

**ESCOAMENTOS
COM AUSÊNCIA
DE PAREDE
& SOLUÇÕES SIMILARES**

ÍNDICE

1.0 ESCALAS CARACTERÍSTICAS	4
1.1 Jatos Bidimensionais	4
1.2 Esteiras Simétricas Produzidas por Corpos 2D	5
1.3 Camadas de Misturas 2D	6
Quadro Resumo	7
2.0 MODELO DE COMPRIMENTO DE MISTURA & VISCOSIDADE TURBULENTA	8
2.1 Comprimento de mistura.....	8
2.2 Viscosidade Turbulenta (Prandtl-Reichardt).....	8
3.0 SOLUÇÃO POR SIMILARIDADE DO MODELO DE COMPRIMENTO DE MISTURA.....	11
3.1 Equação de Quantidade de Movimento e Hipótese de Similaridade.....	11
3.2 Jato Livre 2D.....	14
3.3 Esteira 2D de Corpos Simétricos	16
3.4 Camadas de Mistura	20
4.0 SOLUÇÃO POR SIMILARIDADE DO MODELO PRANDTL-REICHARDT.....	22
4.1 Jato Livre 2D.....	23
4.2 Esteira de Corpos 2D Sem Sustentação	24
4.3 Camadas de Mistura	25
5.0 ESTIMATIVAS DAS GRANDEZAS TURBULENTAS.....	26

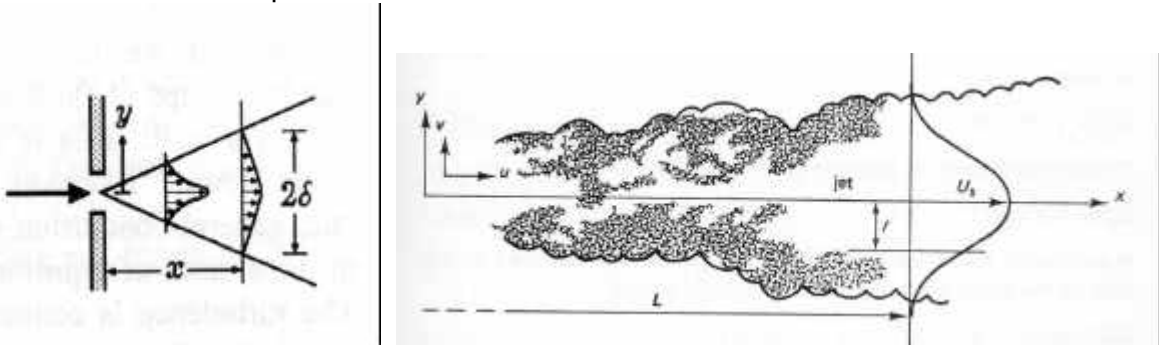
Escoamentos com Ausência de Parede (Free Shear Flows)

A ausência de parede nos escoamentos produz características particulares no campo das tensões das deformações de origem turbulenta que permite que eles sejam abordados numa classe em separado dos escoamentos com presença de parede. Devido a este fato eles também são conhecidos como escoamentos livres.

De fato, a ausência da parede como geradora de tensão simplifica o problema. Serão abordados três tipos básicos de escoamentos livres:

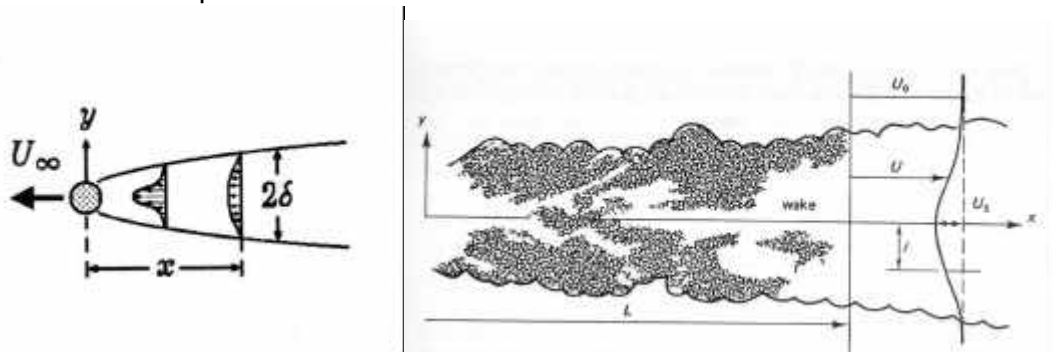
JATO 2D

Taxa de Abertura Experimental: $\delta/x \cong 0.100$ a 0.110



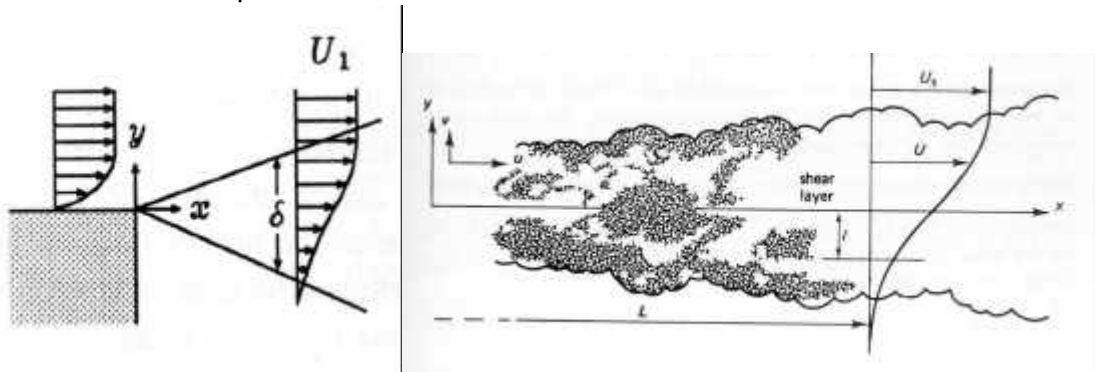
ESTEIRA 2D

Taxa de Abertura Experimental: $\delta^2/x \cong 0.365$



CORRENTES PARALELAS

Taxa de Abertura Experimental: $\delta/x \cong 0.115$



Estes três tipos de escoamentos apresentam solução por similaridade para regiões suficientemente afastadas da origem. Nestas condições as influências que os detalhes geométricos e as condições de contorno próximas a origem exercem sobre o perfil de velocidades são mínimas.

Os escoamentos bi-dimensionais são representados no plano (x,y) com as velocidades médias U e V . Pode-se buscar uma solução por similaridade expressando a velocidade na direção x por:

$$\frac{U(x,y)}{U_R(x)} = F'(\eta); \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)}, \quad (1)$$

onde U_R e δ representam uma velocidade de referência e a espessura da camada limite, ambos dependentes da distância x da origem e F uma função genérica a ser determinada. Isto significa dizer que perfis de velocidade localizados em diferentes posições ' x ' ficam coincidentes quando expressos pela variável de similaridade η . Escoamentos com esta propriedade também são denominados por auto-preservantes (self preserving flows).

Note que a variável de similaridade é uma proposição. Uma transformação similar tem sucesso somente se ela conseguir reduzir o número de variáveis independentes do problema, no caso de duas para uma $(x,y \rightarrow \eta)$ e também o número de condições de contorno que o problema tem que satisfazer. Isto será abordado nas seções seguintes onde se tratará da equação de quantidade de movimento e massa.

1.0 Escalas Características

Nesta seção serão determinadas as escalas características da velocidade de referência e da espessura da camada limite para os três casos apresentados.

1.1 Jatos Bidimensionais

Quer-se estabelecer a forma funcional da velocidade característica e da espessura da camada limite para os escoamentos em jatos descarregados em um fluido estacionário.

A primeira escala a ser determinada será a velocidade de referência. Esta pode ser estabelecida a partir de uma análise dimensional do problema. Para o jato livre, a velocidade na linha de centro, U_C , será tomada como a velocidade de referência. Espera-se que ela apresente um decaimento a medida que a coordenada x cresce devido ao 'espalhamento' do jato. O decaimento de U_C será uma função do fluxo de momento do jato M , da densidade do jato ρ e da distância x ,

$$U_C = U_C(M, \rho, x), \quad (2)$$

pelo teorema dos Π de Buckingham tem-se que somente um parâmetro adimensional é necessário para definir esta dependência de U_C ,

$$U_C \sqrt{\frac{\rho x}{M}} = \text{const.} \quad (3)$$

Deve-se destacar que não é esperado uma dependência de U_C com a viscosidade molecular para Reynolds elevados. Isto é, a razão entre as tensões turbulentas e molecular:

$$\frac{\tau_T}{\tau_L} = \frac{\overline{\rho u'v'}}{\mu du/dy} = \frac{v_T}{\nu} \cong \frac{\delta U_C}{\nu} \gg 1. \quad (4)$$

Baseando-se na Eq. (3) pode-se esperar que a velocidade de decaimento do jato na sua linha de centro varia de acordo com

$$U_C \propto x^{-\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Para jatos em ambientes livres de paredes, o fluxo de quantidade de movimento em qualquer plano transversal ao escoamento é uma constante:

$$M = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} U^2(x,y) dy. \quad (6)$$

Neste caso, a largura da camada limite pode ser estimada por meio da hipótese de similaridade dos perfis. Ela implica em dizer que a velocidade U pode ser expressa pela velocidade da linha de centro do jato, U_C e por uma função F que depende da variável de similaridade:

$$\frac{U(x,y)}{U_C(x)} = F'(\eta); \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)}. \quad (7)$$

Substituindo-se Eq. (7) em (6) encontra-se que:

$$M = \rho U_C^2(x) \cdot \delta(x) \int_{-1}^{+1} F'^2(\eta) d\eta \rightarrow U_C^2 \cdot \delta = \text{const.} \quad (8)$$

Com a informação das Eqs. (5) e (8) pode-se esperar que a largura do jato deve aumentar proporcionalmente com x conforme indicado pela equação (9),

$$\delta \propto x. \quad (9)$$

1.2 Esteiras Simétricas Produzidas por Corpos 2D

A primeira escala a ser determinada será a velocidade de referência. Ela será baseada no déficit de velocidade na linha de centro, isto é:

$$\Delta U_C = (U_0 - U_C). \quad (11)$$

O comportamento do déficit de velocidade é decrescente com o aumento de x . Isto é, na região próxima do corpo sólido que causa a esteira o déficit de velocidade é alto, a medida que se afasta do corpo o déficit diminui de tal maneira que a velocidade na linha de centro da esteira se aproxima da velocidade da corrente livre.

