História da Modelagem da Turbulência (I)

MULTLAB

UNICAMP

- Boussinesq (1877) propõe que a tensão turbulenta seja representada por um modelo similar a tensão de origem molecular;

- O. Reynolds (1895) propõe o conceito de média temporal das equações de N.S. para representar o escoamento médio e suas flutuações;

- L.Prandtl (1925) introduz o modelo de comprimento de mistura e uma maneira direta de se calcular a viscosidade turbulenta. Ele se tornou uma das referências em modelagem de turbulência. Conhecido como modelo algébrico ou 'zero' equação.

História da Modelagem da Turbulência (II)

MULTLAB

UNICAMP

- L. Prandtl (1945) postula um novo modelo de turbulência no qual a viscosidade turbulenta depende da energia cinética. Para tanto ele também modela e propõe uma eq. dif. que representa k. Conhecido como modelo a uma equação. Ele é incompleto pois necessita ainda do comprimento de mistura.

- Kolmogorov (1942) propõe o primeiro modelo completo. Adicionalmente a equação de k ele introduziu um segundo parâmetro, a taxa de dissipação de energia, ε. A viscosidade turbulenta é função destes dois parâmetros. Eles são modelados por meio de duas equações diferenciais parciais. Ele é conhecido como o primeiro modelo a duas equações.

- Chou (1945) e Rotta (1951) não utilizam a hipótese de Boussinesq mas lançam os alicerces para os modelos de transporte das tensões turbulentas.

IM – 450 '*Modelagem em Turbulência*' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP

História da Modelagem da Turbulência (III)

MULTLAB

UNICAMP

Modelos disponíveis nos anos 50

- Modelos Algébricos
- Modelos com Uma-Equação
- Modelos com Duas-Equações
- Modelos Transporte das Tensões

História da Modelagem da Turbulência (IV)

MULTLAB

UNICAMP

• Com a evolução do computador nos anos 60, diversos avanços em cada categoria de modelo surgiram:

•**Modelos Algébricos**: ***VanDriest*** (1956) amortecimento viscoso; ***Cebeci e Smith*** (1974) refinaram modelo **viscosidade turb./comp. mistura** para ser empregado em qualquer camada limite sem descolamento. Baldwin e Lomax (1978) propuseram modelo alternativo

•**Modelos c/ uma-equação:** não muito empregado por ser incompleto, necessita de uma informação experimental para constituir a viscosidade turbulenta. ***Brandshaw, Ferriss e Atwell*** (1967). ***Spalart e Allmaras*** propõem um modelo direto para visc. Turbulenta e ganha populariada pela simplicidade, porém tão limitado quanto os outros.

História da Modelagem da Turbulência (V)

MULTLAB UNICAMP

Modelos c/ duas-equações:

- ***Lauder e Spalding*** **modelo k-ε (1972);**
- ***Saffman*** **modelo k-ω (1970),**
- ***Wilcox*** **modelo k-w (1988)**

Modelos de Transporte do Tensor:

- ***Daly e Harlow*** **(1970),**
- ***Launder, Reeci e Rodi*** **(1975);**
- ***Lumley*** **(1978);**
- ***Speziale*** **(1985, 1987 e 1991)**

Hipótese de Boussinesq

MULTLAB UNICAMP

- **A primeira tentativa de modelar fenômenos turbulentos foi proposta por Boussinesq (1877).**
- **Para escoamentos uni-direcionais, típicos de Camada Limite, Boussinesq propôs que a tensão de Reynolds fosse modelada por:**

$$\frac{\tau^T}{\rho} = -\overline{uv} = \nu_T \frac{\partial \overline{U}}{\partial y}$$

- **de tal modo que a tensão total passa a ser dada pela soma das tensões devido a difusão molecular e turbulenta do momento:**

$$\tau = \left(\tau^L + \tau^T\right) = \rho\left(\nu + \nu_T\right)\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}$$

- **frequentemente a soma dos coeficientes de difusão é denominado por viscosidade efetiva, $\nu_{eff} = \nu + \nu_T$, assim:**

$$\tau = \rho \nu_{eff} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y}$$

Hipótese de Boussinesq (I)

• Focalizando no modelo para a tensão de Reynolds:

$$\frac{\tau^T}{\rho} = -\overline{uv} = \nu_T \frac{\partial \overline{U}}{\partial y}$$

• ele pressupõe que a tensão turbulenta ocorre quando há gradiente de velocidade no campo médio.

•O que é verdadeiro para escoamento na Camada Limite.

• ν_T é a viscosidade turbulenta. Diferentemente da viscosidade molecular (laminar) ela é uma propriedade do escoamento e não do fluido.

• Ela depende dos mecanismos de transporte turbulento e portanto deve ser modelada.

Hipótese de Boussinesq (III)

• A hipótese de Boussinesq foi generalizada por Kolmogorov (1942) e atualmente é amplamente utilizada em modelagem de escoamentos turbulentos.

