

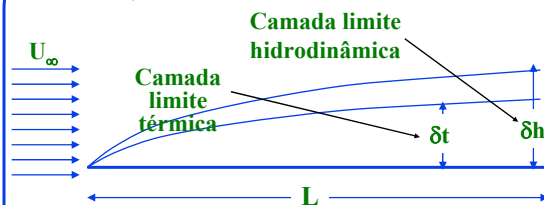
LEI DE PAREDE TÉRMICA

'T - LAW'

(veja Kays and Crawford)

Analogia Momento & Calor (escalas características)

- Considerando um escoamento externo, regime laminar, com transferência de calor, sem gradiente de pressão, duas camadas limites se desenvolvem a partir de $x=0$,



condições de contorno

$$y=0 \rightarrow u=0 \quad \& \quad T-T_w=0$$

$$y \rightarrow \infty \rightarrow u=U_\infty \quad \& \quad T-T_w=T_\infty-T_w$$

Eq. C.L., $dp/dx=0$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Se $\nu = \alpha$, ambas equações & condições de contorno são similares, e portanto apresentam a mesma solução!



Grupos Adimensionais & Definições



- Coeficiente de atrito de Fanno C_f

$$C_f = \frac{\tau_w}{0.5 \cdot \rho \cdot U_\infty^2}$$

- Reynolds, Re_L

$$Re_L = \frac{U_\infty \cdot L}{\nu}$$

- Nusselt, Nu_L

$$Nu_L = \frac{h \cdot L}{k} = \frac{\dot{q}_w \cdot L}{(T_w - T_\infty) \cdot k}$$

- Prandtl, Pr

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu \cdot C_p}{k}$$

- Stanton, St_L

$$St_L = \frac{Nu_L}{Re_L \cdot Pr} = \frac{h_L}{\rho \cdot C_p \cdot U_\infty}$$

IM – 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP



Valores típicos do n. de Prandtl



| | FLUIDO | PRANDTL | TEMP (°C) |
|------------|-------------------|---------|------------|
| Líquidos | Água (liq) | 6.99 | 20 |
| | Amônia (liq) | 1.47 | 20 |
| | Óleo motor | 2130 | 45 |
| Gases | Ar | 0.711 | 30 & 1 atm |
| | CO ₂ | 0.768 | 30 & 1 atm |
| | H ₂ | 0.703 | 30 & 1 atm |
| | Amônia (gás) | 0.908 | 30 & 1 atm |
| Metal Líq. | Mercúrio Hg (liq) | 0.021 | 50 |
| | Sódio Na (liq) | 0.0074 | 200 |

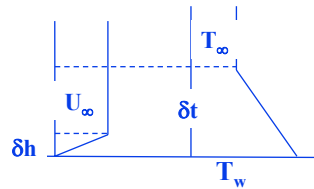
IM – 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP

As equações da C.L. térmica representam um balanço entre os termos convectivos e difusivos expresso na forma de escalas por:

$$u \frac{\Delta T}{L}, v \frac{\Delta T}{\delta t} \approx \alpha \frac{\Delta T}{\delta t^2}$$

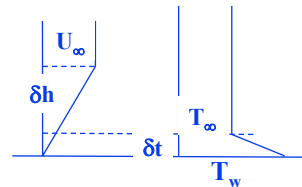
Para $\delta t > \delta h$, mas $v \sim U_\infty(\delta h/L)$ então, $u\Delta T/L \gg v\Delta T/L$, logo

$$U_\infty \frac{\Delta T}{L} \approx \alpha \frac{\Delta T}{\delta t^2} \rightarrow \frac{\delta t}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{Re_L \cdot Pr}} \rightarrow \frac{\delta h}{\delta t} \approx Pr^{1/2}$$

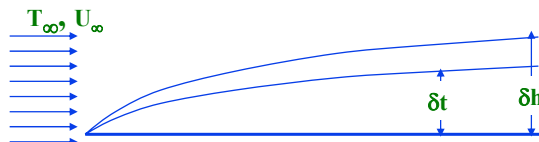


Para $\delta t < \delta h$, mas $u \sim U_\infty(\delta t/\delta h)$

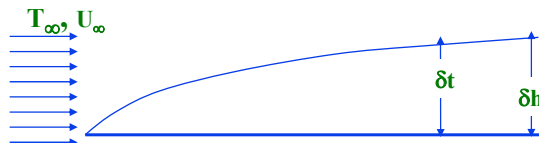
$$U_\infty \left(\frac{\delta t}{\delta h} \right) \frac{\Delta T}{L} \approx \alpha \frac{\Delta T}{\delta t^2} \rightarrow \frac{\delta t}{L} \approx \frac{1}{Re_L^{1/2} \cdot Pr^{1/3}} \rightarrow \frac{\delta h}{\delta t} \approx Pr^{1/3}$$