De forma similar ao jato livre, a análise dimensional permitirá estabelecer a forma funcional de decaimento do déficit de velocidade. O decaimento de ΔU_C será uma função da força de arrasto por unidade de largura do corpo D (N/m), da densidade do fluido ρ e da distância x ,

$$\Delta U_C = \Delta U_C(D, \rho, x), \quad (12)$$

pelo teorema dos Π de Buckingham tem-se que somente um parâmetro adimensional é necessário para definir esta dependência de U_C ,

$$\Delta U_C \sqrt{\frac{\rho x}{D}} = \text{const.} \quad (13)$$

Não é esperado uma dependência de ΔU_C com a viscosidade molecular para Reynolds elevados. Baseando-se na Eq. (13) pode-se esperar que o decaimento do déficit de velocidade na sua linha de centro varia de acordo

$$\Delta U_C \propto x^{-\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

coincidente com o decaimento do jato livre 2D.

O escoamento em esteiras de corpos, para regiões suficientemente afastadas do corpo, o arrasto e a variação da quantidade de movimento estão relacionadas por meio do balanço integral das forças de arrasto e fluxo de momento:

$$D = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} U[U_0 - U] dy. \quad (15)$$

Neste caso, a largura da camada limite pode ser estimada por meio da hipótese de similaridade dos perfis. Ela implica em dizer que a velocidade U pode ser expressa pelo déficit de velocidade da linha de centro ΔU_C e por uma função F que depende da variável de similaridade:

$$\frac{U_0 - U(x, y)}{\Delta U_C(x)} = F'(\eta); \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)} \quad (16)$$

Substituindo-se Eq. (16) em (15) encontra-se que:

$$D = \rho \int_{-1}^{+1} [U_0 - \Delta U_C F'(\eta)] \cdot [\Delta U_C F'(\eta)] \cdot \delta \cdot d\eta. \quad (17)$$

Para regiões afastadas da origem, isto é, para $\Delta U_C \rightarrow 0$, a Eq. (17) pode ser simplificada para:

$$D \cong \rho U_0 \Delta U_C(x) \cdot \delta(x) \int_{-1}^{+1} F'(\eta) d\eta \rightarrow \Delta U_C \cdot \delta = \text{const.} \quad (18)$$

Com a informação das Eqs. (18) e (14) pode-se esperar que a largura da esteira deve aumentar proporcionalmente com x conforme indicado pela equação (19)

$$\delta \propto x^{\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

1.3 Camadas de Misturas 2D

Quando duas correntes paralelas de velocidades diferentes se encontram há uma difusão de quantidade de movimento de uma corrente para outra de tal maneira que a corrente mais rápida induz velocidade na corrente mais lenta como mostrado no perfil de velocidades da figura 1. Diferentemente do escoamento do jato e de esteira, neste caso não há uma propriedade integral do escoamento a ser conservada. Nem tão

pouco pode-se aplicar a similaridade de Reynolds para se determinar a espessura da camada limite que se desenvolve a partir da origem. De fato, as velocidades para $y \rightarrow +\infty$ e $-\infty$ são constantes e iguais a velocidade da corrente rápida e da corrente lenta. Neste caso pode-se tomar como velocidade de referência a velocidade da corrente mais rápida, assim:

$$U_R = U_1 = \Delta U_C = \text{const.} \quad (20)$$

A variação da largura da camada limite que se desenvolve entre as duas camadas de fluido pode ser estimada a partir de observações experimentais. Elas mostram que as camadas de fluidos tem a razão espessura da camada limite com a distância da origem variando de forma constante, isto é:

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} \equiv \frac{\delta}{x} = \text{const.}, \quad (23)$$

neste caso, espera-se que a dependência funcional da largura da camada limite seja dada por:

$$\delta \propto x. \quad (23)$$

Quadro Resumo

De forma sumária os principais resultados das escalas características e da forma funcional para os escoamentos acima apresentados e de outros disponíveis na literatura

Tabela 1 – Variação das velocidades de referência e espessura da C.L. a medida que se afastam da origem e o valor experimental da taxa de abertura.

	Vel. Referência U_R	Espessura C.L. δ	Taxa abertura (experimental)
Jato 2D	$U_C \propto x^{-1/2}$	x^1	0.100 a 0.110
Esteira 2D	$\Delta U_C \propto x^{-1/2}$	$x^{1/2}$	0.365
Camada Mistura	$\Delta U_C \propto x^0$	x^1	0.115
Jato Axisimétrico	$U_C \propto x^{-1}$	x^1	0.086 a 0.096
Esteira Axisimétrica	$\Delta U_C \propto x^{-2/3}$	$x^{1/3}$	----

Com relação a Tabela 1 a taxa de abertura ou taxa de espalhamento como é também conhecida, é definida para cada caso como segue:

- a) Esteira – é o valor da variável de similaridade η onde o déficit de velocidade, ΔU_C é igual a metade de seu valor máximo;

$$\eta = y \sqrt{\rho U_0^2 / (xD)}$$

- b) Jato 2D ou axisimétrico – é o valor da razão y/x onde a velocidade U é igual a metade da velocidade da linha de centro U_C .
- c) Camada de Mistura – é usualmente definida como a diferença entre os valores de y/x onde $(U-U_1)^2/(U_0-U_1)^2$ é 9/10 e 1/10, onde U_0 e U_1 são as velocidades das correntes.

2.0 Modelo de Comprimento de Mistura & Viscosidade Turbulenta

Serão apresentados dois modelos para determinação da viscosidade turbulenta: um baseado no modelo de comprimento de mistura e outro a partir da proposição de Prandtl-Reichardt que fornece a viscosidade turbulenta em função de uma velocidade de referência e um comprimento.

2.1 Comprimento de mistura

O comprimento de mistura para um escoamento turbulento, sem presença de paredes sólidas, é proporcional a largura da região de mistura. Prandtl aplicou esta idéia e propôs que a razão entre o comprimento de mistura e a espessura da camada limite fosse uma constante, isto é:

$$\frac{\ell(x)}{\delta(x)} \cong \alpha = \text{const.}, \quad (24)$$

onde α é uma constante de fechamento do modelo.

Tabela 1 – Variação do comprimento de mistura e a constante de proporcionalidade associada a cada escoamento.

	Const. α	Comp. Mist. $\frac{1}{x}$
Jato 2D	0.098	x^{-1}
Esteira 2D	0.180	$x^{-1/2}$
Camada Mistura	0.071	x^{-1}
Jato Axisimétrico	0.080	x^{-1}
Esteira Axisimétrica		$x^{-1/3}$

Os valores da constante α foram obtidos por otimização numérica do modelo contra dados experimentais. O modelo possui um único coeficiente para fechamento, no caso a constante α , e ela varia para cada tipo de escoamento. Esta constitui uma das deficiências do modelo pois apesar de representar razoavelmente bem as quantidades médias do escoamento, como será visto mais adiante, sua constante não tem universalidade, isto é, ela varia de escoamento para escoamento!

2.2 Viscosidade Turbulenta (Prandtl-Reichardt)

Prandtl propôs um modelo simples para determinação da viscosidade turbulenta aplicado somente para escoamentos livres. Reconhecendo que a viscosidade turbulenta é dada em função do comprimento de mistura por:

$$v_T = \ell^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|, \quad (25)$$

e admitindo-se que nestes escoamentos o gradiente de velocidade pode ser expresso por:

$$\frac{dU}{dy} \cong \frac{U_R}{\delta}, \quad (26)$$

a Eq. (25) passa a ser escrita, com o auxílio da Eq. (24) como:

$$v_T = \chi \delta^2 \frac{U_R}{\delta} = \chi \cdot \delta \cdot U_R, \quad (27a)$$

onde χ é uma constante de fechamento para o modelo e U_R é a velocidade de referência definida como a diferença entre a velocidade máxima e mínima do escoamento:

$$U_R = (U_{\text{máx}} - U_{\text{mim}}). \quad (27b)$$

Definição coincidente com aquela dada na Tabela 1. Este modelo generaliza as soluções de escoamentos livres em regime laminar para turbulento com pequenas modificações. Além disto ele também permite satisfazer mais condições de contorno dos escoamentos quando comparado ao modelo de comprimento de mistura.

