MULTLAB UNICAMP

Modelo Algébrico

de Cebeci e Smith

MULTLAB UNICAMP

Modelo de Cebeci & Smith (I)

- **O modelo de Cebeci e Smith (1967) é um modelo de duas camadas com ν_T dado por expressões distintas para cada camada. A viscosidade turbulenta é:**

$$\nu_T = \nu_{Ti}, \qquad y \le y_m$$

$$\nu_T = \nu_{To}, \qquad y > y_m$$

- **onde y_m é o menor valor de y para o qual $\nu_{Ti} = \nu_{T0}$. Os valores de ν_T para a camada interna, ν_{Ti} e para a camada ext. ν_{To}, são:**

- **Camada Interna**

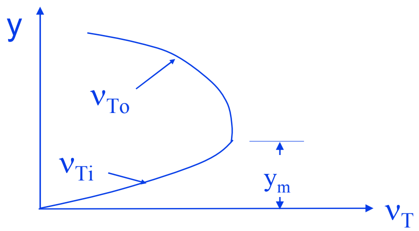
$$\nu_{Ti} = \ell_{mix}^2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\ell_{mix} = \kappa y \left[1 - \mathrm{Exp}\left(-\frac{y^+}{A^+} \right) \right]$$

- **Camada Externa** $\nu_{To} = \alpha \cdot U_e \cdot \delta^* \cdot F_{Kleb}(y;\delta)$

onde δ^* é a espessura de deslocamento da C.L. definida por:. $\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{U}{U_e} \right) dy$

Modelo de Cebeci & Smith (III)



Representação do perfil da viscosidade turbulenta, típico de uma camada limite turbulenta, a partir da representação de ν_{Ti} válida de $0 < y < y_m$ e ν_{To} para $y > y_m$.

Modelo de Cebeci & Smith (II)

•Coeficientes de fechamento:

$$\kappa = 0.40, \qquad \alpha = 0.0168, \qquad A^+ = 26\left[1 + y\frac{dP/dx}{\rho u_\tau^2}\right]^{-1/2}$$

• O coef. A+ difere do valor de van Driest para melhorar a capacidade do modelo em C.L. com grad. pressão não nulos.

• Entretanto, o valor proposto por van Driest p/ A+ deve ser usado em escoamentos p/ dutos, caso contrário a constante será imaginária.

$$A^+ = 26\left[1 + a.b\frac{\nu \cdot dP/dx}{\rho u_\tau^3}\right]^{-1}$$

$$a = 7.1, \;\; b = 2.9 \;\text{se}\; p^+ > 0 \;\text{e}\; b = 4.25 \;\text{se}\; p^+ < 0$$

• O modelo é válido para escoamentos 2D.

•Detalhes modificações no modelo para: transf. de massa, curvatura, rugosidade, baixo Reynolds ou mesmo extensão para 3D são mostradas no livro sobre o modelo de Cebeci e Smith .

IM – 450 '*Modelagem em Turbulência*' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP

MULTLAB

Modelo de Cebeci & Smith (IV)

UNICAMP

• Para escoamentos turbulentos com elevados Re tipicamente o casamento entre as camadas ocorre dento da faixa representada pela lei log. Uma estimativa p/ y_m segue:

• Camada Interna: $dU/dy \approx u_\tau/(\kappa y)$ (lei log), então:

$$\nu_{Ti} \approx (\kappa y)^2 \frac{u_\tau}{\kappa y} = (\kappa y) u_\tau = \kappa \nu y^+$$

•Camada Externa: $ym/\delta << 1$ de maneira Fkleb =1

$$\nu_{To} \approx \alpha U_e \delta^* = \alpha \nu \, Re_{\delta^*}$$

•Igualando-se ν_{Ti} e ν_{To} encontra-se:

$$y_m^+ \approx \frac{\alpha}{\kappa} Re_{\delta^*} = 0.042 \cdot Re_{\delta^*}$$

• Assumindo p/ uma C.L. típica, $Re_{\delta^*} \cong 10^4$, encontra-se que $y^+_m = 420$.

MULTLAB

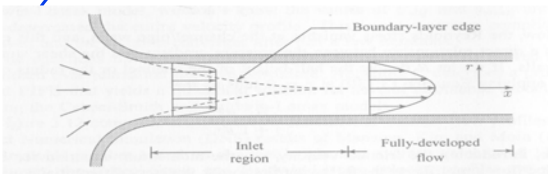
UNICAMP

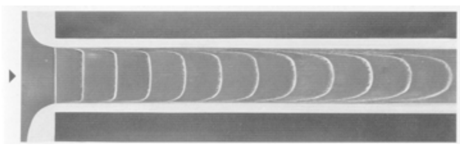
Aplicações do Modelo Algébrico

Escoamentos em Canais e Tubulações

IM – 450 '*Modelagem em Turbulência*' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP

Escoamentos Desenvolvidos em Dutos





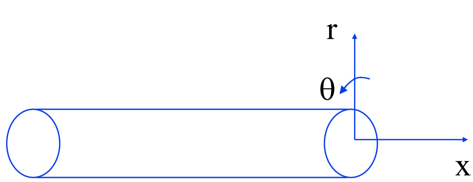
- Escoamentos hidrodinâmicamente desenvolvidos não apresentam variações na direção principal, i.e., $d\phi/dz = 0$;
- Isto implica em dizer que o perfil de velocidades deixa de variar na direção z!
- O comprimento necessário para o desenvolvimento, ℓ_e , é estimado (Schlichiting)

$$\frac{\ell_e}{D} = 4.4 Re_D^{1/6}$$

- onde ReD é o n. Reynolds baseado no diâmetro do tubo (ou na metade da altura do canal). O comprimento de entrada num tubo com $Re_D = 10^5$ é de 30 diâmetros livres.