• Postulando que o tensor turbulento possa ser escrito de forma similar ao tensor de um fluido Newtoniano, foi proposta a forma abaixo:

$$-\rho\overline{u_i u_j} = A\delta_{ij} + \mu_T\left[\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right] = A\delta_{ij} + 2\mu_T S_{ij}$$

Fazendo i = j na relação e somando para i=1 a 3, tem-se que:

$$A = -\frac{2}{3}\left(\rho k + \mu_T \cdot \nabla\vec{V}\right); \qquad k = \tfrac{1}{2}\sum_i \overline{\left(u_i^{'}\right)^2}$$

• O eixo principal do tensor de Reynolds é paralelo ao eixo principal da taxa média de deformação do fluido, S_{ij}

Hipótese de Boussinesq (IV)

• Para escoamentos incompressíveis, o tensor de Reynolds é expresso por:

$$\tau_{ij}^{T} = -\rho \overline{u_i u_j} = -\frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} + 2\mu_T S_{ij}$$

Isto é uma direta analogia com a tensão – deformação para um fluido Newtoniano:

$$\tau_{ij}^{L} = -P\delta_{ij} + 2\mu S_{ij}$$

• o tensor das tensões de origem laminar e turbulenta passa a ser:

$$\tau_{ij} = \left(P + \frac{2}{3}\rho k\right)\delta_{ij} + (\mu + \mu_T)2S_{ij}$$

Hipótese de Boussinesq (IV)

• O eixo principal do tensor de Reynolds é paralelo ao eixo principal da taxa média de deformação do fluido, S_{ij}

• Dados experimentais revelaram que isto não se confirma na totalidade dos casos.

• Isto deve-se ao fato que enquanto S_{ij} pode alterar seu valor instantâneo devido a aplicação de forças, o tensor de Reynolds requer 'um tempo de relaxação' para atingir o novo valor Sij

• Conseqüentemente o modelo constitutivo da viscosidade turbulenta de Kolmogorov-Boussinesq não resolve bem para escoamentos onde existem fortes mudanças de curvaturas (p. ex.: recirculações, contrações abruptas, vórtices turbulentos, etc)

Hipótese de Boussinesq (V)

• **A hipótese de Boussinesq resulta em um modelo 'isotrópico' das tensões normais.**

• **Isto pode ser observado, por exemplo, no escoamento desenvolvido em dutos e também em camadas limites 2D.**

• **No primeiro caso o gradiente de velocidade na direção do escoamento é nulo e no segundo, em geral, muito pequeno.**

• **Nestas condições as tensões normais nas três direções são idênticas entre si e iguais a (2/3) de k:**

$$\overline{uu} = \overline{v\,v} = \overline{ww} = \tfrac{2}{3}k$$

Hipótese de Boussinesq (VI)

• **Observando-se medidas experimentais da intensidade de turbulência, nota-se que em nenhum dos casos as intensidades (tensões normais) são idênticas entre sí.**

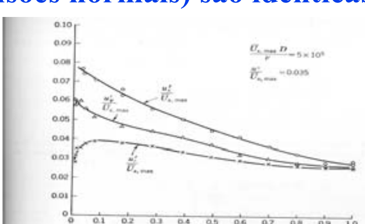


Fig. 7-32. Relative turbulence intensities in pipe flow. (Laufer, J.; reprint... NACA Tech. Repts. 1174, pp. 6 and 7, 1954, by permission of the National A... Committee for Aeronautics.)

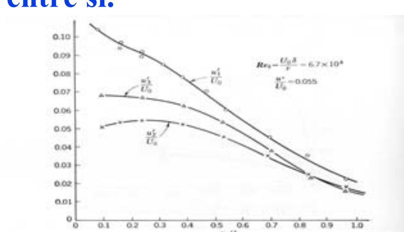


Fig. 7-12. Relative turbulence intensities in a boundary layer along a rough wall with zero pressure gradient. (Corrsin, S., and A. L. Kistler; reprinted from NACA Tech. Notes 3133, fig. 16, 1954, by permission of the National Advisory Committee for Aeronautics.)

Para a camada limite em uma placa plana a razão entre as tensões

$$\overline{uu} : \overline{vv} : \overline{ww} = 4 : 2 : 3$$

Estas razões para a C.L. são dependentes do gradiente de pressão.

Tensor Anisotropico

• Reconhecendo que $(2/3)k\delta_{ij}$ representa o tensor isotrópico das tensões normais, o tensor desvio isotrópico é definido por:

$$a_{ij} = \overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

Ou normalizando com relação a k:

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{2k} \equiv \frac{\overline{u_i u_j}}{\overline{u_k u_k}} - \frac{1}{3}\delta_{ij}$$

Em termos dos tensores anisotrópicos, o tensor de Reynolds fica sendo:

$$\overline{u_i u_j} = a_{ij} + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \equiv 2k \cdot \left(b_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij} \right)$$

Tensor Anisotropico

• Somente a componente anisotrópica do tensor de Reynolds é efetiva para transportar momento.

• O termo do lado direito da equação média de N-S é:

$$\rho \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial P}{\partial x_j} \equiv \rho \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(P + \frac{2}{3} k \right)$$

•Mostrando que a componente isotrópica (2/3)k pode ser absorvida na pressão média modificada.

Difusão Turbulenta de um Escalar

• A difusão turbulenta de um escalar também baseia-se na hipótese de Bousinesq.

• O fluxo médio devido a flutuação de um escalar (temperatura, energia cinética, concentração, etc) ocorre na mesma direção e sentido do gradiente do campo médio deste escalar:

$$\overline{u_i \phi'} = -\Gamma_T \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \equiv -\Gamma_T \nabla \Phi; \qquad \text{onde} \quad \phi = \phi' + \Phi$$

• Matematicamente a hipótese gradiente-difusão é análoga a lei de Fourier da condução térmica, e Γ é sempre uma constante positiva.

