifica bastante a análise pois o problema se torna idêntico ao caso laminar, resta porém determinar o valor de ν_T.*
b) As equações da massa e momento na direção (x), escritas em coordenadas cilindricas são dadas abaixo.

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x}+\frac{\partial(rv)}{\partial r}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\tau_{rz}\right)$$

onde $\tau_{rz}/\rho = \nu_T dU/dr$ e $\nu_T = \chi\delta U_C$

indique as condições de contorno que as equações acima devem atender. *Comentários: distintamente do caso cartesiano, com o aumento de r a área transversal ao fluxo também aumenta. Esta divergência de área introduz novos termos às equações de massa e momento quando comparadas ao caso cartesiano.*

c) Busque uma solução por transformação similar considerando que a variável de similaridade é definida por:

$$\eta(x,r) = \frac{r}{\delta(x)}$$

e que a velocidade, expressa em termos da variável de similaridade é dada por:

$$\frac{(r \cdot u)}{J} = F'(\eta)$$

onde J é uma constante a ser determinada .

Lembrando que a largura do jato varia linearmente com a distância da origem, isto é,

$$\delta(x) = \alpha x$$

mostre que os termos transformados da equação do momento na direção x são expressos por:

$$(ru)\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\alpha \cdot J^2}{\delta^2} \cdot F' \cdot F''$$

$$(rv)\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\alpha \cdot J^2}{\delta^2} \cdot \left[F'F'' - \frac{F'^2}{\eta} - \frac{FF''}{\eta} + \frac{FF'}{\eta^2} \right]$$

$$\nu_T \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\nu_T \cdot J}{\delta^2} \cdot \frac{d}{d\eta}\left[F'' - \frac{F'}{\eta} \right]$$

Mostre também que agrupando e simplificando os termos de conveção e difusão na equação de momento, chega-se a forma final mostrada abaixo:

$$-\frac{d}{d\eta}\left[\frac{FF'}{\eta} \right] = \left(\frac{\nu_T}{J\alpha} \right) \cdot \frac{d}{d\eta}\left[F'' - \frac{F'}{\eta} \right]$$

d) Sem perda de generalidade pode-se arbitrar valor unitário a constante:

$$\left(\frac{\nu_T}{J\alpha} \right) = 1 .$$

Comentário: de fato é irrelevante neste ponto a necessidade de se ajustar um valor a constante, pois ela será posteriormente ajustada contra dados experimentais.

Tomando a linha de centro do jato, η = 0, a equação transformada deve atender as condições: F(0) = F'(0) =0 , por que? Dica: veja a definição (ur)/J = F'(η). Considerando estas condições de contorno, integre duas vezes a equação do momento para encontrar:

$$2\eta\frac{dF}{d\eta} - 4F + F^2 = 0$$

A solução desta equação (Schlichting) e outras derivadas e integrais associadas a ela são definidas a seguir:

$$F = \frac{\eta^2}{\left(1 + \frac{1}{4}\eta^2\right)} \qquad \frac{dF}{d\eta} = \frac{2\eta}{\left(1 + \frac{1}{4}\eta^2\right)^2} \qquad \int_0^\infty \frac{(F')^2}{\eta} d\eta = \frac{8}{3}$$

e) Considerando que o momento do jato se conserva,

$$M = 2\pi\rho\int_0^\infty u^2 r dr$$

mostre que o valor da constante J é dado por:

$$J = \sqrt{\frac{3M}{16\pi\rho}}$$

f) A partir da igualdade do item (d) e lembrando que $\alpha = \delta(x)/x$, mostre que a largura do jato, em função da viscosidade turbulenta é dada por:

$$\delta(x) = \nu_T x \cdot \sqrt{\frac{16\pi\rho}{3M}}$$

em função desta definição mostre também que a variável de similaridade é expressa por:

$$\eta = \sqrt{\frac{3M}{16\pi\rho\nu_T^2}} \cdot \left(\frac{r}{x}\right)$$

g) Com a definição $(ur)/J = F'(\eta)$, mostre que a velocidade u, após substituições das definições de $\delta(x)$ e J é dada por:

$$u = \frac{3M}{8\pi\rho\nu_T} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4}\eta^2\right)^2}$$

Para determinar o valor da viscosidade turbulenta será necessário recorrer a dados experimentais. As medidas realizadas por Reichardt (veja Schlichting) para uma variedade de regimes turbulentos com jatos axisimétricos mostram que a largura do jato onde a velocidade é metade do seu valor máximo é: $\delta_{1/2} = 0.0848x$. De posse deste resultado pode-se determinar o valor da viscosidade turbulenta. Porém é necessário que :

h) identifique, a partir do perfil de velocidade u, que a velocidade da linha de centro do jato é dada por:

$$U_C = \frac{3M}{8\pi\rho\nu_T} \cdot \frac{1}{x} \cdot$$

e mostre que o valor $\eta = 1.286$ resulta na posição radial onde $u/U_C = ½$.

i) Usando o fato que $\eta = 1.286$ resulta em $u/U_C = ½$ e a definição de $\delta(x)$ dada no item (f), então mostre que:

$$\delta_{\frac{1}{2}} = 5.27x\frac{\nu_T}{\sqrt{M/\rho}}$$

j) Finalmente, utilizando o dado experimental de Reichardt: $\delta_{1/2} = 0.0848x$ e a relação do item (i) mostre que a viscosidade turbulenta do jato é dada por:

$$\frac{\nu_T}{\sqrt{M/\rho}} = 0.0161$$

Comentário: a viscosidade turbulenta depende da razão entre o fluxo de quantidade de movimento e a densidade do fluido. Observando-se que M é multiplicado pela *densidade, a razão M/ρ independe da densidade! Isto significa que um orifício que descarrega fluido a uma determinada velocidade (não importa se é líquido ou gás), a viscosidade turbulenta para ambos os casos será a mesma desde que* $2\pi\int u^2 r dr$ *for a mesma.*