Escoamento Desenvolvido em Tubos Circulares

- **Escoamentos completamente desenvolvido em tubos apresentam V = 0 e W =0. Além disto, há simetria azimutal de tal forma que d/dθ = 0.**



- **As velocidades correspondentes às direções (x, r , θ) são: (U, V , W). O raio do tubo é 'a'.**

Escoamento Desenvolvido em Tubos Circulares

- O campo de velocidade é independente da coordenada θ. As equações de quantidade de movimento são:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu r \frac{\partial U}{\partial r} - r\overline{uv}\right)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{vv}\right) + \frac{\overline{w^2}}{r}$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\overline{vw}\right) - \frac{2\overline{vw}}{r}$$

- Integrando a última equação em r, sabendo que vw = 0 na parede, r=a, então vw = 0 em todo domínio. Neste caso as eq. de Reynolds para escoamento em tubulação se reduzem para:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu r \frac{\partial U}{\partial r} - r\overline{uv}\right)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{vv}\right) + \frac{\overline{w^2}}{r}$$

Escoamento Desenvolvido em Tubos Circulares

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu r \frac{\partial U}{\partial r} - r\overline{uv}\right)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{vv}\right) + \frac{\overline{w^2}}{r}$$

- Diferenciando-se a equação em (r) por x, tem-se que $d^2P/drdx=0$, logo dP/dx é independente de r e o conjunto de equações pode ser integrado:

$$\frac{r^2}{2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \left(\nu r \frac{\partial U}{\partial r} - r\overline{uv}\right) + A(x)$$

$$\frac{P}{\rho} = -\overline{v^2} + \int_a^r \frac{\overline{w^2} - \overline{v^2}}{r} + B(x)$$

Escoamento Desenvolvido em Tubos Circulares

- As condições de contorno no centro do tubo (r = 0) são: $\overline{uv} = 0$ e $\dfrac{\partial U}{\partial r} = 0$

- E na parede, r = a: $\overline{uv} = \overline{vv} = 0$ e $\nu \dfrac{\partial U}{\partial r} = -u^*$ onde $u^* = \sqrt{\tau_w / \rho}$

- Para x = 0 e r = a, considere P = 0, (arbitrário) então A(x) = 0

$$\frac{r^2}{2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \left(-r\overline{uv}\right) + A(x)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{2}{a}\nu\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{2}{a}\left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)$$

- Integrando em x a distribuição de pressão fica sendo:

$$\frac{P}{\rho} = -\frac{2}{a}\left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)x + C(r)$$

Escoamento Desenvolvido em Tubos Circulares

- Das equações: $\dfrac{P}{\rho} = -\overline{v^2} + \displaystyle\int_a^r \frac{\overline{w^2} - \overline{v^2}}{r} + B(x)$ e $\dfrac{P(x)}{\rho} = -\dfrac{2}{a}\left(\dfrac{\tau_w}{\rho}\right)x + C(r)$

- Encontra-se que B(x) é: $B(x) = -\dfrac{2}{a}\left(\dfrac{\tau_w}{\rho}\right)x$

- Neste caso as equações da quantidade de movimento para as direções (x) e (r) se reduzem para:

$$\overline{uv} = \nu\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{r}{a}\left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)$$

$$\frac{P}{\rho} + \frac{2}{a}\left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)x = -\overline{v^2} + \int_a^r \frac{\overline{w^2} - \overline{v^2}}{r}dr$$

Escoamento Desenvolvido em Tubos Circulares

$$\overline{uv} = \nu \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{r}{a}\left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)$$

- **A soma das tensões turbulenta e laminar é constante.**
- **Obtendo-se experimentalmente o gradiente médio de velocidades e a tensão na parede pode-se determinar uv.**
- **Este método é uma das maneiras de se checar o procedimento de determinação de uv.**

$$\frac{P}{\rho} + \frac{2}{a}\left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)x = -\overline{v^2} + \int_a^r \frac{\overline{w^2} - \overline{v^2}}{r}\,dr$$

- **A pressão estática varia linearmente com x.**
- **A diferença entre a pressão estática e o atrito na parede não é zero. Existe uma parcela de pressão devido as flutuações de velocidade.**

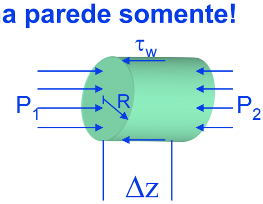
Consequências do Escoamento Desenvolvido (I)

- **Eq. da massa, r coordenada. do centro do canal/tubo (j = 0 ou 1)**

$$\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{r^j}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^j V\right] = 0$$

- **Como dW/dz = 0, desenvolvido, então d(r^jV)/dr = 0 ou r^jV = constante! Mas como na parede V = 0 (sem injeção ou sução), V = 0 em todo domínio.**
- **A velocidade W é uma função de r somente!**
- **Pode-se então concluir que os termos inerciais são nulos para o escoamento desenvolvido.**
- **A gradiente de pressão equilibra as tensões na parede somente!**
- **O balanço de forças se reduz para:**

$$\Delta P_{1,2} \cdot A_T = \tau_w \cdot P \cdot \Delta z$$



- **Onde A_T, P referem-se a área transversal ao escoamento e ao perímetro onde τ_w atua.**

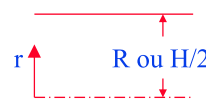
MULTLAB

UNICAMP

Equação p/ Escoamento Desenvolvido (I)

- **Eq. da quantidade de movimento é simplificada para:**

$$0 = -\frac{dP}{dz} + \frac{1}{r^j}\frac{d}{dr}\left[r^j \tau\right] \quad \text{onde} \quad \tau = \mu \frac{dW}{dr} + \rho \overline{v'w'}$$

