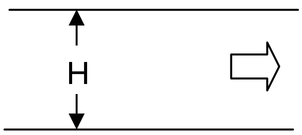
Lista de Exercícios N.7 – Modelos Algébricos

1) Encontre uma solução para o escoamento em um canal 2D utilizando o modelo de comprimento de mistura com as camadas interna e externa modeladas por:

$$\ell_{mix} = \kappa y\left(1 - e^{-y^+/26}\right) \quad \text{camada interna}$$

$$\ell_{mix} = 0.09\,H/2 \qquad \text{camada externa}$$



onde H é a altura do canal.

Dica:

a) Mostre que para o escoamento hidrodinamicamente desenvolvido no canal a equação de momento se reduz para:

$$\left(1+\mu_T^+\right)\frac{dU^+}{dy^+} = \left(1 - \frac{2y^+}{H^+}\right)$$

onde

$$\mu_T^+ = \frac{\mu_T}{\mu}; \quad U^+ = \frac{U}{u_\tau}; \quad H^+ = \frac{Hu_\tau}{\nu}$$

b) Utilizando a adimensionalização baseada nas variáveis internas (+), também mostre que a viscosidade turbulenta e o comprimento de mistura passam a ser:

$$\mu_T^+ = \left(\ell_{mix}^+\right)^2 \frac{dU^+}{dy^+}$$

$$\ell_{mix}^+ = \kappa y^+\left(1 - e^{-y^+/26}\right) \quad \text{camada interna}$$

$$\ell_{mix}^+ = 0.09\,H^+/2 \qquad \text{camada externa}$$

c) Mostre que substituindo a definição do comprimento de mistura na equação do momento chega-se a:

$$\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{\sqrt{1 + 4\left(1 - 2\,y^+/H^+\right)\left(\ell_{mix}^+\right)^2} - 1}{2\left(\ell_{mix}^+\right)^2}$$

d) Encontre que a velocidade média, o número de Reynolds e o coeficiente de atrito são dados, em termos das variáveis internas, por:

$$U_{avg}^+ = \frac{2}{H^+}\int_0^{H^+/2} U^+\left(y^+\right)dy^+$$

$$Re_H = \frac{HU_{avg}}{\nu} = H^+U_{avg}^+$$

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_{avg}^2} = \frac{2}{\left(U_{avg}^+\right)^2}$$

e) Escreva uma rotina de integração (Mathematica, Runge-Kutta, etc) e encontre as soluções indicadas na tabela abaixo:

Escoamento Canal Plano 2D		
H^+	Re_H	C_f
100	1004	$1.98\ 10^{-2}$
300	4331	$9.59\ 10^{-3}$
1000	18094	$6.10\ 10^{-3}$
2000	39829	$5.04\ 10^{-3}$
10000	239398	$3.48\ 10^{-3}$

Compare seus resultados com a correlação experimental de Halleen and Johnston, note que o coeficiente de atrito segue a definição de Fanno:

$$Cf = 0.0706 * Re_H^{-1/4} \quad 10^3 < Re_H < 10^5$$

f) Compare o perfil médio de velocidades calculado com o perfil determinado por Mansour et al. por meio de DNS para ReH = 13500:

Y/(H/2)	U/Um	Y/(H/2)	U/Um
0	0.000	0.602	0.945
0.103	0.717	0.710	0.968
0.207	0.800	0.805	0.984
0.305	0.849	0.902	0.995
0.404	0.887	1.000	1.000
0.500	0.917		

Onde Um é a velocidade máxima e

g) Calcule, para as condições mostradas no item (e), a fração de H que representa a distância da parede para o início e fim da camada log. Considere que a camada log situa-se entre $30 < y^+ < 200$.

h) Faça um gráfico de μ^+ em função de y+ para H^+ igual 1000 e 10000.

2) Considere o escoamento turbulento de um fluido incompressível em um duto de seção circular. Escreva a equação de transporte de Reynolds para as três componentes na forma conservativa. Dica: veja Transport Phenomena, Bird Stewart and Lightfoot e também artigo Laufer: The structure of turbulence in fully developed flow; NACA report 1174, (1954).