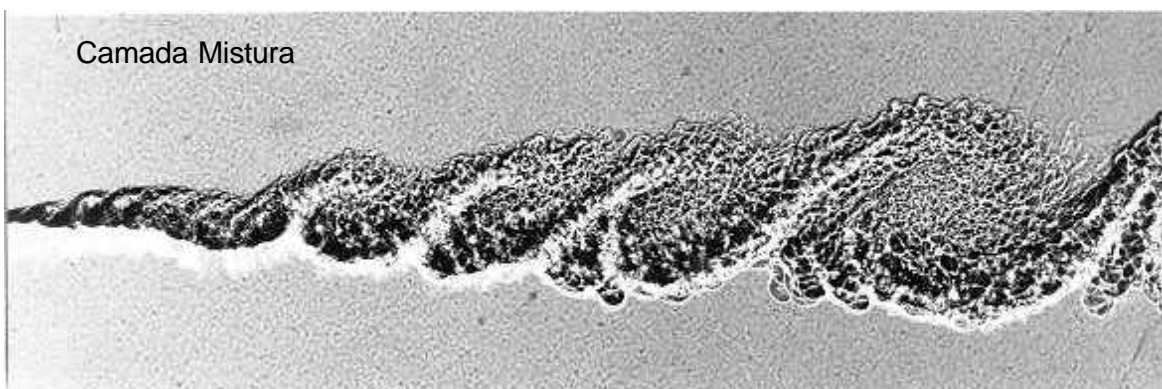
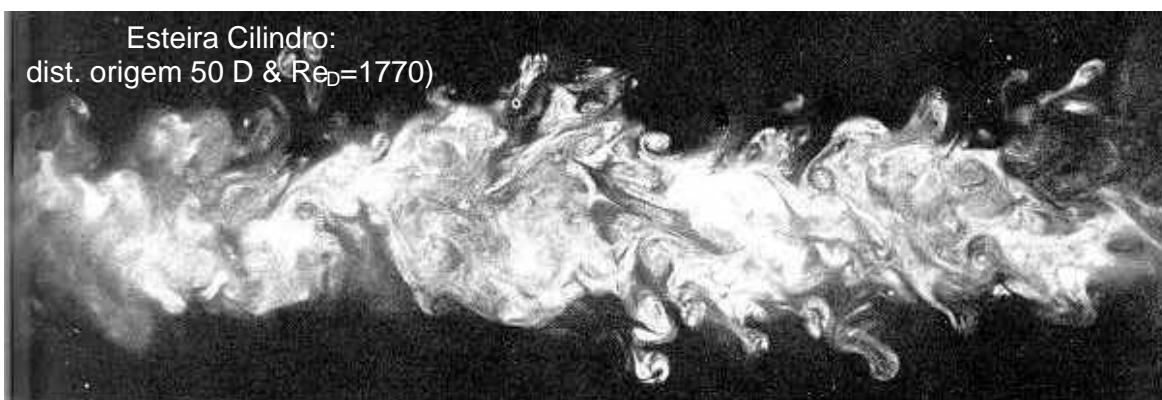


Fig. Visualização dos escoamentos: jato, esteira e camada de mistura, Van Dyke – An Album of Fluid Motion

As figuras acima revelam as macro e micro estruturas dos escoamentos apresentados. Por meio delas pode-se inferir o tamanho das grandes e pequenas escalas do escoamento. Além disto, por observação direta constata-se que a largura das camadas de escoamento são proporcionais ao tamanho dos maiores turbilhões o fundamentalmente, experimentalmente, a hipótese δ/ℓ constante.

3.0 Solução por Similaridade do Modelo de Comprimento de Mistura

Uma solução por similaridade para os três casos apresentados na Fig. 1 será desenvolvida nesta seção. A hipótese da variável de similaridade é aplicada as equações de conservação de quantidade de movimento e massa. A redução do número de variáveis independentes é conseguida e a equação de quantidade de movimento genérica para os três casos é determinada. A aplicação desta equação é realizada para cada um dos casos nas sub-seções seguintes.

3.1 Equação de Quantidade de Movimento e Hipótese de Similaridade

Os escoamentos com ausência de parede para elevados números de Reynolds se desenvolvem como camada limites sem gradientes de pressão externos. Esta aproximação significa que o gradiente de velocidades na direção transversal ao escoamento é muito maior que o gradiente de velocidades paralelo ao escoamento. Nestas condições, a equação de quantidade de movimento é dada por:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{\rho} \right). \quad (28)$$

Procura-se uma transformação de similaridade de tal forma que o número de variáveis independentes (x e y) possa ser reduzido para uma única variável, η , no caso chamada de variável de similaridade. Havendo sucesso nesta transformação, a Eq. (28) tem passa a ser uma equação diferencial ordinária e pode ser resolvida por um método de integração comum.

O primeiro passo na busca de uma transformação de similaridade é expressar a variável dependente na forma de um produto de funções, sendo que uma delas envolve o parâmetro de similaridade. Neste caso a forma mais conveniente para a velocidade na direção do escoamento é:

$$U(x,y) = U_R(x) * F'(\eta), \quad (29)$$

onde U_R é a velocidade de referência, F uma função a ser determinada e dependente da variável de similaridade definida por:

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}, \quad (30)$$

e, com a finalidade de auxiliar, as expressões envolvendo as derivadas de h são:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\eta \cdot \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\delta(x)} \quad \frac{\partial \eta^2}{\partial x \partial y} = -\frac{\delta'(x)}{\delta^2(x)} \quad (31)$$

O próximo passo é aplicar a transformação da Eq. (29) na equação de quantidade de movimento. Devido a complexidade algébrica do processo ele será desenvolvido termo a termo.

A tensão de cisalhamento e sua variação em y

Definição do comprimento de mistura de acordo com Eq. (24),

$$\ell(x) = \alpha \cdot \delta(x). \quad (32a)$$

Determinação da tensão utilizando o modelo de comprimento de mistura

$$\frac{\tau}{\rho} = \ell^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \cdot \frac{dU}{dy} = \alpha^2 \cdot \delta^2(x) \cdot \left| \frac{U_R \cdot F'}{\delta(x)} \right| \cdot \frac{U_R \cdot F'}{\delta(x)} = \alpha^2 \cdot U_R^2 |F'| \cdot F'', \quad (32b)$$

e da derivada da tensão:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{\rho} \right) = \alpha^2 \cdot U_R^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} [|F'| \cdot F''] = \frac{\alpha^2 \cdot U_R^2}{\delta(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} [|F'| \cdot F''] \quad (32c)$$

As velocidades e derivadas associadas

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (U_R \cdot F') = U_R' \cdot F' - U_R \cdot \eta \cdot \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} F'' \quad (33a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (U_R \cdot F') = \frac{U_R}{\delta(x)} F'' \quad (33b)$$

A velocidade transversal é obtida a partir da equação de conservação da massa:

$$V = -\frac{\partial}{\partial x_0} \int U \cdot dy = -\frac{\partial}{\partial x_0} \int U_R \cdot F' \cdot \delta(x) \cdot d\eta = -\frac{\partial}{\partial x} [U_R \cdot \delta(x) \cdot (F(\eta) - F(0))],$$

considerando simetria no perfil de velocidades com a linha de centro, $F(0)=0$ e a velocidade V em função de η e x é dada pela expressão:

$$V = -U_R' \delta \cdot F - U_R \delta' \cdot F + U_R \delta' \cdot \eta \cdot F' \quad (33c)$$

Os Termos Inerciais

Os termos inerciais são obtidos a partir da substituição da Eq. (33 a-c) no lado direito da equação de quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} V \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{U_R}{\delta(x)} F'' \cdot [-U_R' \delta(x) F + U_R \delta'(x) [\eta \cdot F' - F]] = -U_R U_R' F F'' + U_R^2 \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} F'' [\eta F' - F] \\ &= -U_R U_R' \cdot F \cdot F'' + U_R^2 \cdot \eta \cdot \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} F'' \cdot F' - U_R^2 \cdot \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} F'' \cdot F \end{aligned} \quad (34a)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = U_R(x) \cdot F'(\eta) \cdot \left[U_R' \cdot F' - U_R \cdot \eta \cdot \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} F'' \right] = U_R \cdot U_R' \cdot F'^2 - U_R^2 \cdot \eta \cdot \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} \cdot F' \cdot F'' \quad (34b)$$

A Equação de Q. Movimento e Hipótese de Similaridade

Substituindo-se as Eqs (32c), (34a) e (34b) na Eq. (28), chega-se a equação de quantidade de movimento em termos das variáveis x e η :

$$\underbrace{U_R \cdot U'_R \cdot F'^2 - U_R^2 \eta \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} F' \cdot F'}_{udu / dx} - \underbrace{U_R U'_R \cdot F \cdot F' + U_R^2 \eta \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} F'' \cdot F - U_R^2 \cdot \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} F' \cdot F}_{vdu / dy} \quad (35)$$

$$= \frac{\alpha^2 \cdot U_R^2}{\delta(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \underbrace{[F' \cdot F']}_{(1/\rho) dt / dy}$$

que após simplificações algébricas fica escrita de forma mais compacta como:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [F' \cdot F'] = \frac{\delta U'_R}{\alpha^2 U_R} \cdot [F'^2 - FF''] - \frac{\delta'}{\alpha^2} \cdot FF'' \quad (36)$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [F' \cdot F'] = \frac{\delta U'_R}{\alpha^2 U_R} \cdot F'^2 - \frac{(U_R \delta)'}{\alpha^2 U_R} \cdot FF'' \quad (36a)$$

Reconhecendo-se que: $\frac{d}{d\eta}(FF') = F'^2 + FF''$, então a Eq. (36) também pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [F' \cdot F'] = \frac{\delta U'_R}{\alpha^2 U_R} \frac{d}{d\eta}(FF') - \left[2 \frac{\delta U'_R}{\alpha^2 U_R} + \frac{2\delta'}{\alpha^2} \right] \cdot FF'' \quad (37)$$

ou ainda na forma:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [F' \cdot F'] = - \left[\frac{\delta U'_R}{\alpha^2 U_R} + \frac{\delta'}{\alpha^2} \right] \frac{d}{d\eta}(FF') + \left[2 \frac{\delta U'_R}{\alpha^2 U_R} + \frac{\delta'}{\alpha^2} \right] \cdot F'^2 \quad (38)$$

Deve-se destacar que as Eqs. (36) a (38) são totalmente equivalentes, isto é, contém a mesma informação. Além disto elas também são equivalentes a Eq. (28) escrita em termos das variáveis $(x$ e $y)$.