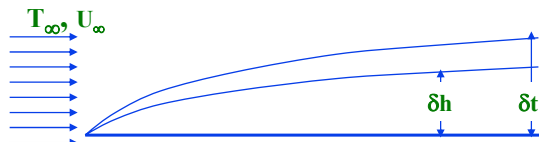
$Pr > 1$ (líquidos);
 $\delta h > \delta t$



$Pr = 1$
 $\delta h = \delta t$



$Pr < 1$
(gases e metais líquidos)
 $\delta h < \delta t$





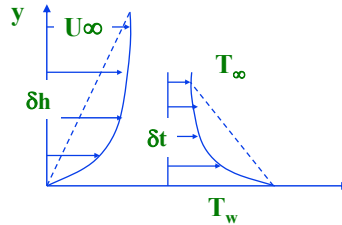
Analogia de Reynolds Regime Laminar



A tensão e o fluxo de calor na parede podem ser estimados por:

$$\tau_w \approx \mu \frac{U_\infty}{\delta h} \rightarrow C_f \cdot \text{Re}_L \approx \frac{L}{\delta h}$$

$$\dot{q}_w \approx k \frac{T_w - T_\infty}{\delta t} \rightarrow \text{Nu}_L \approx \frac{L}{\delta t}$$



A razão entre as espessuras das C.L. hidráulica e térmica é dada por:

$$\frac{\delta h}{\delta t} \approx \frac{\text{Nu}}{C_f \cdot \text{Re}} \quad \text{ou} \quad \text{St} \approx C_f \cdot \text{Pr}^{-1/2} \quad \text{se} \quad \text{Pr} < 1$$

$$\frac{\delta h}{\delta t} \approx \frac{\text{Nu}}{C_f \cdot \text{Re}} \quad \text{ou} \quad \text{St} \approx C_f \cdot \text{Pr}^{-2/3} \quad \text{se} \quad \text{Pr} > 1$$

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP



Analogia de Reynolds Regime Laminar



- Ela relaciona parâmetros relevantes em aplicações como: velocidade e transferência de calor.
- Conhecendo-se C_f pode-se determinar St ou vice-versa.
- Restrições: escoamentos sem gradiente de pressão, $dP/dx \cong 0$

$$\text{St} = \frac{C_f}{2} \cdot \text{Pr}^{-2/3} \equiv j_t \quad 0.6 < \text{Pr} < 60$$

- j_t é conhecido como fator de Chilton-Colburn
- Verificou-se experimentalmente para escoamentos laminares que a relação de $\text{Pr}^{-2/3}$ é válida também para fluidos com $\text{Pr} < 1$.
- Destaca-se que para $\text{Pr} = 1 \rightarrow \text{St} = C_f/2$

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP



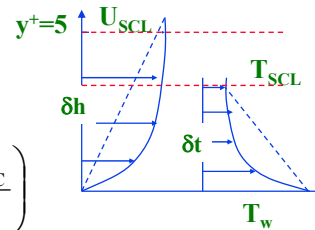
Analogia de Reynolds para Regime Turbulento, $Pr > 1$



- Considere o atrito e fluxo de calor na parede na região da subcamada laminar, $y^+ < 5$
- Nesta região, atrito e calor são governados por processos difusivos:

$$\tau_w \approx \mu \frac{U_{SCL}}{\delta h_{SCL}} \rightarrow C_f \cdot Re_L \approx \frac{L}{\delta h_{SCL}} \cdot \frac{U_{SCL}}{U_\infty}$$

$$\dot{q}_w \approx k \frac{T_w - T_{SCL}}{\delta t_{SCL}} \rightarrow Nu_L \approx \frac{L}{\delta t_{SCL}} \cdot \left(\frac{T_w - T_{SCL}}{T_w - T_\infty} \right)$$



- Onde 'SLC' refere-se a 'sub-camada laminar', δh e δt as espessuras das SLC hidrodinâmica e térmica,
- e h é definido como $q = h (T_w - T_\infty)$

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP



Analogia de Reynolds para Regime Turbulento, $Pr > 1$



- Combinando atrito e calor encontra-se que:

$$\frac{\delta h}{\delta t} \cdot \underbrace{\left(\frac{T_w - T_{SCL}}{T_w - T_\infty} \right)}_{\approx 1} \cdot \left(\frac{U_\infty}{U_{SCL}} \right) \approx \frac{Nu}{0.5 \cdot C_f \cdot Re} \Rightarrow St = \frac{C_f}{2} Pr^{-2/3}$$

- A analogia entre calor e atrito para escoamentos turbulentos tem grandes aplicações porque ela não se aplica somente a placas planas!
- Ela pode ser aplicada para variados tipos de escoamentos turbulentos e portanto tem uma ampla aplicabilidade prática.
- A relação $St = C_f/2 * Pr^{-2/3}$ foi verificada para corpos com gradientes de pressão suaves. (veja *Schlichting*)
- A relação é válida tanto para medidas locais como para medidas médias de St , C_f e Nu .