Fluxo de Calor Turbulento

• O fluxo de calor turbulento é a energia transportada pelos turbilhões:

$$\dot{q}_i''^{\,T} = -\rho Cp \cdot \overline{u_i t'} = -k_T \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

• onde k_T é a condutividade térmica turbulenta. Ela também pode ser expressa por meio da difusividade térmica turbulenta, α_T:

$$\dot{q}_i''^{\,T} = -\rho Cp\, \alpha_T \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

• e introduzindo o Prandtl turbulento, o fluxo de calor passa a ser:

$$\dot{q}_i''^{\,T} = -\rho Cp \left(\frac{\nu_T}{Pr\ t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

• o fluxo de calor total, oriundo das contribuições devido a difusão molecular e das flutuações é

$$\dot{q}_i'' = -\rho Cp \left(\alpha + \frac{\nu_T}{Pr\ t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

MULTLAB

UNICAMP

Modelo Zero Equação:

Comprimento de Mistura de Prandtl

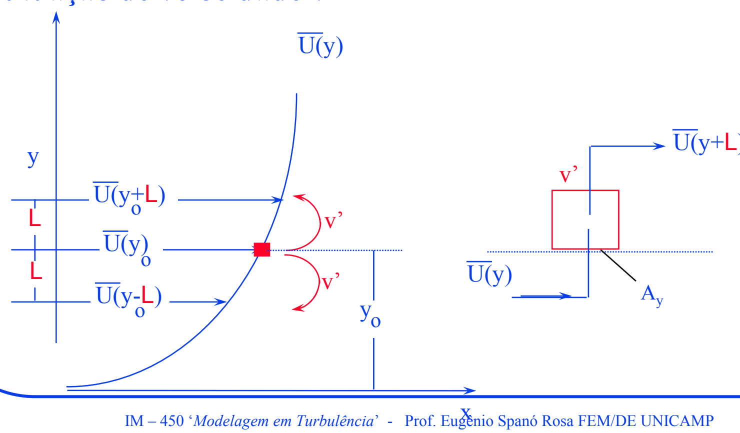
MULTLAB

UNICAMP

Comprimento de Mistura de Prandtl

• **Prandtl (1927) propôs o primeiro modelo de turbulência conhecido como comprimento de mistura.**

• **Suponha que uma porção do fluido que se desloca com sua velocidade média U(y_o) é deslocado transversalmente devido a flutuação de velocidade v'**



Comprimento de Mistura de Prandtl

MULTLAB UNICAMP

- O fluxo de momento é equivalente a tensão flutuante:

$$\tau'_{yx} \cong \left(\frac{\dot{m}}{A_y}\right)\cdot \Delta U = -(\rho v')\cdot\left(L\cdot\frac{d\overline{U}}{dy}\right)$$

o seu valor médio: $$\tau^{T}_{yx} = \rho\cdot\overline{v'L}\cdot\frac{d\overline{U}}{dy} \equiv -\rho\overline{u'v'}$$

- É esperado que a correlação entre v'L, para um ponto que se move no escoamento, diminua a medida que a distância viajada pelo turbilhão cresça.

- Isto é, para um dado y_o a influência de v' no fluxo de momento diminui a medida que a distância viajada, L, aumenta. Do contrário ela cresceria indefinidamente enquanto L aumentasse (situação não realística)!

Comprimento Mistura Prandtl - cont.

MULTLAB UNICAMP

- Pode-se estimar que v' e L apresentem correlação para valores de L comparáveis a um comprimento transversal característico do escoamento, l, chamado de comprimento de mistura, isto é a média v'L é igual ao produto l * rms v' vezes um fator de correlação:

$$\overline{v'L} = c\cdot\ell\cdot\sqrt{\overline{v'^2}}$$

Substituindo na expressão para a tensão média:

$$\overline{\tau'_{yx}} = \rho\cdot\sqrt{\overline{v'^2}}\cdot\ell\cdot\frac{d\overline{U}}{dy} \equiv -\rho\overline{u'v'}$$

- Observa-se que a parte de u' que se correlaciona com v' é da ordem de:

$$\sqrt{\overline{u'^2}} \approx \ell\cdot d\overline{U}/dy$$

MULTLAB

Comprimento Mistura Prandtl - cont.

UNICAMP

• Considerando que u' e v' são fortemente correlacionados e possuem a mesma ordem de grandeza, $\overline{u'^2} \approx \overline{v'^2}$ então

$$\sqrt{\overline{u'^2}} \approx \sqrt{\overline{v'^2}} \approx \ell \cdot d\overline{U}/dy$$

• A tensão turbulenta pode ser dada em termos do gradiente da velocidade média e do comprimento de mistura:

$$\overline{\tau'_{yx}} = -\rho\overline{u'v'} = \rho\ell^2 \cdot \frac{d\overline{U}}{dy} \cdot \left|\frac{d\overline{U}}{dy}\right|$$

• O módulo de dU/dy é utilizado para fazer que τ mude de sinal com o gradiente.

•A expressão acima foi originalmente proposta por Prandtl,

• Resta definir um modelo para o comprimento de mistura.

MULTLAB

Comprimento de Mistura & Visc. Turbulenta

UNICAMP

• A viscosidade turbulenta pode ser expressa por meio do comprimento de mistura igualando-se as expressões:

$$\overline{\tau'_{yx}} = \mu_T \cdot \frac{d\overline{U}}{dy} = \rho\ell^2 \cdot \frac{d\overline{U}}{dy} \cdot \left|\frac{d\overline{U}}{dy}\right| \quad \rightarrow \quad \mu_T = \rho\ell^2 \cdot \left|\frac{d\overline{U}}{dy}\right|$$

• A razão entre a tensão turbulenta e a viscosa pode ser dada pelo Re que por sua vez expressa uma razão entre as viscosidades turbulenta e molecular:

$$\frac{\overline{\tau'}}{\mu \cdot d\overline{U}/dy} = \frac{\mu_T}{\mu} = \frac{\rho\ell \cdot \overbrace{\ell\left|d\overline{U}/dy\right|}^{\sqrt{u'^2}}}{\mu} = \underbrace{\rho\ell \cdot \sqrt{\overline{u'^2}}/\mu}_{Re_\ell} \cong \frac{\ell u^*}{\nu} >> 1$$

• Quando Rel >> 1 a tensão turbulenta >> tensão viscosa, neste caso os termos viscosos podem ser desprezados. A dependência da viscosidade molecular ocorre somente quando os comprimentos característicos: l e ν/v' forem da mesma ordem de magnitude!