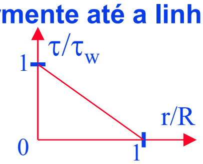


- **Como o grad. Pressão é constante, o termo de tensão será linear com a distância da parede e portanto, após integração obtem-se:**

$$\tau(r) = \frac{r}{j+1}\cdot\frac{dP}{dz} + C \rightarrow \underbrace{\tau(R) = \tau_W = \frac{R}{j+1}\cdot\frac{dP}{dz}}_{\text{Balanço Força}} \rightarrow C = \tau_W - \frac{R}{j+1}\cdot\frac{dP}{dz}$$

- **Pode-se estabelecer uma relação direta entre o grad pressão e τ_w. Tomando por R o raio do tubo ou 1/2 altura do canal, e considerando o fato de serem perfis simétricos, a tensão varia linearmente até a linha de centro do canal:**

$$\frac{\tau}{\tau_w} = 1 - \frac{(R-r)}{R}$$



MULTLAB

UNICAMP

Equação p/ Escoamento Desenvolvido (II)

- **Definindo y como a distância da parede, y = R - r, e representando a tensão de Reynolds em termos da viscosidade turbulenta,**

$$-\rho\overline{w'v'} = \mu_T \frac{dW}{dy}$$

- **A distribuição linear da tensão, em termos do campo médio de velocidades é dada por:**

$$(\mu + \mu_T)\frac{dW}{dy} = \rho u_\tau^2\left(1 - \frac{y}{R}\right)$$

- **Introduzindo as coordenadas internas, W^+ e y^+, assim como $\mu_T^+ = \mu_T/\mu$, a forma adimensional para a eq quantidade de movimento fica sendo:**

$$\left(1 + \mu_T^+\right)\frac{dW^+}{dy^+} = \left(1 - \frac{y^+}{R^+}\right) \quad \text{onde} \quad R^+ = \frac{u_\tau R}{\nu}$$

Equação p/ Escoamento Desenvolvido (III)

Eq. movimento necessita de uma c.c., na parede do tubo/canal não há deslizamento:

$$W^+(0) = 0$$

• para modelos que trabalham na camada interna (Van Driest), usualmente coloca-se:

$$W^+ = y^+, \quad p/ \;\; 1 < y^+ < 5,$$

• para modelos que trabalham a partir da região logarítimica, y+ > 30, usualmente coloca-se:

$$W^+ = \frac{1}{\kappa} Ln\left(y^+\right) + B, \quad p/ \;\; 30 < y+ < 200,$$

EXEMPLO: Const. Lei Log (I)

Utilizando o modelo de comprimento de mistura determine o valor da constante B na lei de parede, isto é, resolva a equação:

$$\left(1 + \mu^+\right)\frac{dU^+}{dy^+} = 1$$

Integre de $y^+ = 1$ a $y^+ = 500$ e calcule o valor limite da constante B examinando:

$$B = U^+ - \frac{1}{\kappa} Ln\left(y^+\right)$$

a medida que o limite superior da integral varia de acordo com os valores indicados: $y^+ = 250, 300, 350, 400, 450, 500$

MULTLAB UNICAMP

EXEMPLO: Const. Lei Log (II)

LISTAGEM DO MATHEMATICA

```
k=0.41;                                   (*Von Karman constante*)
VanDriest1[yp_]=1-Exp[-yp/26];            (*Fator Van Driest*)
lmixp[yp_]=k*yp*(VanDriest1[yp])^1;       (*comp. mistura*)
(* expoente (1) ativa VanDriest, (0) compr. mistura Prandtl*)

uwall[yp_]=N[(1/k)*Log[yp]+5.0];          (* lei log p/ referência*)
eqwallmixL=up'[yp]-((1+4*(lmixp[yp])^2)^0.5-1)/(2*(lmixp[yp])^2);

ypiniL=1;
ypinfL=500;
N[uwall[ypiniL]]

gL[yinfL_]:=NDSolve[{eqwallmixL==0, up[ypiniL]==1},up,
{yp,ypiniL,ypinfL}]
UPL[yp_]:=up[yp]/.gL[ypinfL][[1,1]]
c[yp_]:=N[UPL[yp]-(1/k)*Log[yp]]
```


MULTLAB UNICAMP

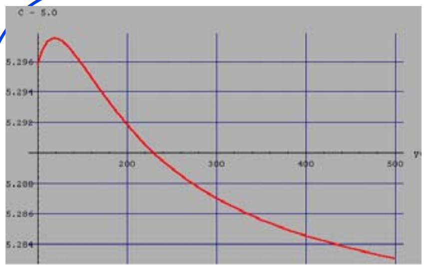
EXEMPLO: Const. Lei Log (II)

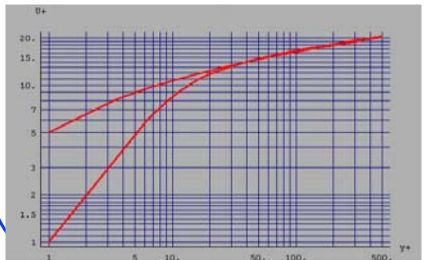
LISTAGEM DO MATHEMATICA (saída gráfica)

```
LogLogPlot[{UPL[x],uwall[x]},{x,ypiniL,500},PlotRange->All,
        AxesLabel->{"y+","U+"},
        PlotStyle->Hue[0],GridLines->Automatic,
        Background->GrayLevel[0.7]];

Plot[{c[x]},{x,100,500},PlotRange->All,
        AxesLabel->{"y+","C ~ 5.0"},
        PlotStyle->Hue[0],GridLines->Automatic,
        Background->GrayLevel[0.7]];
```

EXEMPLO: Const. Lei Log (III)





Y^+	B (s/ Van Driest)	B (c/ Van Driest)
250	-1.221	5.289
300	-1.223	5.287
350	-1.224	5.286
400	-1.225	5.285
450	-1.226	5.284
500	-1.227	5.283

EXEMPLO: Escoamento Tubo (I)