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP



Relação entre as Temperaturas e Velocidades



- O fato da razão entre temperaturas e velocidades ser de ordem unitária permite estender a analogia de Reynolds para escoamentos turbulentos.
- Considerando que a sub-camada laminar, SCL, equivale a distância $y^+ = 5$, pode-se mostrar que a razão:

$$\left(\frac{T_w - T_{SCL}}{T_w - T_\infty} \right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{U_{SCL}} \right) \equiv \frac{T^+(y^+ = 5)}{T^+(y^+ = \infty)} \cdot \frac{U^+(y^+ = \infty)}{U^+(y^+ = 5)} \equiv \frac{Pr \cdot U^+(y^+ = \infty)}{T^+(y^+ = \infty)} \equiv 1$$

- Onde T^+ é a temperatura expressa em termos das coordenadas internas a ser apresentada mais a frente.
- $y^+=\infty$ representa a borda da camada limite. Este valor dependerá do Re do escoamento e certamente o valor de u^+ e t^+ estarão sujeitos a ocorrência de esteira (wake)



Comentários a cerca do Desenvolvimento da Analogia



- Para fluidos com Pr muito elevado, $Pr > 100$, $\delta t \ll \delta h$, de forma que uma grande parte ou mesmo a totalidade do gradiente térmico está na sub-camada laminar!
- Isto faz com que o perfil de temperatura na região turbulenta seja constante e que os mecanismos de transferência de calor turbulento sejam irrelevantes.
- Para fluidos com Pr muito pequeno, $Pr < 0.1$ espera-se que $\delta t \gg \delta h$, porém os processos de transferência de calor turbulenta ficam restritos somente dentro da camada limite turbulenta que por sua vez força a camada limite térmica a ter o mesmo tamanho! Isto causa uma modificação nas escalas invalidando a analogia de Reynolds.



Escala Interna para Temperatura, t^* e t^+



- A escala própria para a flutuação de velocidade é dada pela ‘velocidade de atrito’, $v^* = (\tau_w/\rho)^{(1/2)} \sim u'^2 \sim v'^2$
- De forma análoga busca-se uma escala para a temperatura.
- Foi visto que o fluxo de calor turbulento é expresso por:

$$\dot{q}'' = \rho C_p v' t'$$

- Pode-se definir uma temperatura de referência, t^* ‘friction temperature’,

$$\dot{q}'' = \rho C_p \overline{v' t'} \quad \rightarrow \quad t^* = \frac{\dot{q}_w''}{\rho C_p v^*}$$

- onde q_w é o fluxo de calor na parede, (W/m²).
- A temperatura, em termos das variáveis internas passa a ser:

$$t^+ = T/t^*$$



Sub-Camada Laminar – ‘Inner Law’, $y^+ Pr < 5$



• **Sub-Camada Laminar** - muito próximo da parede a turbulência é amortecida e o escoamento é dominado pela difusão molecular (μ e k). Isto vale para distâncias muito próximas da parede, $y^+ < 5$.

• **Sub-Camada Laminar** – fluxo de calor constante e devido somente a condução molecular, k :

$$\dot{q}_w'' = k \frac{T - T_w}{y} \quad \rightarrow \quad t^+ = Pr \cdot y^+$$

onde:

$$t^+ = \frac{T - T_w}{t^*}; \quad t^* = \frac{\dot{q}_w''}{\rho C_p u^*}; \quad y^+ = \frac{y \cdot u^*}{\nu}; \quad \alpha = \frac{k}{\rho C_p} \quad e \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

observa-se também na sub-camada laminar que:

$$\frac{t^+}{u^+} = Pr$$



Região Logarítmica Térmica



- Região afastada da parede de modo que os efeitos de difusão molecular sejam desprezíveis.
- Porém suficientemente próxima da parede de modo que os efeitos inerciais do escoamento (aceleração de velocidades ou gradientes de pressão) não sejam dominantes.
- Isto faz que nesta região o fluxo de calor por difusão seja muito menor que por turbulência.
- Além disto, q é constante.