Comprimento de Mistura & Visc. Turbulenta

• A viscosidade turbulenta é dada pelo gradiente do campo médio e pelo comprimento de mistura:

$$\mu_T = \rho \ell^2 \cdot \left| \frac{d\overline{U}}{dy} \right|$$

• A expressão acima é válida quando o tensor deformação, S_{ij}, apresenta uma única componente significativa, típico de escoamentos em C. L.

• Uma generalização para aplicar o comprimento de mistura para campos complexos onde S_{ij} apresenta diversas componentes não-nulas, é:

$$\mu_T = \rho \ell^2 \cdot \sqrt{S_{ij} S_{ij}} = \rho \ell^2 \cdot S$$

MULTLAB

Comprimento de Mistura & Visc. Turbulenta

UNICAMP

• A generalização do modelo de comprimento de mistura é aplicável para qualquer escoamento turbulento.

• Sua maior limitação é que l deve ser especificado!

• A especificação correta depende da geometria do escoamento e, portanto, não é universal.

• Para escoamentos complexos o emprego de l requer uma grande dose de experimentalismo e 'adivinhação'.

• Porém, para uma série de escoamentos simples e tecnologicamente relevantes, l é bem estabelecido.

IM – 450 '*Modelagem em Turbulência*' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP

Comprimento Mistura e a Lei Log

MULTLAB UNICAMP

•Definindo a tensão turbulenta, τ_t, em função do comprimento de mistura, e o gradiente da vel. média pelo perfil universal (lei log), considerando também que Rel>>1, de maneira que a tensão turbulenta predomina sobre a tensão viscosa, então:

$$\overline{\tau_t} = \rho \ell^2 \cdot \frac{d\overline{U}}{dy} \cdot \left| \frac{d\overline{U}}{dy} \right| \cong \rho \ell^2 \cdot \left(\frac{u^*}{\kappa y} \right)^2$$

ou:

$$(\kappa y)\sqrt{\frac{\tau_t}{\tau_w}} = \ell$$

•Mas reconhecendo-se que a tensão na sub-camada inercial é aproximadamente constante e igual a τ_w, chega-se a proposição de Prandtl, isto é $\tau_t = \tau_w$ -> l = ky

Comprimento Mistura e a Lei Log

MULTLAB UNICAMP

• Para a sub-camada inercial, $y/\delta << 1$ e $yv^*/\nu >> 1$, o comprimento de mistura, l, é linear com a distância da parede:

$$\ell = k \cdot y$$

onde k = 0.41 (Von Kármám).

•Este modelo aplica-se à sub camada inercial. Há que se ter em mente que a presença de gradiente externo de pressão adversos reduzem o tamanho da zona sub-inercial e aumenta a zona externa (esteira).

• O modelo l=k.y não pode ser integrado a partir de y = 0, isto é, da parede. Note que ele satisfaz somente o perfil log.

Comp. Mistura camada viscosa, $y^+ < 30$

• Para a camada viscosa, $y^+ < 30$, os efeitos de difusão molecular e turbulenta são de mesma ordem de magnitude.

• Porém, a medida que se aproxima da parede as flutuações de velocidade são amortecidas! Para $y^+<5$, elas já são desprezíveis e os efeitos de difusão molecular dominam o escoamento.

• Van Driest (1956) concebeu que o amortecimento das flutuações de velocidade na parede quando $y+ < 30$ baseado numa analogia com o primeiro problema de Stokes: placa plana infinita com oscilação harmônica num fluido estacionário em meio infinito.

• Stokes mostrou que a amplitude da oscilação decai com a distância da placa proporcional a exp(-y/A) onde A é uma constante que depende de ν e da frequência oscilação.

• O inverso, quando a placa é estacionária e o fluido oscila, a amplitude da oscilação decai pelo fator: (1-exp(-y/A)).

Comp. Mistura camada viscosa , $y^+ < 30$

• Van Driest (1956) fundiu, em uma única expressão para o comprimento de mistura l, as duas expressões para as camadas viscosa e log introduzindo um fator de amortecimento devido a presença da parede:

$$\ell = \kappa y \left[1 - \exp\left(- \frac{y^+}{A} \right) \right]$$

válido da parede, $y^+ = 0$, até a sub camada inercial ($y^+ < 200$). A é uma constante que depende do gradiente de pressão:

$$A \cong \frac{25}{\left[1 + a \cdot b \cdot p^+\right]}; \;\text{ onde }\; p^+ = \frac{\nu}{\rho \cdot v*^3} \cdot \frac{dP_e}{dx}$$

$$a = 7.1; b = 2.9 \;\text{ se }\; p^+ > 0 \;\text{ e }\; b = 4.25 \;\text{ se }\; p^+ < 0$$

em particular para a placa plana, A=25

Limite Assintótico para l quando $y \to 0$

MULTLAB UNICAMP

• Van Driest propôs que o comprimento de mistura l, amortecido pela presença da parede, apresenta um decaimento exponencial de acordo com a expressão:

$$\ell = \kappa y \left[1 - \exp\left(- \frac{y^+}{A} \right) \right]$$

• Uma expressão aproximada para l, quando $y \to 0$ é obtida expandindo-se a função exponencial em série de Taylor:

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad p/\ x \to 0;\ \exp(x) \cong 1 + x$$

• Substituindo-se para l, encontra-se que o comprimento de mistura varia com o quadrado da distância da parede quando $y^+ \ll 1$.

$$\ell \cong y^2$$

Limite da Tensão Reynolds para $y \to 0$

MULTLAB UNICAMP

•Na parede, $y = 0$, $u'=0$. Mas não há nenhuma necessidade que du'/dy seja nula também, então pode-se concluir que $u' \propto y$

•Como as flutuações de velocidade também satisfazem a continuidade, então $v' \propto y^2$ e a componente transversal, $w' \propto y$.

• Pode-se concluir então que o limite assintótico para energia cinética e tensão turbulenta para $y \to 0$ é:

$$k \approx \overline{u'^2} \approx y^2 \quad \& \quad \tau \approx \overline{u'v'} \approx y^3$$

• O amortecimento de Van Driest para $y \to 0$ resulta numa tensão proporcional a:

$$\overline{\tau_t} = \rho \ell^2 \cdot \frac{d\overline{U}}{dy} \cdot \left| \frac{d\overline{U}}{dy} \right| \cong \rho\left(\kappa y^2\right)^2 \cdot \left(\frac{U}{y} \right)^2 \approx y^2$$

Limite da Tensão Reynolds para $y \to 0$

MULTLAB

UNICAMP

• Os resultados das duas análises assintóticas para t estão em conflito!

• Resultados simulações DNS indicam realmente que $\tau_{xy} \propto y^3$ para $y \to 0$.

• No entanto, Hinze (1975) mostrou que para o limite $y \to 0$, o coeficiente do termo cúbico é muito menor que do termo de segunda potência de tal modo que as medidas experimentais para $y \to 0$ estão mais próximas de $\tau_{xy} \propto y^2$ do que para $\tau_{xy} \propto y^3$

• Isto coincide com o limite assintótico ajustado por VanDriest:

$\tau_{xy} \propto y^2$

• e mostra que o modelo de Van Driest melhora a capacidade descritiva do modelo de comprimento de mistura para as tensões de Reynolds próximo as paredes

Comprimento Mistura Camada Externa

MULTLAB

UNICAMP

• Clauser (1956) propôs uma forma adequada para a viscosidade turbilhonar na camada externa.

•De maneira similar a forma especial de ν_t que Prandtl propôs para escoamentos sem presença de paredes sólidas (free shear flows), Clauser sugere que:

$$\nu_{To} = \alpha U_e \delta^*$$

• onde ν_{To} é a viscosidade na porção externa da C.L.; δ^* é a espessura de deslocamento; Ue é a vel. externa da C.L. e α uma constante para fechamento do modelo.

Comprimento Mistura Camada Externa

• Escudier (1966) encontrou uma melhora na capacidade preditiva do modelo limitando o valor máximo do comprimento de mistura:

$$\left(\ell_{mix}\right)_{max} = 0.09 \cdot \delta$$

onde δ é a espessura da camada limite.

• O modelo de comprimento de mistura, apesar de ser capaz de representar diversos escoamentos simples, não possui constantes universais (aplicávies para quaisquer tipo de escoamentos). Neste caso o melhor da idéia de Escudier é tomar que o comprimento de mistura na camada externa pode ser modelado por:

$$\left(\ell_{mix}\right)_{max} = \lambda \cdot \delta$$

onde λ é uma constante que varia dependendo do tipo de escoamento.

Intermitência na Camada Limite

• Corsin e Kistler (1954) e Klebanoff (1955) realizaram experimentos relativos a intermitência entre escoamento turbulento e laminar apresentado pela C.L. a medida que se aproxima de δ.

• Os experimentos revelaram que a camada turbulenta varia de 0.4 δ a 1.2 δ , onde δ é a espessura média da C.L. Ela tem a forma irregular e se propaga com velocidade de 0.98 Ue.

• A intermitência γ, é a fração do tempo total que o escoamento encontrou-se no regime turbulento.

Intermitência na Camada Limite

MULTLAB UNICAMP

- **Como não é esperado que o fluido externo à C.L. tenha viscosidade turbulenta, o fator de intermitência deve ser multiplicado a ela:**

$$F_{Kleb}(y;\delta) = \left[1 + 5.5\left(\frac{y}{\delta}\right)^6\right]^{-1}$$

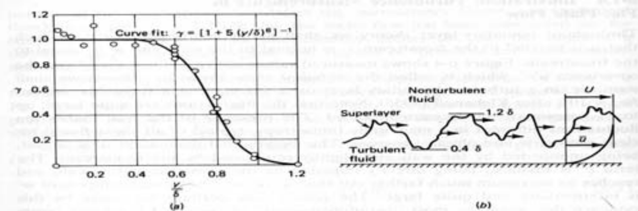


FIGURE 6-5
The phenomenon of intermittency in a turbulent boundary layer: (*a*) measured intermittency factors [*after Klebanoff (1955)*]; (*b*) the superlayer interface between turbulent and nonturbulent fluid.

Eq. Constitutivas para Comp. Mistura - cont.