Tomando-se como referência a Eq. (36) nota-se que ela é dependente das variáveis x e η e portanto não trazendo nenhuma vantagem computacional quando comparada com a Eq. (28) em função de x e y . No entanto, para que a equação (36) seja dependente somente de η é necessário que os coeficientes que multiplicam os termos de derivada de F sejam constantes, isto é, não apresentem dependência com x . Em outras palavras, para haver similaridade é necessário que:

$$\frac{\delta U'_R}{\alpha^2 U_R} = C1 \quad \& \quad \frac{\delta'}{\alpha^2} = C2, \quad (39)$$

onde $C1$ e $C2$ são constantes arbitrárias.

3.2 Jato Livre 2D

Uma solução por similaridade para um jato livre 2D que descarrega em um ambiente com fluido estacionário é procurada tomando-se que o perfil médio de velocidades é dado em função de:

$$U = U_C \cdot F'(\eta), \quad (40)$$

que a largura do jato, δ , varia linearmente com a distância x e é proporcional a constante A :

$$\delta(x) = Ax, \quad (41)$$

similarmente o comprimento de mistura apresenta a como fator de proporcionalidade

$$\ell(x) = \alpha x. \quad (42)$$

O fluxo de momento M do jato é constante em todo domínio, isto é, na ausência de forças externas (atrito de paredes) o momento se conserva, então

$$M = 2 \int_0^{+\infty} \rho u^2 dy = 2\rho\delta U_C^2 \underbrace{\int_0^{+\infty} F'^2 d\eta}_{\lambda = \text{const.}} \quad (43)$$

Por meio da Eq. (43) pode-se determinar uma relação para velocidade da linha de centro do jato e sua derivada em função do fluxo de momento do jato, da densidade e da largura do jato

$$U_c = \sqrt{\frac{M}{2\rho\lambda}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\delta(x)}} \quad \& \quad U'_c = -\frac{1}{2\delta} \sqrt{\frac{M}{2\rho\delta\lambda}} = -\frac{U_c \delta'}{2\delta}. \quad (44)$$

A forma funcional do resultado da Eq. (44) foi antecipado por meio da análise dimensional realizada Eq. (5).

As variáveis $C1$ e $C2$ definidas na Eq. (39) são:

$$C1 = \frac{\delta U'_R}{\alpha^2 U_R} = -\frac{\delta}{\alpha^2} \cdot \frac{U_C}{2\delta} \cdot \frac{1}{U_C} = -\frac{\delta'}{2\alpha^2} = -\frac{A}{2\alpha^2} \quad (45)$$

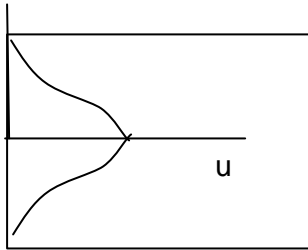
$$C2 = \frac{\delta'}{\alpha^2} = \frac{A}{\alpha^2}$$

Dado que $C1$ e $C2$ não apresentam dependência funcional em x , isto é, assumem um valor constante em função de parâmetros do jato, pode-se dizer que a transformação de similaridade teve sucesso na E.D.P.. Por meio dela pode-se reduzir o número de variáveis dependentes do problema de dois para um e a equação de conservação de quantidade de movimento (diferencial parcial) em uma equação diferencial ordinária, Eq. (46) em função da variável de similaridade:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [F' \cdot F'] = -\frac{A}{2\alpha^2} F'^2 - \frac{A}{2\alpha^2} \cdot FF'' \quad (46)$$

Sinal da derivada segunda de F e as condições de contorno

O perfil de velocidades do jato é máximo na linha de centro, decrescendo na direção transversal, como indica a figura. Neste caso para $y = 0$, $dU/dy = 0$ e para $y \neq 0$, $dU/dy < 0$ então $F'' < 0$ como sugere a eq. abaixo:



$$\frac{dU}{dy} = \frac{U_c}{\delta} F'' \leq 0 \rightarrow |F'| = -F'',$$

$$\text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} [|F'| \cdot F'] = -\frac{\partial}{\partial \eta} [F'^2] = -2F'F''.$$

Eliminando-se o módulo de F'' na equação (46) chega-se a forma final da equação de quantidade de movimento para o jato livre 2D

$$2F'F'' - \frac{A}{2\alpha^2} F'^2 - \frac{A}{2\alpha^2} FF'' = 0 \quad (47)$$

A equação resultante é uma equação diferencial ordinária de terceira ordem que necessita de três condições de contorno para que seja obtida uma solução. Neste caso pode-se definir as condições:

$$Y = 0 \rightarrow V = 0 \text{ e } U = \text{máx} \text{ então } F(0) = 0 \text{ e } F''(0) = 0 \quad (48)$$

$$Y \rightarrow \infty \rightarrow U = 0 \text{ então } F'(\infty) = 0$$

Além da necessidade de satisfazer estas três condições o modelo necessita ajustar a constante a que produza o melhor ajuste contra os dados experimentais do perfil médio de velocidades. Isto é decorrente da utilização de um modelo algébrico que por ser simples, não traz consigo uma universalidade nas constantes.

Comentários a cerca do modelo

Uma inspeção mais cuidadosa nas condições de contorno e na equação que deve satisfazer-las podemos notar incompatibilidades. Substituindo-se as c.c. (48) na Eq. (47) chega-se a constatação que na linha de centro $F' = 0$, isto é, a velocidade do jato é nula o que não é fisicamente plausível! Isto leva a pensar que representar a tensão por um modelo de comprimento de mistura torna o problema não bem colocado. De fato para se ter sucesso na transformação de similaridade é necessário que a equação tenha sua ordem reduzida com a transformação e também suas condições de contorno. Este não é o caso e portanto a transformação não teve 100% de sucesso. Provavelmente deve ter sido este um fator que motivou Prandtl a propor o modelo da Eq. (27). As consequências deste fato no resultado não se pode antecipar mas simplesmente verificar qual foi o efeito da não satisfação global da transformação similar.

A Eq. (47) pode ainda ser reescrita na forma:

$$\frac{d}{d\eta} \left[(F')^2 - \frac{A}{2\alpha^2} (FF') \right] = 0,$$

que integrada uma vez resulta em:

$$(F')^2 - \frac{A}{2\alpha^2} (FF') = 0,$$

pois $F(0)=0$ e $F''(0) = 0$. A expressão acima também pode ser expressa por meio da igualdade:

$$(F''')^2 - \frac{A}{4\alpha^2} \frac{d}{d\eta}(F')^2 = 0, \tag{49}$$

Distintamente da Eq. (47), a Eq. (49) é uma EDO de 2ª ordem e só pode satisfazer a duas condições de contorno. Utilizando-se uma rotina Runge-Kutta no Mathematica consegue-se resultados razoavelmente próximos das medidas experimentais e do perfil de Reichardt utilizando-se as condições de contorno:

$$Y = 0 \rightarrow F(0) = 0 \text{ e } F'(0) = 1 \tag{49}$$

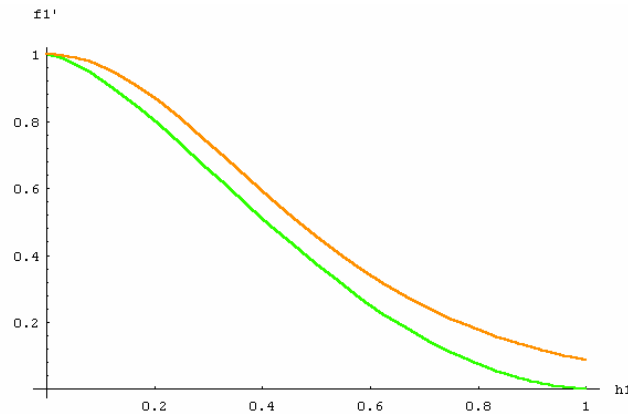


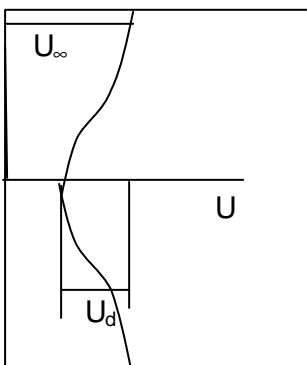
Fig. 2 Comparação entre o resultado numérico do modelo da Eq. (47) e da solução de Reichardt.