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP



Região Logarítmica - Térmica



- Considera-se que a temperatura relativa a parede, $(T-T_w)$ depende somente de:
- τ_w , a tensão na parede (N/m^2);
- q_w , fluxo de calor na parede (W/m^2);
- y , distância da superfície (m);
- ρ , μ e k ; densidade, viscosidade e condutividade térmica

Da análise dimensional:

$$\frac{T - T_w}{t^*} = t^+ = f_T \left(\underbrace{\frac{y \cdot v^*}{\nu}}_{y^+}, \underbrace{\frac{\mu C_p}{k}}_{Pr}, \underbrace{\frac{\dot{q}_w''}{v^* \tau_w}}_{Bq} \right)$$

- onde Bq representa a razão entre o fluxo de calor e trabalho de atrito (dissipação de energia): para baixas velocidades $Bq \rightarrow 0$

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP



Argumento de Milikan (1939) – (veja Panton p/ detalhes)



- A região log faz o casamento entre a camada interna e a camada externa.
- Para que haja um encontro (casamento) entre as camadas é necessário que as funções f e g sejam coincidentes em alguma região!
- A igualdade pode ser posta em termos dos gradientes de velocidades e de temperatura para o momento e energia:

$$\frac{y}{v^*} \frac{\partial U}{\partial y} = \underbrace{y^+ f'(y^+)}_{\text{inner}} = \underbrace{-\eta g'(\eta)}_{\text{outer}} = \text{constante}$$

$$\frac{y}{t^*} \frac{\partial T}{\partial y} = \underbrace{y^+ f'(y^+, Pr)}_{\text{inner}} = \underbrace{-\eta g'(\eta, Pr)}_{\text{outer}} = \text{constante}$$

- As duas representações podem se supororem se as funções f' e g' forem constantes em alguma região.



Lei de Parede Térmica, $y^+ Pr > 30-50$



- O valor da constante para lei hidrodinâmica é $1/\kappa = 1/0.41$ (constante de Von Kármán), enquanto que para lei térmica denomina-se $1/\kappa_T$:

$$\frac{y}{v^*} \frac{\partial U}{\partial y} = \text{constante} = \frac{1}{\kappa} \rightarrow$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \cdot \text{Ln}(y^+) + B$$

$$\frac{y}{t^*} \frac{\partial T}{\partial y} = \text{constante} = \frac{1}{\kappa_T} \rightarrow$$

$$t^+ = \frac{1}{\kappa_T} \text{Ln}(y^+) + C_T(Pr)$$

- Isto requer que y^+ e seu análogo térmico, $y^+ Pr$, sejam grandes.
- A condição $y^+ Pr > 30-50$ é melhor que $y^+ > 30-50$ somente.
- Esta última cria um conflito para $Pr \ll 1$ ($\delta h \ll \delta t$) que é evitado pela primeira.
- $C_T(Pr)$ é uma função de Pr molecular do fluido.



A razão κ/κ_T



- A razão entre as constantes k/k_T é:

$$\frac{\kappa}{\kappa_T} = \frac{v^*/(\partial U/\partial y)}{t^*/(\partial T/\partial y)} \equiv \frac{(v^*)^2/(\partial U/\partial y)}{(\dot{q}_w''/\rho C_p)/(\partial T/\partial y)}$$

- Reconhecendo que na região log:
- os efeitos de difusão molecular são desprezíveis e
- que a tensão e o fluxo de calor são constantes,
- pode-se então afirmar que razão entre as constantes k/k_T expressa a razão entre a tensão turbulenta e o gradiente médio de velocidades e o fluxo de calor turbulento e o gradiente médio de temperaturas:

$$\frac{\kappa}{\kappa_T} = \frac{\overline{u'v'}}{\overline{v't'}} \frac{(\partial U/\partial y)}{(\partial T/\partial y)}$$



Determinação de κ_T



A constante κ_T pode ser determinada pela expressão:

$$\frac{\kappa}{\kappa_T} = \frac{\overline{u'v'}}{\overline{v't'}} \frac{(\partial U/\partial y)}{(\partial T/\partial y)}$$

- entretanto, a obtenção experimental e simultânea do produto das flutuações de velocidade e de temperatura não é uma tarefa fácil e há poucos dados disponíveis na literatura.
- Porém, há outros meios de se determinar κ_T ...