Encontre uma solução para o escoamento em um tubo utilizando o modelo de comprimento de mistura com o comprimento de mistura nas camadas interna e externa dados por:

$$\ell_{mix} = \begin{cases} \kappa y\left[1 - e^{-y^+/26}\right] & \text{camada interna} \\ 0.09R & \text{camada externa} \end{cases}$$

onde R é o raio do tubo. Utilize um esquema numérico de integração (Runge-Kutta). Compare o fator de atrito calculado por meio da relação:

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = 4\mathrm{Log}_{10}\left(2\mathrm{Re}_D\sqrt{C_f}\right) - 1.6$$

onde Cf e ReD são baseados na velocidade média na seção transversal do tubo. Compare também com o perfil de velocidades dos dados de Laufer para ReD = 40000

Y/(D/2)	0.010	0.095	0.210	0.280	0.390	0.490	0.590	0.690	0.800	0.900	1.000
U/Um	0.333	0.696	0.789	0.833	0.868	0.902	0.931	0.961	0.975	0.990	1.000

EXEMPLO: Escoamento Tubo Equacionamento

Substituindo o modelo de comp. de mistura para a μ_T na equação da quantidade de movimento, chega-se a expressão para o gradiente de velocidades:

$$\left(1+\underbrace{\left(\ell^+_{mix}\right)^2\cdot\frac{dW^+}{dy^+}}_{\mu^+_T}\right)\cdot\frac{dW^+}{dy^+}=\left(1-\frac{y^+}{R^+}\right)\quad\rightarrow\quad\frac{dW^+}{dy^+}=\frac{\sqrt{1+4\cdot\left(1-y^+/R^+\right)\cdot\left(\ell^+_{mix}\right)^2}-1}{2\left(\ell^+_{mix}\right)^2}$$

onde a raiz que corresponde a $dW^+/dy^+ < 0$ foi rejeitada. A velocidade média, em termos da variável interna:

$$W_{avg}=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R w(r)\cdot 2\cdot\pi\cdot r\cdot dr=\frac{2}{R}\int_0^R w(y)\cdot\left(1-\frac{y}{R}\right)\cdot dy\quad\rightarrow\quad W^+_{avg}=\frac{2}{R^+}\int_0^{R^+} w^+\left(y^+\right)\left(1-\frac{y^+}{R^+}\right)dy^+$$

O número de Reynolds do escoamento e o coeficiente de atrito em termos das variáveis internas são expressos por:

$$Re_D=\frac{W_{avg}D}{\nu}=2\frac{W_{avg}R}{\nu}=2\cdot W^+_{avg}R^+$$

$$C_f=\frac{\tau_W}{\frac{1}{2}\rho W^2_{avg}}=2\frac{u^2_\tau}{W^2_{avg}}=\frac{2}{\left(W^+_{avg}\right)^2}$$

MULTLAB UNICAMP

EXEMPLO: Escoamento Tubo Algorítmo

Define limites integração:
$y^+ = y^+_{ini}$ & $y^+ = R^+$ (valor arbitrado)

Realizar Integração Numérica

$$y^+_{ini} < 5 \quad \rightarrow W^+ = y^+_{ini}$$

$$20 < y^+_{ini} < 200 \rightarrow W^+ = \frac{1}{\kappa}Ln\left(y^+_{ini}\right)+B$$

$$W^+=\int_{y^+_{ini}}^{y^+}\frac{\sqrt{1+4\cdot\left(1-\xi^+/R^+\right)\cdot\left(\ell^+_{mix}\right)^2}-1}{2\left(\ell^+_{mix}\right)^2}d\xi+W^+\left(y^+_{ini}\right)$$

Calcular Velocidade Média

$$W^+_{avg}=\frac{2}{R^+}\int_0^{R^+} w^+\left(y^+\right)\left(1-\frac{y^+}{R^+}\right)dy^+$$

Calcular Re_D , C_f , ν^+_T, τ^+

$$Re_D=2\cdot W^+_{avg}R^+$$

$$C_f=\frac{2}{\left(W^+_{avg}\right)^2}$$

$$\nu^+_T=\frac{\nu_T}{\nu}=\left(\ell^+_{mix}\right)^2\cdot\frac{dW^+}{dy^+}$$

$$\tau^+_T=\frac{\tau_T/\rho}{u_\tau}=\left(\ell^+_{mix}\right)^2\cdot\left(\frac{dW^+}{dy^+}\right)^2$$

EXEMPLO: Escoamento Tubo (II)

MULTLAB UNICAMP

LISTAGEM DO MATHEMATICA

```
Remove["Global`*"]
k=0.41;                                        (*Von Karman constante*)
rp=1100;                                      (*Raio adimensional Tubo*)
VanDriest1[yp_]=1-Exp[-yp/26];                 (*Fator Van Driest*)
lmixI[yp_]=k*yp*(VanDriest1[yp]);
lmixO[yp_]=0.09*rp;
lmixp[yp_]=If[lmixI[yp]<lmixO[yp],lmixI[yp],lmixO[yp]];   (*comp. mistura*)

eq1=up'[yp]-((1+4*(lmixp[yp])^2*(1-yp/rp))^0.5-1)/(2*(lmixp[yp])^2);
g1[rp_]:=NDSolve[{eq1==0, up[1]==1},up,{yp,1,rp}]

UPL:=g1[rp][[1,1,2]]
niTp[yp_]:=N[lmixp[yp]^2]*UPL'[yp]
taup[yp_]:=N[lmixp[yp]^2]*(UPL'[yp])^2
tauTp[yp_]:=(1+N[1+lmixp[yp]^2]*UPL'[yp])*UPL'[yp]*
Uavgp=(2/rp)*NIntegrate[UPL[x]*(1-x/rp),{x,1,rp}];
cf=2/(Uavgp)^2;
reD=2*rp*Uavgp;
```


EXEMPLO: Escoamento Tubo (III)