3.3 Esteira 2D de Corpos Simétricos

Escoamentos em esteiras são formados por duas correntes que se juntam a jusante de um corpo rígido. Devido a ação do não deslizamento na superfície sólida. As duas correntes que se formam a jusante do corpo apresentam uma velocidade mínima na linha de centro que cresce até se encontrar com a velocidade da corrente livre. Para corpos simétricos (não apresentam força de sustentação), um típico perfil de velocidades é representado na figura abaixo.

O déficit de velocidade é definido como sendo a diferença entre a velocidade da corrente livre e a velocidade real do fluido na esteira,

$$U_d = U_\infty - U \geq 0 \tag{50}$$



Para uma região suficientemente distante da origem, a equação de quantidade de movimento, Eq. (28) pode ser aproximada pela forma linear da Eq. (51)

$$U_\infty \frac{\partial U_d}{\partial x} \cong \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{\rho} \right) \tag{51}$$

e o déficit de velocidade expresso pela var. similar:

$$U_d = \Delta U_C \cdot F'$$

As condições de contorno para a Eq. (51) são:

$$\begin{aligned} y=0 &\rightarrow \frac{\partial U_d}{\partial y} = 0 \quad (\text{ponto de mínimo}) \\ y=\infty &\rightarrow U_d = 0 \quad (\text{corrente livre}) \\ x=x_{ref} &\rightarrow U_d = \quad (\text{valor especificado}) \end{aligned} \tag{52}$$

As duas primeiras c.c. em (y) são esperadas entretanto a terceira em (x) existe pois a equação (50) tem uma derivada parcial em (x) e portanto demanda uma c.c. para x. A priori seria necessário especificar em alguma posição o perfil de velocidades entretanto, havendo solução similar há uma redução do número de c.c. (há redução da ordem da EDP) e ela fica implicitamente satisfeita.

Seguindo-se os passos da análise dimensional realizada anteriormente pode-se esperar que a espessura da esteira e o comprimento de mistura sejam representados pelas Eqs. (53) e (54)

$$\delta(x) = A\sqrt{x} \tag{53}$$

$$\frac{\ell}{\delta} = \alpha \tag{54}$$

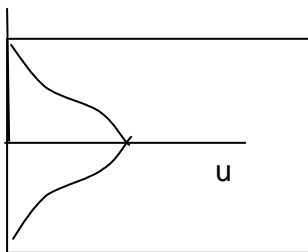
Também pode-se dizer que:

$$\delta \Delta U_C = \text{const.} \rightarrow \delta' \Delta U_C = -\delta \Delta U_C' \text{ ou } \frac{\delta'}{\delta} = \frac{\Delta U_C'}{\Delta U_C}$$

$$\delta' = \frac{A}{2\sqrt{x}} = \frac{A^2}{2\delta}$$

$$\Delta U_C' = -\frac{B}{2x\sqrt{x}} = \frac{\Delta U_C}{2x}$$

Equação da quantidade de movimento:



U_d possui um máx em $y = 0$, é decrescente com y ;

$$\frac{dU_d}{dy} = \frac{\Delta U_C}{\delta} F'' \leq 0 \rightarrow |F''| = -F''$$

¹ $U = U_{inf} - U_d$. O termo inercial $(U_{inf} - U_d)dU_d/dx + VdU_d/dy = U_{inf}dU_d/dx - U_d dU_d/dx + VdU_d/dy$, mas Eq. massa $> V \cong U_d \delta/L$ e para distâncias grandes $U_d \rightarrow 0$ e os termos: $U_d dU_d/dx + VdU_d/dy$ são da mesma ordem de magnitude porém menores que $U_{inf}dU_d/dx$

Substituindo-se as expressões para o termo inercial e de atrito chega-se a equação da conservação da quantidade de movimento:

$$\underbrace{U_\infty \Delta U'_C F' - U_\infty \Delta U_C \eta \frac{\delta'}{\delta} F''}_{U_\infty \frac{du_d}{dx}} + \underbrace{\frac{\alpha^2 \cdot \Delta U_C^2}{\delta(x)} \cdot \frac{d}{d\eta} F''^2}_{\frac{d}{dy} \left(\frac{\tau}{\rho} \right)} = 0. \quad (55)$$

Isolando o termo de derivada superior:

$$\frac{\delta U_\infty \Delta U'_C F'}{\alpha^2 \Delta U_C^2} - \frac{U_\infty \delta'}{\alpha^2 \Delta U_C} \eta F'' + \frac{d}{d\eta} F''^2 = 0 \quad (56)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{a1}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{a2}$

mas reconhecendo que $\delta' \Delta U_C = -\delta \Delta U'_C$, que os termos F' e $\eta F''$ constituem um diferencial perfeito, a forma final da equação de quantidade de movimento na esteira fica:

$$\frac{d}{d\eta} \left(F''^2 - \frac{U_\infty \delta'}{\Delta U_C \alpha^2} \eta F' \right) = 0 \quad (57)$$

Sujeito as condições de contorno:

$$F''(0)=0$$

$$F'(1)=0$$

Para haver solução similar é necessário que 'a' seja uma constante $a = \frac{U_\infty \delta'}{\Delta U_C \alpha^2} = \text{const}$

Solução da Eq. F:

$$\frac{d}{d\eta} (F''^2 - a\eta F') = 0 \rightarrow F''^2 - a\eta F' = C$$

mas $F''(0)=0$ logo $C=0$.

$$\frac{d}{d\eta} F'^2 = a\eta F'$$

$$\frac{dF'}{\sqrt{F'}} = \sqrt{a\eta} d\eta \rightarrow 2\sqrt{F'} = \frac{2\sqrt{a}}{3} \eta^{\frac{3}{2}} + C$$

mas $F'(1)=0$ logo $C = -2/3$,

$$F' = \frac{a}{9} \left[1 - \eta^{\frac{3}{2}} \right]^2 \quad (58)$$

Determinação de 'a' :

$$\lambda = 2 \frac{a}{9} \int_0^1 (1 - \eta^{3/2})^2 d\eta = \frac{a}{9} \cdot \frac{9}{10}$$

$$a = \frac{U_\infty \delta'}{\alpha^2 \Delta U_C} = \frac{U_\infty}{\alpha^2 \Delta U_C} \left[\frac{A^2}{2\delta} \right]$$

O arrasto por unidade de largura do corpo 2D é determinado por meio da Eq. (18) onde D tem unidade de força por unidade de comprimento do corpo. A constante que define a taxa de abertura da esteira, A, é dada na expressão abaixo:

$$D = \rho \delta U_\infty \Delta U_C \lambda = 2\rho \delta U_\infty \Delta U_C \underbrace{\frac{1}{9} \left(\frac{U_\infty A^2}{2\alpha^2 \delta \Delta U_C} \right) \frac{9}{10}}_{\lambda} \rightarrow A = \alpha \sqrt{20} \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho U_\infty^2}}$$

$$a = \frac{U_\infty}{\alpha^2 \Delta U_C} \left[\frac{A}{2\sqrt{x}} \right] = \frac{1}{\alpha^2} \sqrt{\frac{\rho x}{D}} \cdot \left[\frac{\alpha \sqrt{20} \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho U_\infty^2}}}{2\sqrt{x}} \right]$$

$$a = \frac{\sqrt{5}}{\alpha U_\infty} \cdot e \quad \Delta U_C = U_\infty \sqrt{\frac{D}{\rho x}}$$

O Perfil de Velocidades

Substituindo-se os valores das constantes acima definidas encontra-se que a abertura do jato, $\delta(x)$, é expressa por:

$$\delta(x) = \alpha \sqrt{10 \cdot C_D \cdot x}$$

onde C_D é o coeficiente de arrasto do corpo-2D expresso por:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \cdot L}$$

onde L é uma dimensão característica do corpo (cilindro L = diâmetro) e D é a força por unidade de largura. O déficit de velocidade na esteira pode então ser expresso em função do arrasto D

$$U_d(x, y) = \frac{\sqrt{5}}{9\alpha} \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho x}} \cdot \left[1 - \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^{3/2} \right]^2 \quad (59a)$$

ou em termos do coeficiente de arrasto:

$$U_d(x, y) = \frac{\sqrt{10}}{18\alpha} \cdot \sqrt{\frac{C_D}{x}} \cdot \left[1 - \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^{3/2} \right]^2 \quad (59b)$$

Deve-se destacar a dependência da força de arrasto do corpo no perfil de velocidades. O melhor ajuste é obtido para $\alpha = 0.18$ e a constante A da largura da esteira é $A = 0.247$. Para $y = 0$, tem-se a variação da velocidade da linha de centro da esteira. Uma estimativa do arrasto de um corpo pode ser realizada medindo-se a variação da velocidade da linha de centro na sua esteira. Esta solução foi obtida em 1930 por Schlichting (tese de doutorado).