A determinação de κ_T (II)



- Reconhecendo-se que as tensões turbulentas e os fluxos de calor turbulentos ocorrem em regiões onde há gradiente do campo médio de velocidades e temperatura,
- Boussinesq propôs modelar as tensões turbulentas a partir do gradiente do campo médio por meio de uma viscosidade turbulenta, μ_T a ser determinada;

$$\tau = \rho \overline{u'v'} = \mu_T \frac{dU}{dy}$$

- Similarmente pode-se modelar os fluxos de calor turbulentos pela introdução da condutividade térmica turbulenta, k_T , a ser determinada;

$$\dot{q}'' = \rho C_p \cdot \overline{v't'} = \kappa_T \frac{dT}{dy}$$



A Determinação de κ_T (III)



- Substituindo as definições de tensão e fluxo de calor turbulentos na razão dos k's:

$$\frac{\kappa}{\kappa_T} = \frac{\overline{u'v'}/(\partial U/\partial y)}{\overline{v't'}/(\partial T/\partial y)} = \frac{(\mu_T/\rho)}{k_T/\rho C_p} \equiv \frac{\nu_T}{\alpha_T} = Pr_T$$

- Onde Pr_T é o número de Prandtl turbulento, definido acima de maneira similar ao Prandtl molecular.
- Tal como μ_T , k_T ou ν_T e α_T , a viscosidade e condutância turbulentas NÃO SÃO PROPRIEDADES DO FLUIDOS mas dependem DO CAMPO DE ESCOAMENTO.

$$\frac{1}{\kappa_T} = \frac{Pr_T}{\kappa}$$



A Determinação de Pr_T



- A lei de parede térmica é então re-escrita em função do Pr_T :

$$t^+ = \frac{Pr_T}{\kappa} \ln(y^+) + C_T(Pr)$$

- Dados de t^+ e y^+ são obtidos facilmente por meio de experimentos.
- Fazendo-se um ajuste linear entre t^+ e $\ln y^+$, obtêm-se uma reta cuja inclinação é Pr_T/κ .
- Esta é a forma mais comum de se determinar Pr_T para escoamentos próximos a parede. De fato ela é uma determinação indireta pois não calcula diretamente a razão entre as grandezas turbulentas e os gradientes do campo médio.



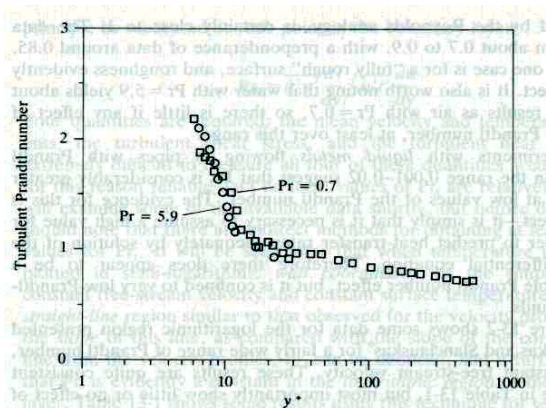
A idéia atrás da definição de Pr_t



- Para região log, onde os efeitos de difusão molecular são desprezíveis, espera-se encontrar uma analogia entre o transporte turbulento de momento e energia.
- Assim, a difusão turbulenta de momento e calor devem ser similar pois ambas ocorrem pela presença dos turbilhões.
- Note que um turbilhão que se move transversalmente ao escoamento principal perde calor a uma taxa similar aquela que ele perde momento.
- Espera-se portanto que Pr_t seja próximo da unidade na região log.
- Também espera-se que Pr_t seja constante uma vez que q_t e τ são constantes na região log.
- Isto não é 100% verdadeiro mas também não está 'muito longe' da verdade ...

- Evidências experimentais para uma placa plana, sem gradiente de pressão e sem injeção de massa.
- Dados experimentais para região log.
- Experimentos com ar (Pr = 0.71) e água (Pr = 5.91) mostraram que Pr_t variou entre 0.7 e 0.9 isto é: $0.7 \leq Pr_t \leq 0.9$.
- O valor mais aceito para placa plana é **Pr_t = 0.85** para região log.

- A figura mostra valores experimentais de Pr_t para ar e água numa placa plana sem grad. de pressão.
- Os valores de y⁺ para ar variam de $6 \leq y^+ \leq 600$ enquanto que para água variam de: $8 \leq y^+ \leq 30$ (pq. $\delta_t \ll \delta_h$ para água)





Pr_t na camada viscosa (viscous-sublayer)



- Pr_t na região log é aproximadamente constante e independente do Pr molecular do fluido, pelo menos para a faixa $0.7 < Pr < 5.9$.
- Na camada viscosa onde os efeitos de difusão molecular e turbulento são igualmente importantes observa-se um crescimento de Pr_t .
- Isto indica que na camada viscosa os mecanismos de transporte de momento e calor se diferenciam bastante!
- O sucesso do cálculo de uma camada limite térmica depende da inclusão precisa da variação de Pr_t na camada viscosa.