MULTLAB UNICAMP

LISTAGEM DO MATHEMATICA (saída gráfica)

```
Print["       Escoamento em Tubo de Seção Circular "]
Print["        (+) representa coordenadas internas"]
Print["  u+ = u/u*; y+=yu*/ni; r+=Ru*/ni & niT+=niT/niL "]
Print["Raio Tubo (+)       ", rp]
Print["Reynolds Tubo       ", reD]
Print["Coef. Atrito        ", cf]
Print["Vel. Média (+)      ", Uavgp]

Plot[{Evaluate[UPL[x]]},{x,1,rp},PlotRange->All,
        AxesLabel->{"y+","U+"},
        PlotStyle->Hue[0],GridLines->Automatic,
        Background->GrayLevel[0.7]];
```

EXEMPLO: Escoamento Tubo (III)

MULTLAB UNICAMP

LISTAGEM DO MATHEMATICA (saída gráfica)

```
graph1=Plot[{Evaluate[tauTp[x]]},{x,1,rp},PlotRange->All,
        AxesLabel->{"y+","tau+"},
        PlotStyle->Hue[0],GridLines->Automatic,
        Background->GrayLevel[0.7],DisplayFunction->Identity];
graph2=Plot[{Evaluate[taup[x]]},{x,1,rp},PlotRange->All,
        AxesLabel->{"y+","u'v'/u*^2"},
        PlotStyle->Hue[0.3],GridLines->Automatic,
        Background->GrayLevel[0.7],DisplayFunction->Identity];
Show[graph1,graph2,DisplayFunction->$DisplayFunction];

Plot[{Evaluate[niTp[x]]},{x,1,rp},PlotRange->All,
        AxesLabel->{"y+","niT+"},
        PlotStyle->Hue[0],GridLines->Automatic,
        Background->GrayLevel[0.7]];
```


EXEMPLO: Escoamento Tubo (IV)

MULTLAB UNICAMP

Escoamento em Tubo de Seção Circular

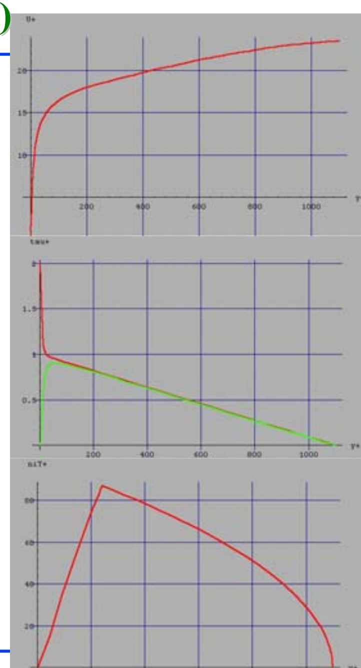
Raio Tubo (+) R^+ = 1100

Reynolds Tubo Re_D = 40922.3

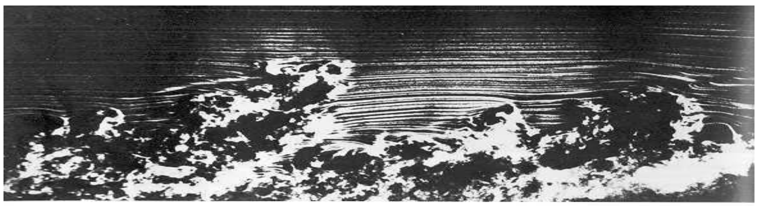
Coef. Atrito C_f = 0.00578036

Vel. Média (+) U/U_τ =18.601

Escoamento Tubo Circular		
R^+	Re_D	C_f
60	$1.09\ 10^3$	$2.41\ 10^{-2}$
100	$2.24\ 10^3$	$1.60\ 10^{-2}$
300	$8.99\ 10^3$	$8.90\ 10^{-3}$
1000	$3.67\ 10^4$	$5.94\ 10^{-3}$
2000	$8.05\ 10^4$	$4.93\ 10^{-3}$



- Aplicações do Modelo Algébrico Escoamentos de Camada Limite -



Método Diferenças Finitas p/ C.L. Turbulenta

- **Do aspecto computacional C.L. Turbulentas apresentam mais dificuldades que as C.L. Laminares: elevados gradientes de velocidades próximo à parede;**

- **Elas requerem uma malha bem refinada próximo à parede para possibilitar uma correta integração iniciando da parede (camada interna) se estendendo pela região log até à camada externa.**

- **É necessário utilizar funções de parede (lei log ou Van-Driest) para fazer a ponte entre a parede (U=0) e o campo de escoamento.**

- **Este procedimento é iterativo pois não se tem conhecimento a priori do perfil de velocidades e consequentemente de ν_T nem tão pouco do atrito na parede;**

MULTLAB UNICAMP

Equações C.L. Turbulenta - 2D

- **Equações da Camada Limite Turbulenta para escoamentos bi-dimensionais em Regime Permanente:**

Eq. Massa $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Eq. Momento x $$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\underbrace{U_e\frac{dU_e}{dx}}_{-\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}}+\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\left[\nu\frac{\partial u}{\partial y}-\overline{u'v'}\right]}_{\tau_{yx}}$$

- **Empregando a hipótese de Bousinesq, a eq. de Quantidade de Movimento em (x) pode ser expressa em termos da viscosidade efetiva, ν_{ef}**

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U_e\frac{dU_e}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\nu_{ef}\frac{\partial u}{\partial y}\right] \quad \text{onde} \quad \nu_{ef}=\nu_L+\nu_T$$

- **Métodos numéricos p/ C.L. Laminar podem ser modificados p/ C.L. Turbulenta. As diferenças surgem porque ν_{ef} não sendo constante faz surgir um termo extra**

$$\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U_e\frac{dU_e}{dx}+\nu_{ef}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{similar Eq. C.L .Laminar}}+\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial \nu_{ef}}{\partial y}}_{\text{Termo Extra: } \nu_{ef} \text{ nao const.}}$$