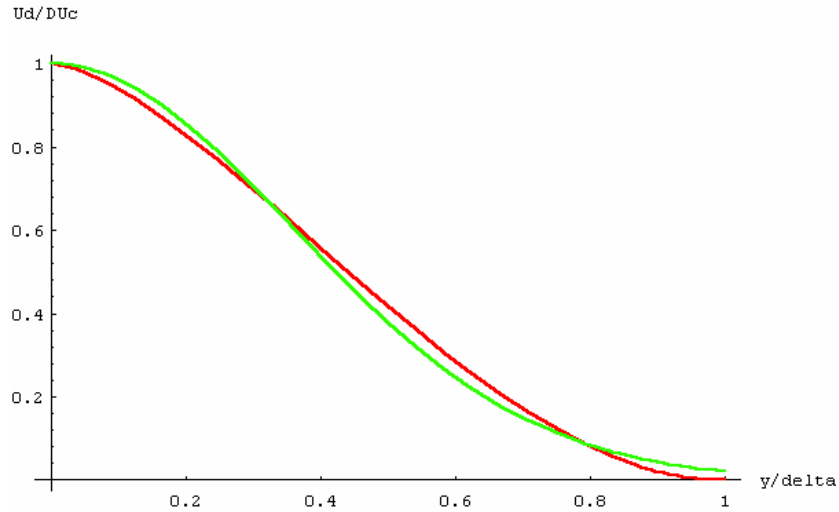
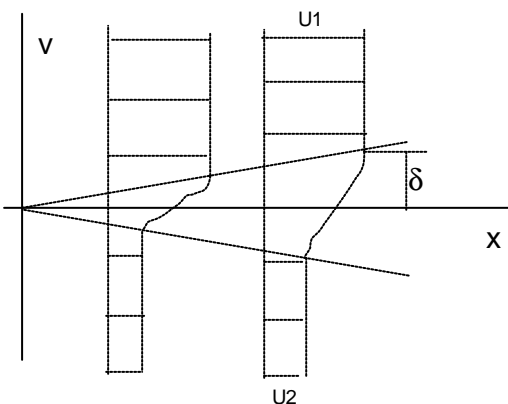


Fig. xx – Comparação entre as soluções similares obtidas para a função F' resultantes do modelo de comprimento de mistura, Eq. (59b) (vermelha) e da viscosidade turbulenta, Eq. (77) (linha verde).

3.4 Camadas de Mistura

O perfil de velocidades do escoamento entre duas camadas de fluido com velocidades diferentes é representado na figura abaixo. A equação de conservação da quantidade de movimento, Eq. (28) está sujeita às condições de contorno expressas por:



$$y \rightarrow +\infty, u = U_1 \quad e \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

$$y \rightarrow -\infty, u = U_2 \quad e \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

$$y \rightarrow 0, v = 0 \quad \text{simetria}$$

Busca-se uma transformação por similaridade de tal forma que o perfil de velocidades U é proporcional a velocidade da corrente mais rápida e de uma função $F(y/\delta)$,

A relação entre o comprimento de mistura e a metade da espessura da camada limite é dada pela constante α ,

$$\frac{\ell}{\delta} = \alpha$$

Na constante C1, Eq. (39) é nula além disto, a velocidade U é sempre crescente com y crescente, logo $dU/dy > 0$ e $F'' > 0$, conseqüentemente a função módulo F'' pode ser substituída por F'' na Eq. (36) que passa a tomar a forma:

$$2F''F'''' + \frac{\delta'}{\alpha^2} \cdot FF'' = 0 \quad \text{ou} \quad F'''' + \frac{\delta'}{2\alpha^2} \cdot F = 0 \quad (60)$$

$$y = +\infty \quad F'(\infty) = 1$$

$$y = -\infty \quad F'(-\infty) = U_2/U_1 \quad (61)$$

$$y = 0 \quad F(0) = 0$$

Apesar da equação ter solução analítica, sua forma algébrica é bastante complexa e envolve diversos termos. É conveniente nestes casos utilizar uma rotina de integração tipo Runge-Kutta por ser mais direto e simples. A solução numérica e uma comparação direta com um ajuste proposto por Reichardt aos dados experimentais do perfil médio de velocidades é mostrado na Figura 3.

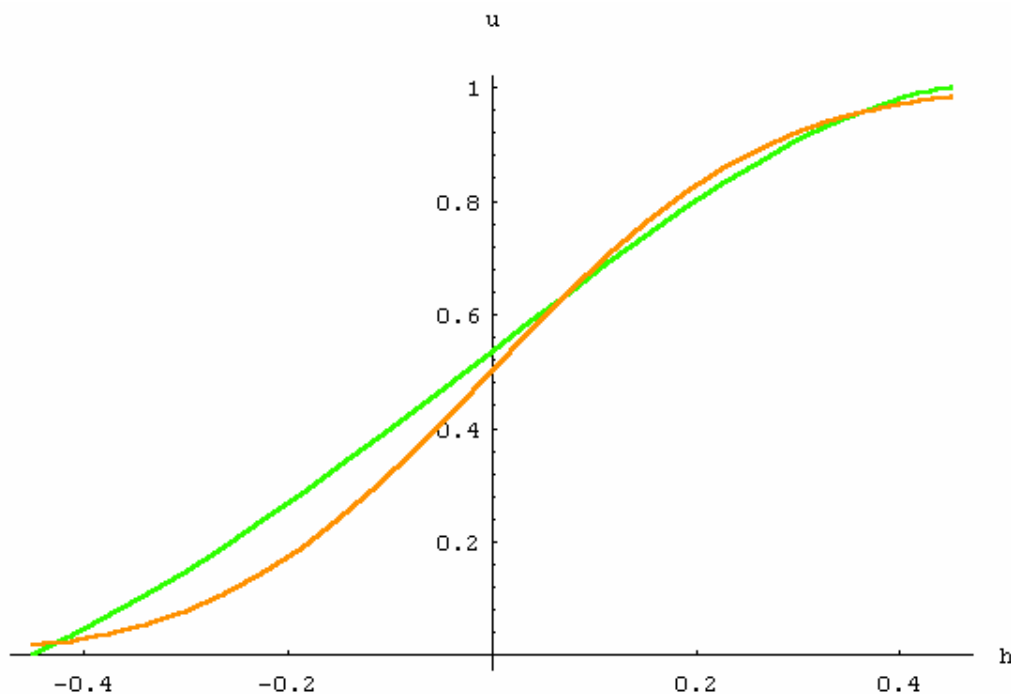


Fig. 3 – Perfil médio de velocidades (verde solução numérica) e laranja (ajuste de Reichardt).

4.0 Solução por Similaridade do Modelo Prandtl-Reichardt

Ao invés de trabalhar com o conceito de comprimento de mistura, Prandtl propôs o modelo para a viscosidade turbulenta para escoamentos livres:

$$v_T = \chi \cdot \delta \cdot U_R, \tag{27}$$

onde U_R é a velocidade de referência definida na Eq. (27b) e χ é uma constante de fechamento para o modelo. Este modelo generaliza as soluções de escoamentos livres em regime laminar para turbulento com pequenas modificações. Além disto ele também permite satisfazer mais condições de contorno das equações do momento enquanto que o modelo de comprimento de mistura não. Este modelo foi estendido para escoamentos externos a camada limite por Clauser.

Para este modelo a tensão passa a ser representada por

$$\frac{\tau}{\rho} = \underbrace{\chi \delta U_R}_{v_T} \cdot \frac{dU}{dy} = \chi \delta U_R \cdot \frac{U_R \cdot F''}{\delta(x)} = \chi \cdot U_R^2 \cdot F'', \tag{62}$$

e da derivada da tensão:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{\rho} \right) = \chi \cdot U_R^2 \cdot \frac{F'''}{\delta(x)} \tag{63}$$

Substituindo-se Eq. (63) na Eq. (35) chega-se a equação de conservação de quantidade de movimento escrita em função da variável de similaridade η e x :

$$\underbrace{U_R \cdot U_R' \cdot F'^2 - U_R^2 \eta \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} F' F''}_{udu/dx} - \underbrace{U_R U_R' F \cdot F'' + U_R^2 \eta \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} F'' F' - U_R^2 \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} F'' F}_{vdu/dy} = \chi \cdot U_R^2 \cdot \frac{F'''}{\delta(x)} \tag{64}$$

(1/ρ)dτ/dy

que após simplificações algébricas fica escrita de forma mais compacta como:

$$F''' = \frac{\delta U_R'}{\chi U_R} \cdot [F'^2 - F F''] - \frac{\delta'}{\chi} \cdot F F'' \tag{65}$$

A principal diferença da Eq. (65) em relação a Eq. (36) é a ausência do termo de tensão da segunda derivada de F multiplicando F''' . Esta diferença a parte os termos inerciais são representados de forma similar.

Para haver solução por similaridade é necessário que os coeficientes da Eq. (65) sejam independentes da variável x , isto é

$$\frac{\delta U_R'}{\chi U_R} = C1 \quad \& \quad \frac{\delta'}{\chi} = C2, \tag{66}$$

$C1$ e $C2$ constantes.