Diferenças nos mecanismos de transporte de momento e calor



- Os turbilhões transferem quantidade de movimento tanto pela ação da viscosidade como pelas flutuações de pressão.
- Entretanto na região log ou mais afastados ainda da parede o único mecanismo responsável pela transferência de quantidade de movimento são as flutuações de pressão.
- Por outro lado, os turbilhões transportados pelas flutuações de pressão transferem energia somente pela difusão térmica molecular, (condução térmica).



Diferenças nos mecanismos de transporte de momento e calor



- Como os mecanismos são distintos não é surpresa encontrar Pr_t diferente de 1 mesmo quando $Pr = 1$.

- Reconhecendo que
$$Pr_t = \frac{\overline{u'v'}}{\overline{v't'}} \frac{(\partial U / \partial y)}{(\partial T / \partial y)}$$

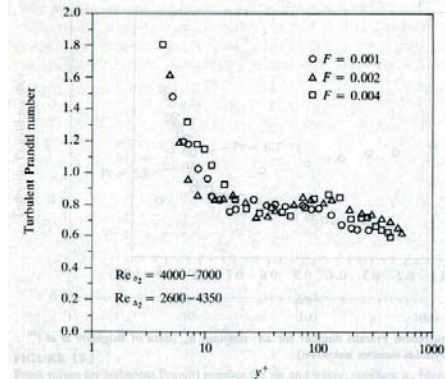
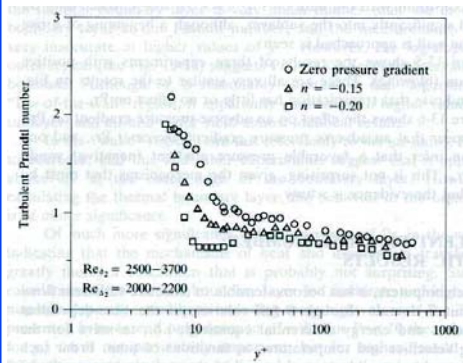
- É possível um turbilhão perder toda sua Q.M. na dir. (x) mas ainda ter velocidade na dir. (y) e portanto transportar calor em (y) numa distância maior que a Q.M. na dir. (x), neste cenário espera-se $Pr_t < 1$.
- Por outro lado se o fluido tiver uma condutibilidade térmica elevada, o turbilhão pode perder calor mais rapidamente que Q. M. enquanto que ele viaja uma distância e portanto $Pr_t > 1$.



Efeitos de Gradiente de Pressão e Injeção de Massa no Pr_t



- Considerando a região log, pode-se dizer que o Pr_t :
- Não é sensível a injeção de massa na parede (transpiração). Seu valor permanece constante em aproximadamente 0.85.
- Para grad. pressão adverso a tendência é diminuir Pr_t , enquanto que para grad. pressão favorável (negativo) a tendência é aumentar Pr_t .
- Estes efeitos ampliam sua influência em Pr_t na região da camada viscosa.



IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP

A constante $C_T(\text{Pr})$

- Utilizando-se a teoria de comprimento de mistura, pode-se mostrar que a constante $C_T(\text{Pr})$ que surge na lei térmica para região logarítmica é dada por:

$$C_T(\text{Pr}) = y_{\text{crit}}^+ \cdot \text{Pr} - \frac{\text{Pr}_t}{\kappa} \ln(y_{\text{crit}}^+)$$

- A distância y_{crit}^+ ocorre dentro da camada viscosa;
- O modelo supõe que para $y^+ < y_{\text{crit}}^+$ o escoamento é dominado pela difusão molecular e para $y^+ > y_{\text{crit}}^+$ a difusão molecular é desprezível e só age a ação dos turbilhões.
- Fisicamente não ocorre esta distinção, mas para o modelo ela é conveniente. Valores de y_{crit}^+ para placa plana sem grad. Pressão e injeção de massa foram determinados experimentalmente para ar e água:

| Pr | Pr_t | y_{crit}^+ |
|-----|---------------|---------------------|
| 0.7 | 0.85 | 13.2 |
| 5.9 | 0.85 | 7.55 |

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP



Lei Térmica



- Para uma placa plana, sem gradiente de pressão e injeção de massa,
- $C_T(\text{Pr})$ é (para ar) : $13.2\text{Pr} - 5.34$
- $C_T(\text{Pr})$ é (para água) : $6.55\text{Pr} - 3.95$
- O Pr_t turbulento para água ou ar é $\text{Pr}_t = 0.85$
- Substituindo-se estas relações na lei-log térmica encontra-se que para o ar e para água elas são, respectivamente:

$$t^+ = 2.075 \cdot \text{Ln}(y^+) + (13.2 \cdot \text{Pr} - 5.34) \quad (\text{ar})$$

$$t^+ = 2.075 \cdot \text{Ln}(y^+) + (7.55 \cdot \text{Pr} - 3.95) \quad (\text{água})$$