MULTLAB UNICAMP

- **Para a camada externa, $y/\delta \cong 1$ e $yv^*/\nu >> 1$, o comprimento de mistura, l, é constante e depende de uma dimensão característica do escoamento.**

- **Para escoamentos tipo camada limite, l é proporcional a espessura da camada limite, em jatos livres l é proporcional a largura do jato.**

$$\ell = \textbf{constante} \approx \delta$$

Valores de l para escoamentos sem paredes sólidas

	Correntes paralelas	jato plano	jato axi-simétrico	esteira plana
ℓ/δ	0.07	0.09	0.075	0.16

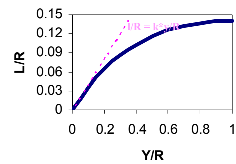
onde δ é definida como sendo a espessura da camada limite - distância onde a vel. difere 1% vel. máx ou da corrente livre, dependendo do caso.

Eq. Constitutivas para Comp. Mistura - cont.

• **Para camadas limites com presença de paredes sólidas é sugerido que na camada externa:**

$$\ell / \delta \cong 0.09$$

• **Nikuradse realizou diversas medidas experimentais em escoamentos desenvolvido em tubos e sugere a expressão:**



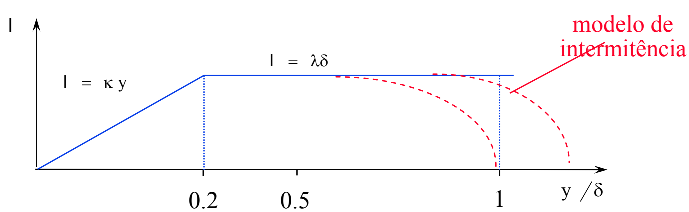
$$\frac{\ell}{R} = 0.14 - 0.08 \cdot \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2 - 0.06 \cdot \left(1 - \frac{y}{R}\right)^4$$

onde R é o raio do tubo ou a metade da altura de um canal 2-D fechado ou a altura completa de um canal aberto. Para pontos muito próximos da parede sugere-se a aplicação rel. van Driest.

Comprimento Mistura na Presença de Paredes Sólidas : Composição

• **Em escoamentos com presença de parede sólida as expressões do comprimento de mistura, apropriadas para as diversas camadas (interna, overlap e externa) devem ser convenientemente acopladas.**

•**Patankar e Spalding , após numerosos testes, constataram que uma função rampa constitui um bom modelo.**



• **Este modelo pode ser ainda refinado se for introduzido, próximo ao limite externo da C.L. um decaimento de l devido a intermitência.**

Comentários & Conclusões sobre modelo de Comprimento de Mistura

• Uma das maiores restrições ao modelo de comprimento de mistura é que a viscosidade turbulenta desaparece quando o gradiente de velocidades é nulo!

$$\nu_t = \ell^2 \cdot \frac{d\overline{U}}{dy} \qquad \nu_t = \sqrt{\overline{v'^2}} \cdot \ell$$

• Na realidade para o centro do tubo (onde dU/dy=0) ν_T é cerca de 20% menor que o seu máximo valor!. Para cálculo da tensão não há problema porque o gradiente é nulo mas para transporte de calor isto traz problemas porque impede que o calor seja transportado de uma parede para outra.

• O modelo de comprimento de mistura é um modelo de equilíbrio local, isto é: localmente a turbulência produzida é dissipada, produção e dissipação estão em balanço localmente. Portanto <u>não há transporte de turbulência</u> uma região para outra.

Comentários & Conclusões sobre modelo de Comprimento de Mistura

• Em um duto ou canal, a turbulência é de fato, produzida próximo às paredes e transportada por difusão ao centro do duto; o modelo de comprimento de mistura não considera o transporte difusivo e portanto estima que no centro do duto não há turbulência

$$\sqrt{\overline{v'^2}} \cong \ell \cdot \frac{d\overline{U}}{dy} \qquad \text{se } dU/dy = 0 \text{ então } v'^2 = 0??$$

• O modelo de comprimento de mistura não é adequado quando o transporte difusivo e convectivo de turbulência são importantes (escoamentos c/ recirculação onde existem zonas com gradiente do campo médio nulo)

• Ele é adequado para escoamentos simples tipo camada limite 'shear flows' onde há somente uma direção principal, uma velocidade característica.

Dissipação e Produção de Turbuência na Camada Log

- Próximo de paredes, $30 < y^+ < 100$, a tensão turbulenta é aproximadamente constante e o escoamento está em equilíbrio local, isto é, a produção de turbulência é igual a sua dissipação.

- A produção é dada por: $$P = \overline{u'v'} \cdot \frac{d\overline{U}}{dy} = \varepsilon$$

- Utilizando o perfil log obtêm para $dU/dy = u^*/\kappa y$ e para a correlação cruzada $uv \cong u^{*2}$, assim a dissipação, na condição de equilíbrio, é dada por:

$$\varepsilon = \frac{u^{*3}}{\kappa y}$$ onde u* é a velocidade de atrito.