4.1 Jato Livre 2D

Para o jato livre a velocidade de referência é a velocidade da linha de centro do jato, U_C . Baseando-se nas relações da tabela 1, as constantes C_1 e C_2 tomam a forma:

$$C_1 = \frac{\delta U'_R}{\chi U_R} = -\frac{A}{2\chi} \quad \& \quad C_2 = \frac{\delta'}{\chi} = \frac{A}{\chi}, \quad (67)$$

em contra-posição a Eq.(47), a equação da Q.M. transformada passa a ser:

$$F''' + \frac{A}{2\chi} F'^2 + \frac{A}{2\chi} FF'' = 0. \quad (68)$$

sujeita as condições de contorno:

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 && \text{(simetria com a linha de centro, } V = 0) \\ F'(\infty) &= 0 && \text{(afastado da linha de centro a velocidade decai p/ 0)} \\ F''(0) &= 0 && \text{(velocidade é máxima na linha de centro)} \end{aligned} \quad (69)$$

Integração da Eq. (68)

A Eq. (68) possui solução analítica. Utilizando a regra da cadeia: $d(FF')/d\eta = (F')^2 + FF''$, a Eq. (68) pode ser posta na forma:

$$\frac{d}{d\eta} \left[\chi F' + \frac{A}{2} (FF') \right] = 0, \quad (68)$$

então:

$$\chi F' + \frac{A}{2} (FF') = C,$$

mas, como $F''(0)=F'(0)=0$ a constante C é nula, portanto a Eq. (68) se reduz para:

$$\frac{d}{d\eta} \left[\chi \frac{dF}{d\eta} + \frac{A}{4} F^2 \right] = 0. \quad (69)$$

Integrando-se Eq.(69) de 0 a η resulta em:

$$\chi [F'(\eta) - F'(0)] + \frac{A}{4} [F^2(\eta) - F^2(0)] = 0, \quad (70)$$

entretanto, $F(0)=0$ e $F'(0)=1$ porque na linha de centro $U=U_C$, então (70) passa a ser uma equação diferencial ordinária (Equação de Ricatti) :

$$\chi F'(\eta) + \frac{A}{4} F^2(\eta) = \chi, \quad (71)$$

que pode ser integrada diretamente isolando-se F e η

$$\int \frac{dF}{1 - \frac{A}{4\chi} F^2} = \int_0^\eta d\eta$$

que após integração (²) resulta em:

$$F = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{\chi}} \operatorname{Tanh} \left(\frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{A}{\chi}} \right)$$

e o perfil de velocidades:

$$\frac{U}{U_c} = 1 - \operatorname{Tanh}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{\chi}} \eta \right)$$

Sabendo-se que a constante $A = 0.246$ (experimental) e da restrição imposta pela integral do fluxo de momento, Eq. (43), chega-se ao valor da constante livre $\chi = 0.138$. Deste modo a solução para o jato livre 2D é:

$$\begin{aligned} \chi &= 0.138 \\ \delta &= 0.246 \cdot x \\ \frac{U}{U_c} &= 1.426 \sqrt{\frac{M}{x}} \left[1 - \operatorname{Tanh}^2 \left(\frac{2y}{3\delta} \right) \right] \end{aligned} \quad (72)$$

4.2 Esteira de Corpos 2D Sem Sustentação

Para o escoamento na esteira de um corpo simétrico a velocidade de referência para o modelo de viscosidade turbulenta é a diferença entre a velocidade máxima e mínima do escoamento. Além disto, para posições afastadas da origem ($L/x > 200$) pode-se supor existência de similaridade e a equação (64) passa a ser:

$$F''' + \underbrace{\frac{U_\infty \Delta U_c \delta}{\chi \Delta U_c^2}}_a [F' + \eta F''] = 0. \quad (73)$$

A transformação é similar pois o parâmetro 'a' da Eq. (73) é uma constante, isto é, não depende da variável 'x'. A Eq. (73) deve satisfazer as condições:

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 && \text{(simetria com a linha de centro, } V = 0) \\ F'(0) &= 1 && \text{(velocidade na linha de centro, } U_d = \Delta U_c) \\ F'(\infty) &= 0 && \text{(afastado da linha de centro a velocidade decai p/ 0)} \\ F''(0) &= 0 && \text{(velocidade é máxima na linha de centro)} \end{aligned} \quad (74)$$

Sendo um diferencial perfeito o segundo termo da Eq. (73), ela pode ser reescrita na forma:

$$\frac{d}{d\eta} [F' + a(\eta F'')] = 0. \quad (75a)$$

Integrando-se uma vez em η a Eq. (75a) e reconhecendo que $F''(0)=0$ então a equação da quantidade de movimento passa a ser:

² $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Tanh}^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$

$$F'' + a(\eta F') = 0, \quad (75b)$$

cuja solução ⁽³⁾ é

$$F' = \text{Exp}\left(-\eta^2 \frac{a}{2}\right) \quad (75c)$$

onde a constante 'a', Eq. (75a) é definida em função da largura da esteira e do déficit de velocidade na linha de centro:

$$a = \frac{U_\infty \delta'}{\chi \Delta U_c}. \quad (76)$$

A determinação da constante χ , da largura da esteira δ e do déficit de velocidade na linha de centro é realizada com ajuda da restrição imposta pela conservação integral da quantidade de movimento, Eq. (18) e de medidas experimentais. A força de arrasto por unidade de largura do corpo 2D e o perfil de velocidades estão relacionados na integral definida Eq. (18):

$$D = \rho U_\infty \delta \Delta U_c \lambda,$$

onde a constante λ é dada por ⁽⁴⁾ $\lambda = \sqrt{2\pi/a}$. As medidas experimentais para a abertura da esteira mostram que:

$$\delta(x) = 0.805 \cdot \sqrt{\frac{Dx}{\rho U_\infty^2}},$$

e a constante χ é determinada de forma que ela produza o melhor ajuste aos dados experimentais do perfil médio de velocidades. Fazendo-se as necessárias substituições chega-se a:

$$\begin{aligned} \chi &= 0.0836 & a &= 7.76 \\ \frac{U_d}{\Delta U_c} &= \text{Exp}\left(-3.88 \cdot \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right) \\ \delta(x) &= 0.805 \sqrt{\frac{Dx}{\rho U_\infty^2}} = \\ \frac{\Delta U_c}{U_\infty} &= 1.38 \sqrt{\frac{D}{\rho x}} \end{aligned} \quad (77)$$

4.3 Camadas de Mistura

Em escoamentos de duas camadas de fluido que se misturam a velocidade de referência do escoamento é constante e a Eq. (65) tem sua forma simplificada para:

$$F''' = -\frac{\delta'}{\chi} F F'' \quad (78)$$

e sujeita às condições de contorno definidas na Eq. (61). Uma vez que a largura da esteira varia linearmente com 'x' o parâmetro do lado direito da Eq. (78) é uma

³ Defina $Z=F' \rightarrow Z'+a\eta Z=0$, isolando Z vem que: $dZ/Z = -a\eta d\eta$ que após integração $\text{Ln}(Z)=a\eta^2/2+C$

⁴ $\lambda = 2 \int_0^\infty F'(\eta) d\eta = 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \text{erf}(\infty) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$

constante de forma que a transformação de similaridade foi bem sucedida. A Eq. (78), por sua vez, não tem solução analítica conhecida requerendo portanto uma integração numérica. No entanto, a solução pode ser aproximada uma curva ajustada a solução numérica que é dada em função de:

$$U = \frac{(U_{\max} - U_{\min})}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\sigma \frac{y}{x} \right) \right] \quad (79)$$

onde o parâmetro σ que melhor se ajusta aos dados experimentais é $\sigma = 13.5$.

5.0 Estimativas das Grandezas Turbulentas

Serão desenvolvidas estimativas das propriedades turbulentas dos escoamentos com ausência de parede a partir dos modelos algébricos desenvolvidos. Uma das grandes diferenças entre os modelos propostos reside na definição da viscosidade turbulenta e suas consequências. Para o modelo de comprimento de mistura,

$$\nu_T = \ell^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|$$

enquanto que para o modelo de Prandtl-Reichardt

$$\nu_T = \chi \delta (U_{\max} - U_{\min}).$$

O modelo de comprimento de mistura apresenta uma viscosidade que varia na direção transversal e paralela ao escoamento enquanto que o modelo de Prandtl-Reichardt a viscosidade só varia na direção axial assumindo um valor constante na direção transversal. As consequências disto ocorrem que na linha de centro $dU/dy = 0$ e a difusão turbulenta do modelo de comprimento de mistura é nula mas o mesmo não ocorre para o modelo de Prandtl-Reichardt. De fato não se espera que a difusão turbulenta seja nula na linha de centro. Decorre então que este modelo não se aplica para problemas de difusão (massa, calor, k , etc) pois os fluxos destas quantidades estão impedidos de cruzar um lado da camada a outra uma vez que a difusão é nula no centro!

A tensão turbulenta é determinada, para ambos os modelos, com o auxílio da viscosidade turbulenta:

$$\overline{u'v'} = \frac{\tau_T}{\rho} = \nu_T \frac{dU}{dy}.$$

A energia cinética do escoamento também pode ser estimada a partir da tensão turbulenta,

$$k = \alpha \overline{u'v'}, \quad (80)$$

onde a constante de proporcionalidade vêm dos dados experimentais, $\alpha \cong 0.09$.

Os parâmetros turbulentos: energia cinética, tensão turbulenta, velocidade da linha de centro, largura da camada limite e viscosidade turbulenta para o escoamento numa esteira de um corpo 2D são apresentados para o modelo de comprimento de mistura na Fig. abaixo.