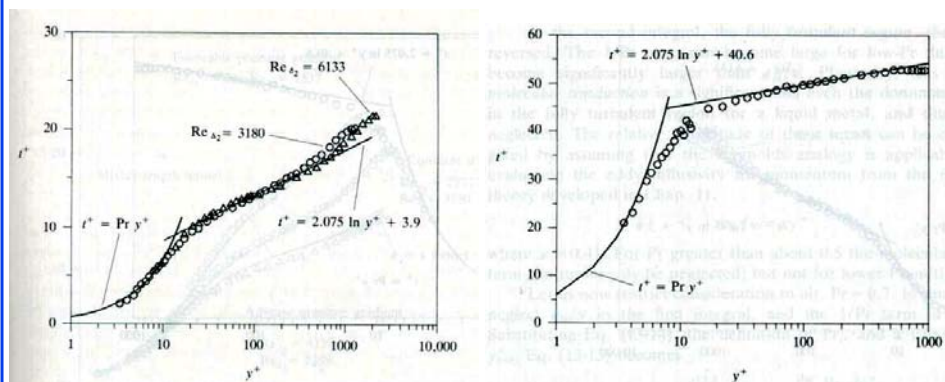
IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP



Representação da Lei-Log Térmica para Placa Plana



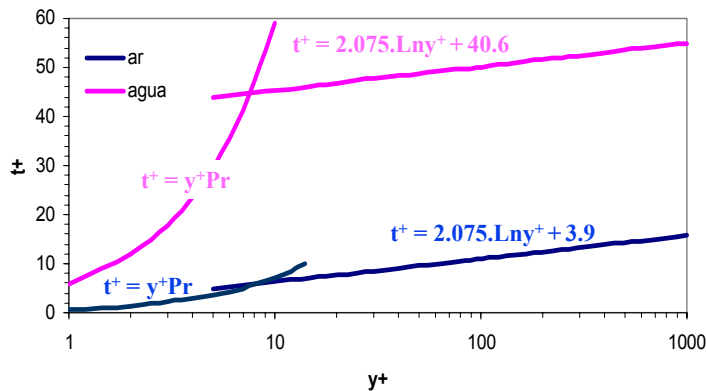
Dados experimentais para ar e água, sem grad P e injeção massa



IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP

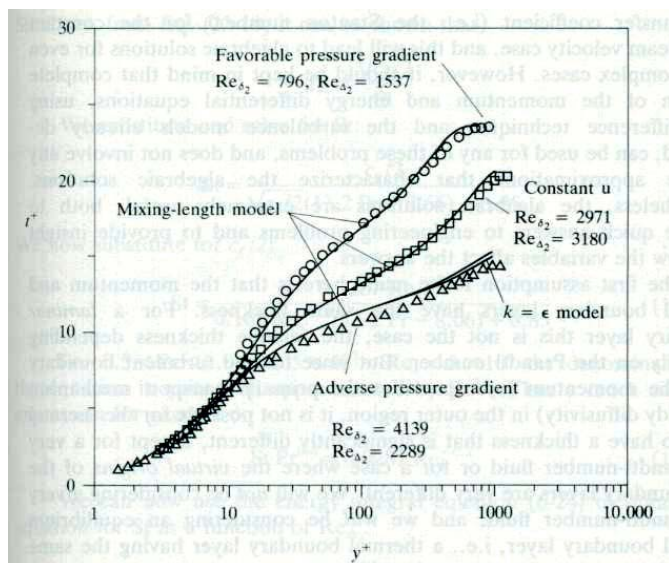
Representação da Lei-Log Térmica para Placa Plana

O gráfico abaixo mostra simultaneamente as lei-log térmicas para ar e água, de acordo com as relações propostas. Nota-se que elas não ‘colapsam’ sobre uma mesma curva, como ocorria com a lei-log hidrodinâmica!



IM – 450 ‘Modelagem em Turbulência’ - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP

Efeito do Grad. Pressão na Lei-Log Térmica



IM – 450 ‘Modelagem em Turbulência’ - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP



Comentários Efeito do Grad Pressão



- Cada curva representa um gradiente de pressão.
- Observa-se que todas as curvas apresentam uma região log (região t^+ linear com $\ln y^+$)
- Entretanto os perfis t^+ x y^+ se diferenciam de u^+ x y^+ porque eles não ‘colapsam’ sob uma única curva na região log.
- Portanto a lei-log térmica não possui a mesma conotação que a lei-log da quantidade de movimento tem.
- Destaca-se aqui que as lei-log térmica aqui desenvolvidas aplicam-se para placas planas com velocidade constante (s/ grad. pres e injeção de massa)