MULTLAB UNICAMP

Equações Discretizadas C.L. Turbulenta - 2D

- **Esquema Implícito (I) de diferenças finitas** E

$$\underbrace{\left[u_{i-1,j}\right]\cdot\left\{\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{\Delta x}\right\}+\left[v_{i-1,j}\right]\cdot\left\{\frac{u_{i-1,j+1}-u_{i-1,j-1}}{2\Delta y}\right\}=\frac{1}{2\Delta x}\left\{U_i^2-U_{i-1}^2\right\}+\nu_{i,j}\cdot\left\{\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i-1,j-1}}{2\Delta y}\right\}}_{\text{Discretizaçao coincidente com caso Laminar, porem } \nu \text{ nao e constante mas varia com gradiente de velocidade!}}$$

$$+\underbrace{\left\{\frac{u_{i-1,j+1}-u_{i-1,j-1}}{2\Delta y}\right\}\cdot\left\{\frac{\nu_{i-1,j+1}-\nu_{i-1,j-1}}{2\Delta y}\right\}}_{\text{Termo Extra}}$$

- **Sistema Tridiagonal de Equações Lineares acopladas:**

$$-\alpha(\nu)\cdot\left[u_{i,j+1}\right]+\left[1+2\alpha(\nu)\right]\cdot\left[u_{i,j}\right]-\alpha(\nu)\cdot\left[u_{i,j-1}\right]=S_{i,j}$$

- **Termo Fonte do sistema de equações:**

$$S_{i,j}=\frac{1}{2\Delta x}\left\{U_i^2-U_{i-1}^2\right\}+(\beta+\chi)\cdot\left[u_{i-1,j+1}-u_{i-1,j-1}\right]$$

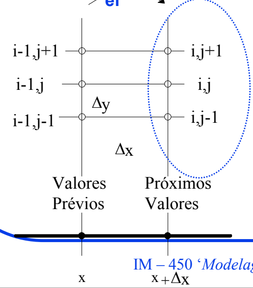
- **Coeficientes dos elementos do sistema de equações**

$$\alpha(\nu)=\left\{\frac{\nu_{i,j}\Delta x}{u_{i-1,j}(\Delta y)^2}\right\} \qquad \beta=\left\{\frac{\Delta x}{2u_{i-1,j}\Delta y}\right\} \qquad \chi(\nu)=\left\{\frac{\Delta x}{u_{i-1,j}}\right\}\cdot\left\{\frac{\nu_{i-1,j+1}-\nu_{i-1,j-1}}{4(\Delta y)^2}\right\}$$

Algoritimo de Cálculo C.L. Turbulenta - 2D

MULTLAB | UNICAMP

- O sistema de equações lineares requer uma solução iterativa por não se ter conhecimento, a priori, dos valores que ν_{ef} assume no plano (i).
- O parâmetro β depende dos valores obtidos em (i-1) porém os parâmetros α e χ dependem do perfil de velocidades em (i) para determinar ν_{ef} .



Calcula S, α, β e χ com os valores de u^o no plano (i)

Resolve sistema e determina u^n no plano (i)

$$-\alpha(\nu)\left[u_{i,j+1}\right]+\left[1+2\alpha(\nu)\right]\left[u_{i,j}\right]-\alpha(\nu)\left[u_{i,j-1}\right]=S_{i.j}$$

$|u^n - u^o|$

< tol: Plano (i+1)

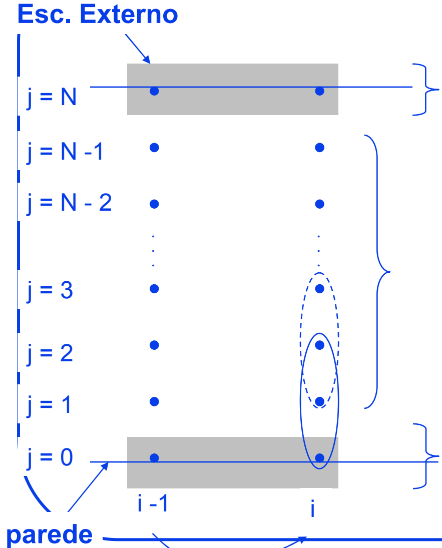
> tol: $u^o = u^n$

Com valores u^n determinar os parâmetros: S, α, β, χ e ν_{ef}

Molécula Computacional

MULTLAB | UNICAMP

$$-\alpha(\nu)\left[u_{i,j+1}\right]+\left[1+2\alpha(\nu)\right]\left[u_{i,j}\right]-\alpha(\nu)\left[u_{i,j-1}\right]=S_{i.j}$$



Condição contorno externa: a velocidade no último nó não é resolvida, mas é conhecida e igual a vel escoamento externo: u(i,N) = Ue

Nós interiores são determinados pela solução do sistema de equações lineares. A solução do plano (i) depende dos valores que os nós das extremidades assumem e do fonte S definido em termos dos valores no plano (i-1). Isto define o processo de marcha característico de sistemas parabólicos.

Condição contorno parede: a velocidade na parede é conhecida (u = 0, não deslizamento) e o modelo utiliza Van Driest ou a lei log ($u = (u_\tau/k)\ln y^+ + B$) e o 1 nó fica ‘deslocado’ da parede de y^+.