- Alguns valores rms típicos para sub-camada inercial em relação a velocidade de atrito são:

$$\sqrt{\overline{u'^2}} \cong 2 \cdot u^*; \quad \sqrt{\overline{v'^2}} \cong 0.8 \cdot u^*; \quad \sqrt{\overline{w'^2}} \cong 1.4 \cdot u^*; \quad k \cong 3.5 \cdot u^{*2} \ \text{e} \ \overline{u'v'} \cong 2 \cdot u^{*2};$$

- A energia cinética turbulenta na sub-camada inercial pode ser estimada em: $$k = 3.5 \cdot u^{*2} = u^{*2} \big/ \sqrt{C_\mu}$$

Escoamento nas Camadas Viscosa e Log – Couette Flow

- Nestas duas camadas o escoamento não sente o efeito dos termos inerciais. Esta região pode chegar a 25% da camada limite.
- Nela o escoamento é governado pela tensão e gradiente de pressão (dependência fraca); os gradientes transversais são muito maiores que os gradientes na direção do escoamento:

$$\rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \rho V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

- Nestas camadas o termo UdU/dx <<1, U = U(y), e v = V0, velocidade normal a parede (igual a zero a menos que a injeção ou sucção de massa), nestas condições a equação se reduz para:

$$\rho V_0 \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

Escoamento nas Camadas Viscosa e Log – Couette Flow

- Integrando-se da parede ($y = 0$, $\tau = \tau_w$ e $U = 0$) até uma distância y a equação:

$$\rho V_0 \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

- Se encontra: $$\frac{\tau}{\tau_w} = 1 + \frac{\rho V_0 U(y)}{\tau_w} + \frac{dP}{dx} \cdot \frac{y}{\tau_w}$$

- A equação acima é válida somente para região $y^+ < 200$.
- Note que aproximando da borda externa da camada limite, τ/τ_w deve se aproximar de zero.
- Isto não é possível de se realizar na equação da aproximação de Couette.

Escoamento nas Camadas Viscosa e Log – Couette Flow

- Adimensionalizando-se a equação em termos das variáveis internas,

$$y^+ = yu^*/\nu = yU_\infty\sqrt{C_f/2}/\nu$$

$$V_0^+ = V_0/u^* = (V_0/U_\infty)/\sqrt{C_f/2}$$

$$\tau_w/\rho = C_f U_\infty^2/2 = u^*$$

$$u^+ = U/u^*$$

$$P^+ = \nu(dP/dx)/u^{*3}$$

- Se encontra: $$\frac{\tau}{\tau_w} = 1 + V_0^+ u^+ + P^+ y^+$$

MULTLAB

Escoamento nas Camadas Viscosa e Log – Couette Flow

UNICAMP

- Sem injeção de massa nem gradiente de pressão, a equação de Couette mostra que a razão das tensões é constante:

$$\frac{\tau}{\tau_w} = 1$$

- Nosso modelo para tensão é composto por uma parcela da tensão laminar e outra da tensão turbulenta:

$$\frac{\tau}{\rho} = \left(\nu_L + \nu_T\right)\frac{dU}{dy}$$

- Para sub-camada laminar, $y^+ < 5$, $\nu_L >> \nu_T$ e portanto:

$$U = \frac{\tau_w}{\rho \nu_L} y \rightarrow u^+ = y^+$$

MULTLAB

Escoamento nas Camadas Viscosa e Log – Couette Flow

UNICAMP

- Para camada Log, $y^+ > 30$, $\nu_L << \nu_T$ e portanto:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \nu_T \frac{dU}{dy} = \ell^2 \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 = (\kappa y)^2 \left(\frac{dU}{dy}\right)^2$$

ou

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{1}{\kappa y^+} \rightarrow \int_{10.8}^{u^+} du^+ = \frac{1}{\kappa} \int_{10.8}^{y^+} \frac{dy^+}{y^+}$$

- Onde o limite inferior da integral é um valor dentro da camada viscosa que fornece o valor correto da constante linear da lei log.

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} Lny^+ + 5.0$$

- $y^+=10.8$ representa '***artificialmente***' a espessura da sub-camada viscosa se for empregado num modelo de duas camadas: uma que contenha somente efeitos moleculares e outra com as flutuações.

Escoamento nas Camadas Viscosa e Log – Couette Flow

- Empregando o amortecimento de Van Driest pode-se fazer a análise da parede ($y^+ = 0$ até $y^+ = 200$):

$$\frac{\tau_w}{\rho} = (\nu_L + \nu_T)\frac{dU}{dy} = \left[\nu_L + \ell^2\left(\frac{dU}{dy}\right)\right]\frac{dU}{dy}$$

Substituindo o comprimento de mistura, $l = ky(1\text{-}\exp(\text{-}y^+/A))$ e, após considerável álgebra, o perfil de velocidades é dado por:

$$u^+ = \int_0^{y^+} \frac{2dy^+}{1 + \left\{1 + \kappa^2 y^{+2}\left[1 - \exp\left(y^+/A\right)\right]^2\right\}^{1/2}}$$

- Para A = 25, a sub-camada viscosa, o buffer e a camada log são reproduzidas corretamente incluindo a constante B da lei log, B ~5.0. Se o valor de A não estiver certo, o valor de B muda!

Trans Calor nas Camadas Viscosa e Log – Couette Flow

- A equação da energia passa a ser:

$$U\frac{\partial T}{\partial x} + V\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{\rho C_p}\frac{\partial \dot{q}''}{\partial y}$$

- onde q" representa o fluxo de calor total, laminar mais turbulento.

- Próximo da parede, $dT/dx \ll 1$, $T = T(y)$, e $v = V_0$, velocidade normal a parede (igual a zero a menos que a injeção ou sucção de massa), nestas condições a equação se reduz para:

$$V_0\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{\rho Cp}\frac{\partial \dot{q}''}{\partial y}$$

Trans Calor nas Camadas Viscosa e Log – Couette Flow

- Integrando-se da parede (y = 0, q”= q_w e T = Tw) até uma distância y a equação:

$$\rho V_0 \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{\rho Cp}\frac{\partial \dot{q}''}{\partial y}$$

- Se encontra: $$\frac{\dot{q}''}{\dot{q}_w''} = 1 + \frac{\rho \cdot Cp \cdot V_0 (T_w - T)}{\dot{q}_w''}$$

- A equação acima é válida somente para região $y^+ < 200$.
- Note que aproximando da borda externa da camada limite, q/q_w deve se aproximar de zero.
- Isto não é possível de se realizar na equação da aproximação de Couette.