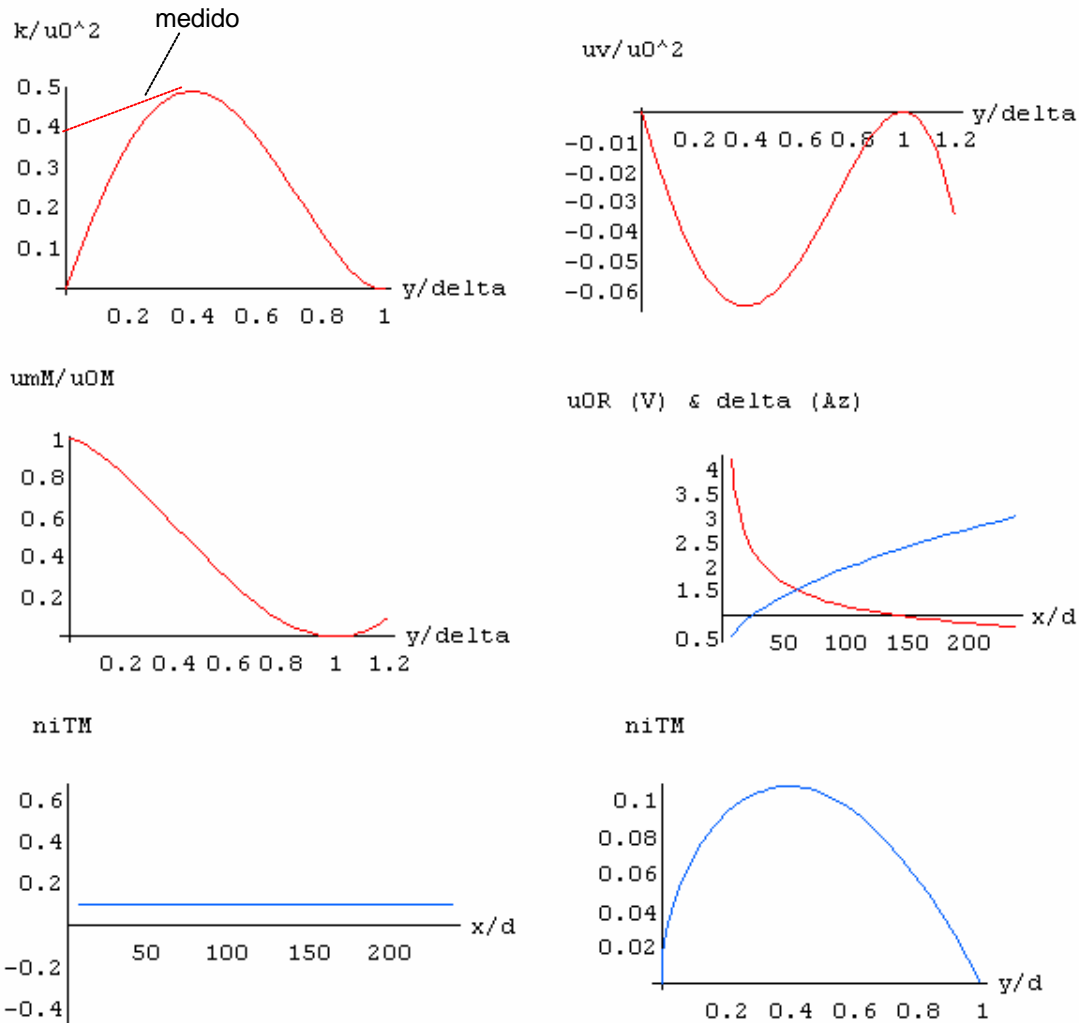


Fig. 3 Resultados do modelo de comprimento de mistura para o escoamento numa esteira de corpo 2D: velocidade média, energia cinética turbulenta, tensão turbulenta e viscosidade turbulenta. U_0 é o déficit de velocidade na linha de centro

A aproximação da energia cinética, Eq. (80) não é válida próxima a linha de centro pois nesta região $u'v' = 0$ enquanto que k não deve ser. Aparte desta observação toma-se como razoável a aproximação para k após atingir o seu máximo, isto é, para $y/\delta > 0.4$. A tensão turbulenta é nula na linha de centro, atinge um máximo e depois decai para zero quando $y \rightarrow \delta$. Modelos mais precisos incorporam efeitos da intermitência e produzem melhores resultados nesta região quando comparados aos modelos algébricos apresentados. Na sequência do conjunto de figuras é mostrado o perfil de velocidades, a velocidade na linha de centro e a largura da esteira. Finalmente as duas últimas figuras mostram como varia a viscosidade turbulenta na direção paralela ao escoamento (x/d) e transversal (y/δ). Observa-se que o modelo de comprimento de mistura produz uma viscosidade turbulenta constante com na direção paralela ao escoamento. Isto também acontece com o modelo de Prandtl. Entretanto para regiões muito afastadas da origem, espera-se que o escoamento turbulento se relaminarize. Nesta região as tensões de origem viscosa (laminar) passam a ser também importantes e os presentes modelos não se aplicam.

Adicionalmente a estes parâmetros turbulentos que caracterizam o escoamento pode-se também realizar um balanço dos mecanismos de produção, dissipação, transporte e destruição da energia cinética turbulenta. A equação da energia cinética turbulenta, k , é aproximada de forma similar à equação de quantidade de movimento, Eq. (51),

$$U_\infty \frac{dk}{dx} = -u'v' \frac{dU}{dy} - \varepsilon - \frac{d}{dy} \left[v' \left(\frac{1}{2} k + \frac{p'}{\rho} \right) \right]. \quad (81)$$

Uma aproximação grosseira de cada termo de transporte de k é dada na Eq. (82):

$$\begin{aligned} \text{(Convecção)} \quad &\rightarrow U_\infty \frac{dk}{dx} \cong \alpha U_\infty \frac{d}{dx} (\overline{u'v'}) = \alpha U_\infty \frac{d}{dx} \left(v_T \frac{dU}{dy} \right) \\ \text{(Produção)} \quad &\rightarrow -u'v' \frac{dU}{dy} = v_T \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 \\ \text{(Difusão)} \quad &\rightarrow \frac{d}{dy} \left[v' \left(\frac{1}{2} k + \frac{p'}{\rho} \right) \right] \cong \frac{d}{dy} \left(v_T \frac{dk}{dy} \right) \end{aligned} \quad (82)$$

finalmente o termo de dissipação é estimado como a diferença da soma algébrica dos demais termos. A figura mostra as estimativas de cada termo da equação de transporte de k obtidos para o modelo de viscosidade turbulenta de Prandtl.

k balanço

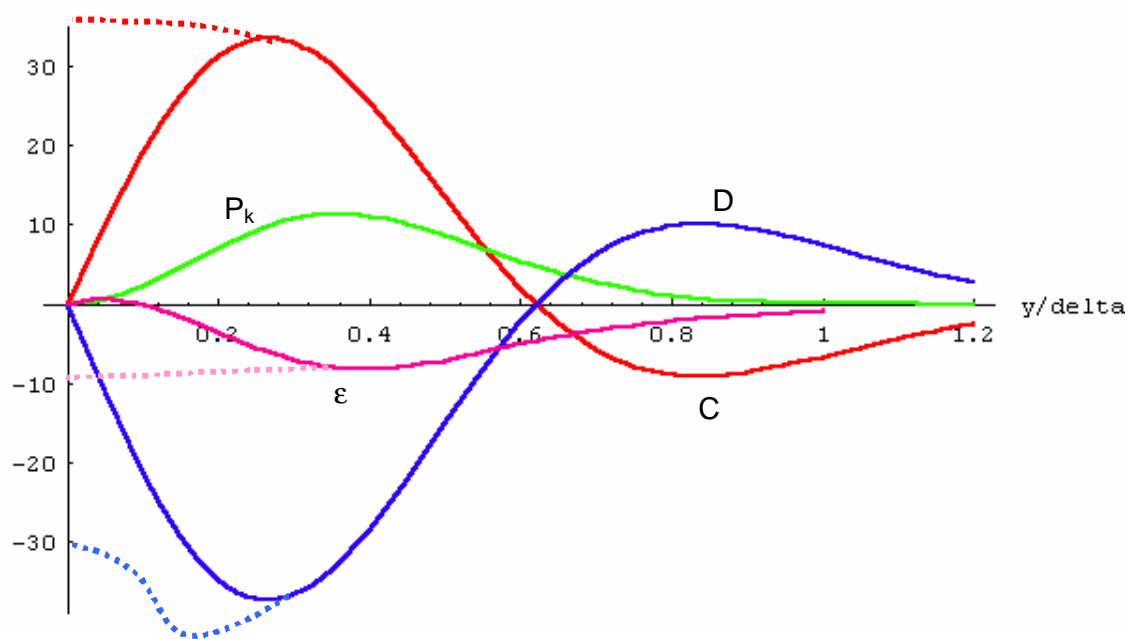


Fig. xx – Estimativas dos termos de transporte da energia cinética turbulenta na esteira de um corpo 2D, modelo de viscosidade turbulenta de Prandtl.

As linhas pontilhadas são extrapolações não reproduzidas pelo modelo que porém estão baseadas em observações experimentais. Os resultados do modelo estão representados pelas linhas contínuas. A figura é uma boa representação qualitativa do balanço de energia na esteira. Diferenças ocorrem próximo a camada externa da

esteira devido a intermitência. O balanço dos termos sugere que na região externa da esteira, $y/\delta > 0.6$, a difusão turbulenta traz energia cinética do centro da esteira que por sua vez é removido por convecção. A remoção ocorre porque a fronteira da esteira está se propagando no ambiente de fluido não perturbado. Próximo ao centro da esteira a produção torna-se relevante e é aproximadamente balanceada pela dissipação. Nesta região central há um máximo de produção de k o qual é em parte transportado por convecção (paralelo ao escoamento), transportado por difusão (transversalmente ao escoamento) em direção as camadas mais externas e dissipado localmente.

6.0 Referências

- [1] Tennekes, H. and Lumley, J.L.; "A First Course in Turbulence", MIT Press, 1972
- [2] Wilcox, D.; "Turbulence Modeling for CFD", 1998.
- [3] Schlichting, H.; "Boundary Layer Theory", McGraw Hill, 1962