Modelo de ν_{ef} Cebeci-Smith C.L. Turbulenta - 2D (I)

MULTLAB UNICAMP

• **Trata-se de um modelo de duas camadas. y_m é definido quanto a viscosidade turbulenta da camada externa ν^{TO} fica igual a da camada interna, ν^{TI}:**

$$\nu_T = \nu^{Ti} \rightarrow y < y_m$$

$$\nu_T = \nu^{To} \rightarrow y > y_m$$

• **Modelo da camada interna**:

$$\nu_{i,j}^{Ti} = \ell_{mix}^2 \frac{\partial u}{\partial y} = \ell_{i,j}^2 \cdot \left\{ \frac{u_{i,j+1}^o - u_{i,j-1}^o}{2\Delta y} \right\}$$

$$(u_\tau)_i = \sqrt{\nu \frac{u_{i,1}^o}{y_{i,1}}}$$

$$y_{i,j}^+ = \frac{y_{i,j} \cdot (u_\tau)_i}{\nu}$$

$$\ell_{i,j} = \kappa \cdot y_j \cdot \left\{ 1 - \mathrm{Exp}\left({y_{i,j}^+}/{A^+} \right) \right\}$$

$$A^+ = 26 \cdot \left[1 + y_{i,j} \frac{\left({dP}/{dx} \right)_i}{(u_\tau)_i} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Modelo de ν_{ef} Cebeci-Smith C.L. Turbulenta - 2D (II)

MULTLAB UNICAMP

• **Modelo da camada externa:**

$$\nu_{i,j}^{To} = \alpha \cdot U_e \cdot \delta^* \cdot F_{Kleb}(y,\delta)$$

$$\delta_i^* = \int_0^{\delta_i} \left(1 - \frac{u^o}{(U_e)_i} \right) dy$$

$$F_{Kleb}(y,\delta) = \frac{1}{\left[1 + 5.5 \left(\frac{y}{\delta_i} \right)^6 \right]}$$

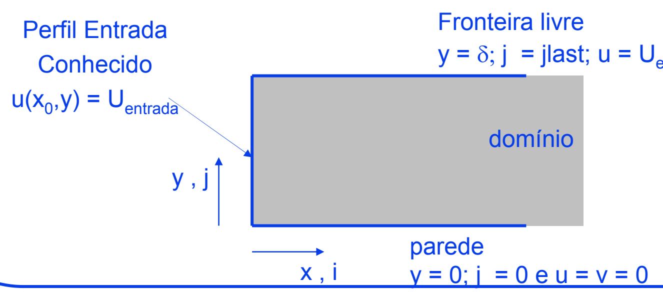
Espessura da C.L., δ_i, é definida de modo arbitrário. Usualmente é a distância da parede onde $u^o = 0.99U_e$

IM – 450 '*Modelagem em Turbulência*' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP

MULTLAB UNICAMP

Condições de Contorno C.L. Turbulenta - 2D (I)

- A equação da quantidade de movimento e da massa requerem quatro condições de contorno para serem satisfeitas:
- $u(x_0,y) = u_{0,j}$ = perfil conhecido
- $u(x,0) = u_{i,0} = 0$ (não deslizamento ou $u_i = u_\tau/k^*Ln(y^+)+B$)
- $v(x,0) = v_{i,0} = 0$ (sem injeção ou sucção massa)
- $u(x,\delta) = u_{i,\delta} = U_e$ (casamento c/ escoamento externo)



MULTLAB UNICAMP

Condições de Contorno C.L. Turbulenta - 2D (II)

<u>$u(x_0,y) = u_{0,j}$ = perfil conhecido</u>

Existem algumas possibilidades de se estimar um perfil de velocidades para dar ´início´ ao processo de marcha do método:

- (1) Camada Limite é turbulenta a partir do bordo de ataque, isto é, em x = 0 (origem) o perfil de velocidades é uniforme igual a U_e a exceção da parede, u =0 (não deslizamento). Isto permite dizer que no plano i = 0, u =U_e a menos do nó da parede;
- (2) A camada limite se inicia laminar e transiciona após uma distância da origem para C.L. Turbulenta. O comprimento de transição pode ser estimado por relações empíricas e o perfil a montante do início da C.L. Turbulenta pode ser determinado a partir da solução da C.L. Laminar;
- (3) O perfil de início também pode ser conhecido por meio de medidas experimentais.

Condições de Contorno C.L. Turbulenta - 2D (III)

MULTLAB UNICAMP

<u>$u(x,\delta)$ = U_e (casamento c/ escoamento externo)</u>

Esta condição é imposta no último nó da grade correspondente a fronteira livre do domínio. A condição é facilmente atendida porém é necessário observar se o perfil de velocidades aproxima-se deste valor assintoticamente. Caso não seja o caso será necessário estender em y o domínio para atender esta exigência.

<u>$v(x,0)$ = 0 (sem injeção ou sucção massa)</u>

Somente uma derivada de primeira ordem em v aparece no sistema de EDP. Assim v só pode atender a uma C.C.. É natural procurar satisfazer v = 0 na parede quando esta está ausente de sucção ou injeção de massa.

Condições de Contorno C.L. Turbulenta - 2D (IV)

MULTLAB UNICAMP

<u>$u(x,0)$ = 0 (não deslizamento na parede)</u>

Esta condição é imposta no primeiro nó da grade desde que o modelo tenha capacidade de integrar a EDP a partir da parede. Isto só é possível com a correção da Van Driest. Neste caso a malha computacional deve ter pelo menos 10 nós até entre $1<y^+<20$ para que possibilite uma precisa integração na região interna. O primeiro nó coincide com a localização da parede.

Condições de Contorno C.L. Turbulenta - 2D (IV)

$u(x,y_{log}) = u_{log}$ (lei log)

Ao invés de se integrar a partir da parede pode-se deslocar o primeiro nó a uma distância $20<y^+<100$ da parede e começar a integração da EDP a partir da região log do perfil. Neste caso $u(x,y_{log}) = (u^*/k).Ln(y^+)+u^*.B$. Neste caso não é necessário empregar uma malha refinada próximo a parede o que pode representar uma substancial economia computacional.