MULTLAB

Trans Calor nas Camadas Viscosa e Log – Couette Flow

UNICAMP

- Adimensionalizando-se a equação em termos das variáveis internas:

$$t^+ = \left[(T_w - T)\sqrt{\tau_w/\rho}\right] / \left(\dot{q}_w''/\rho Cp\right)$$

$$V_0^+ = V_0/u^* = (V_0/U_\infty)/\sqrt{C_f/2}$$

- Se encontra: $$\frac{\dot{q}''}{\dot{q}_w''} = 1 + V_0^+ t^+$$

IM – 450 ‘*Modelagem em Turbulência*’ - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP

- Sem injeção de massa a equação de Couette mostra que a razão dos fluxos de calor é constante:

$$\frac{\dot{q}''}{\dot{q}_w''} = 1$$

- Nosso modelo para fluxo de calor é composto por uma parcela do fluxo laminar e outra do fluxo turbulento:

$$\dot{q}'' = \rho Cp(\alpha_L + \alpha_T)\frac{dT}{dy}$$

- Utilizando o conceito de Prandtl turbulento, $Prt = \nu_T/\alpha_T$, vem que o fluxo de calor pode ser representado em função da viscosidade turbulenta:

$$\dot{q}'' = \rho Cp\left(\alpha_L + \frac{\nu_T}{Pr\,t}\right)\frac{dT}{dy} = \dot{q}_w''$$

MULTLAB

Trans Calor nas Camadas Viscosa e Log – Couette Flow

UNICAMP

- Integrando-se para o perfil de temperatura:

$$\dot{q}_w'' = \rho Cp\left(\alpha_L + \frac{\nu_T}{Pr\,t}\right)\frac{dT}{dy}$$

- obtêm-se

$$\int_{T_w}^{T} dT = -\frac{\dot{q}_w''}{\rho Cp}\int_0^y \frac{dy}{\left(\alpha_L + \frac{\nu_T}{Pr\,t}\right)}$$

- em termos das coordenadas internas:

$$\frac{(T_W - T)\cdot u^*}{\frac{\dot{q}_w''}{\rho Cp}} = \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{\left(\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr\,t}\frac{\nu_T}{\nu}\right)}$$

- ou

$$t^+ = \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{\left(\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr\,t}\frac{\nu_T}{\nu}\right)}$$

IM – 450 '*Modelagem em Turbulência*' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP

Trans Calor nas Camadas Viscosa e Log – Couette Flow

- **O perfil de temperatura é determinado a partir da integral:**

$$t^+ = \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{\left(\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr\,t}\frac{\nu_T}{\nu}\right)}$$

- **Note que sua solução depende do conhecimento de ν_T que por sua vez depende do campo médio de velocidades e do comprimento de mistura.**

$$\nu_T = \ell^2\left(\frac{dU}{dy}\right)$$

MULTLAB

Trans Calor nas Camadas Viscosa e Log – Couette Flow

UNICAMP

- **É usual dividir os limites da integral abaixo em duas regiões: transporte devido a difusão molecular e turbulenta. Este modelo é conhecido como modelo de duas camadas (Kays and Crawford):**

$$t^+ = \int_0^{y^+_{crit}} Pr\,dy^+ + \int_{y^+_{crit}}^{y^+} Pr\,t\left(\frac{\nu}{\nu_T}\right)dy^+$$

- **Onde y_{crit} demarca para o modelo a extensão das regiões onde a difusão molecular e turbilhonar agem. Ele é 'artificial' porque fisicamente eles agem simultaneamente na região do buffer.**
- **Para placa plana sem grad pressão, Pr_t = 0.85 (constante) y_{crit} = 13.2 e 7.55 para ar (Pr = 0.7) e água (Pr = 5.9). A integração resulta em:**

$$t^+ = \int_0^{y^+_{crit}} Pr\,dy^+ + \int_{y^+_{crit}}^{y^+} \left(\frac{Pr\,t}{\kappa y^+}\right)dy^+ \equiv \frac{Pr\,t}{\kappa}Lny^+ + C_T(Pr)$$

MULTLAB

Trans Calor nas Camadas Viscosa e Log – Couette Flow

UNICAMP

- **Os efeitos do gradiente de pressão também podem ser previstos pelo modelo de duas camadas:**

$$t^+ = \int_0^{y^+_{crit}} \Pr dy^+ + \int_{y^+_{crit}}^{y^+} \Pr t \left(\frac{\nu}{\nu_T}\right) dy^+$$

- **Neste caso Prt varia substancialmente na camada viscosa e a aproximação de um valor constante não é mais válida. Inserindo-se a como Prt varia com y^+, o modelo captura as variações de t^+ com o gradiente de pressão.**
- **Note que isto não ocorre com o perfil de velocidades pois ele tem caráter universal na camada viscosa e log, isto é, todas as curvas se colapsam numa única curva.**

MULTLAB

Valores Reconhecidos para Prt

UNICAMP

- **Para Camadas Limites, Prt ~ 0.85**
- **Para tubos, Prt ~ 0.88**

Valores de Prt para escoamentos sem paredes sólidas

	Correntes paralelas	jato plano	jato axi-simétrico	esteira plana
Prt	0.5	0.5	0.7	