O valor de u* é arbitrado numa primeira aproximação porém o valor de u(i,1) é calculado internamente e deve ainda permanecer dentro da região log, neste caso u* pode ser determinado pela solução da equação:

$$\underbrace{u^*\left[\frac{1}{\kappa}Ln\left(\frac{\delta\cdot u^*}{\nu}\right)+B\right]}_{\substack{j=l->y \\ ui,1\ det.\ lei\ log}}-\underbrace{u_{i,1}}_{\substack{ui,1\ det \\ solução \\ numérica}}=0 \quad \text{onde } \delta \text{ é a distância da parede do primeiro nó}$$

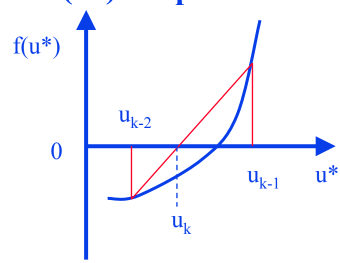
Processo Iterativo de Cálculo u* e $u_{i,1}$

- A velocidade de atrito é determinada iterativamente porque a equação não permite uma forma explícita para u*.
- O método mais usado é o método da secante. Considere f(u*) a função abaixo.

$$\underbrace{u_\tau\left[\frac{1}{\kappa}Ln\left(\frac{\delta\cdot u_\tau}{\nu}\right)+B\right]}_{j=l->y}-\underbrace{u_{i,1}}_{\substack{ui,1\ det \\ solução \\ numérica}}=f(u_\tau)$$

- O que se quer determinar é quanto f(u*) = 0 para um dado $u_{i,1}$ que veio da solução numérica:

$$u_k^* = u_{k-1}^* - f\left(u_{k-1}^*\right)\cdot\frac{\left(u_{k-1}^*-u_{k-2}^*\right)}{f\left(u_{k-1}^*\right)-f\left(u_{k-2}^*\right)}$$



Processo Iterativo de Cálculo u* e $u_{i,1}$

- **Uma vez determinado u*, é necessário varrer novamente toda linha (i= constante) a fim de determinar um novo campo de velocidades, inclusive ui,1.**
- **Com o novo valor de ui,1, repetir o processo descrito no slide anterior.**
- **Se a diferença entre as velocidade ui,1 da iteração atual e anterior for menor que uma tolerância, interromper o processo e iniciar nova coluna i.**

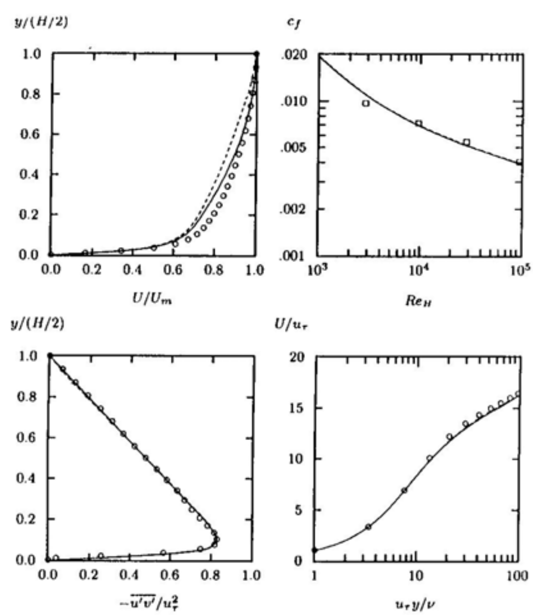


Figure 3.12: *Comparison of computed and measured channel-flow properties. Re_H = 13,750. —— Baldwin-Lomax; - - - Cebeci-Smith; ○ Mansour et al. (DNS); □ Halleen-Johnston correlation.*

P

MULTLAB

UNICAMP

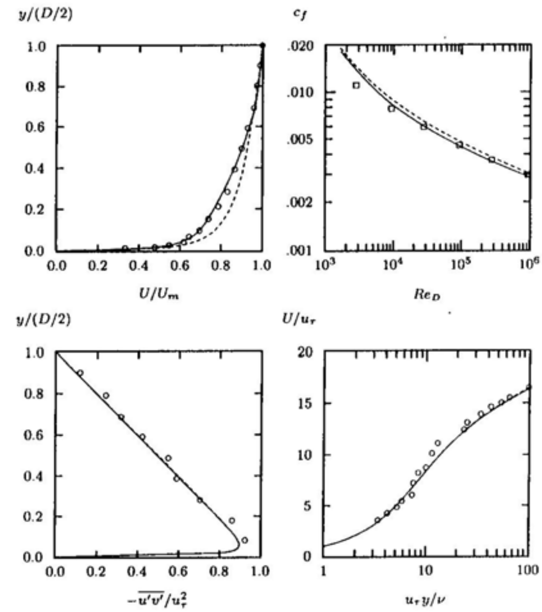


Figure 3.13: *Comparison of computed and measured pipe-flow properties. Re_D = 40,000. —— Baldwin-Lomax; - - - Cebeci-Smith; ○ Laufer; □ Prandtl.*

MULTLAB

UNICAMP

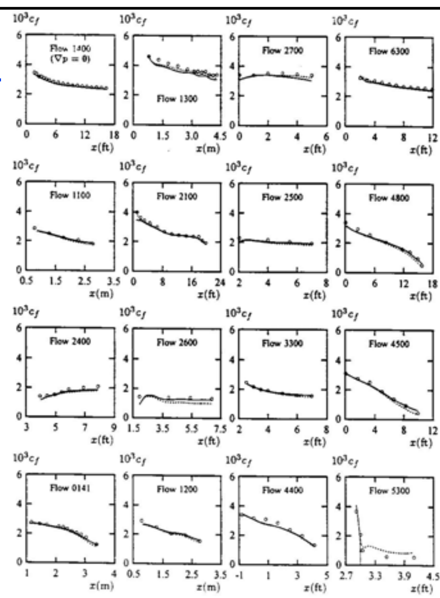


Figure 3.16: *Computed and measured skin friction for boundary layers subjected to a pressure gradient. Top row - favorable ∇p; next to top row - mild adverse ∇p; next to bottom row - moderate adverse ∇p; bottom row - strong adverse ∇p. —— Baldwin-Lomax model; - - - Cebeci-Smith model; ○ measured.*