IM – 450 ‘Modelagem em Turbulência’ - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP



Lei-Log para Escoamento em Tubos Seção Circular

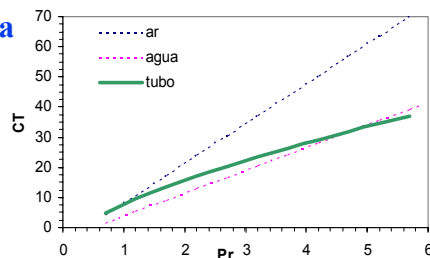


De forma geral a lei-térmica é
$$t^+ = \frac{Pr_t}{\kappa} \ln(y^+) + C_T(Pr)$$

- Onde $C_T(Pr)$ é: $13.2Pr - 5.34$ (ar) e $6.55Pr - 3.95$ (água)
- Para estender a aplicação para fluidos com Pr variando entre 0.71 a 6.0 (gases e líquidos) foi proposto uma função $C_T(Pr)$

$$C_T(Pr) = 13.39 \cdot Pr^{2/3} - 5.66$$

que case com os limites impostos para $Pr = 0.71$ e $Pr = 5.9$



IM – 450 ‘Modelagem em Turbulência’ - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP



Lei-Log para Escoamento em Tubos Seção Circular



- Nikuradse propôs que o Pr_t que melhor se ajusta aos dados experimentais de troca térmica em tubos é $Pr_t = 0.88$.
- Considerando que evidências experimentais não mostram uma dependência de Pr_t com o Pr molecular, 0.88 é utilizado para qualquer fluido dentro da faixa $0.7 < Pr < 6.0$.
- A lei-log térmica para tubos pode então ser dada na forma:

$$t^+ = 2.2 \cdot \ln(y^+) + 13.39 \cdot Pr^{2/3} - 5.66$$

- O perfil de temperatura não é preciso na linha de centro do tubo. (Sendo simétrico, dt/dr p/ $r=0$ deveria ser nulo e não é!)
- A relação acima também não é válida para a camada viscosa.

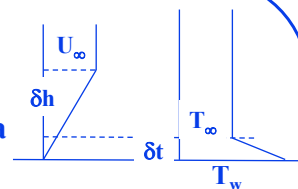
IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP



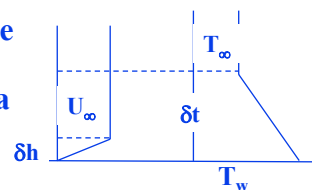
Limites extremos de Pr



- Para $Pr \gg 1$, (óleos em geral) pode-se encontrar uma c.l. térmica muito menor que a hidrodinâmica, portanto todo gradiente térmico pode estar dentro da camada viscosa ou mesmo na sub-camada laminar hidrodinâmica, fazendo com que não haja transporte turbulento de calor!



- Para $Pr \ll 1$, (metais líquidos) pode-se encontrar uma c.l. térmica muito maior que a hidrodinâmica, portanto todo gradiente térmico deve estar dentro da região externa (turbulenta) hidrodinâmica. Além disto, como são os turbilhões que transportam o calor, δt é limitado por δh , isto é, $\delta t \sim \delta h$



IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP



Limites extremos de Pr



- A distância da parede, y^+ define as camadas: viscosa, log e externa (turbulenta).
- Existem as camadas térmicas análogas: viscosa, log e externa (turbulenta).
- Devido ao efeito de Pr (molecular) a extensão (ou distância da parede) destas camadas não coincide.
- Aproxima-se $\delta h/\delta t \sim Pr$
- Pode-se dizer então que:

Transf de calor por difusão molecular

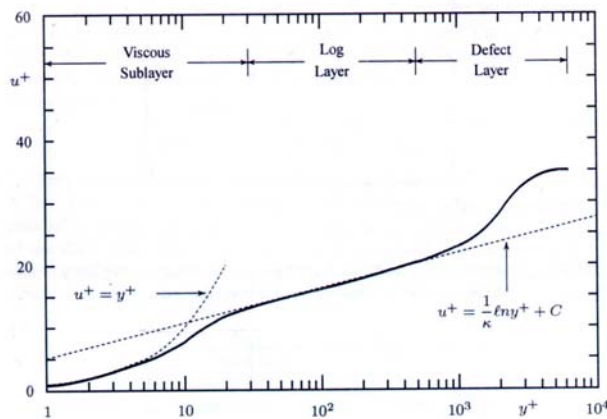
$$y^+Pr < 5 \quad \rightarrow q \sim kdT/dy$$

Transferência de calor por difusão turbulenta,

$$y^+Pr > 30-50 \quad \rightarrow q \sim rCpu't'$$



Regiões da Camada Limite



Hidrodinâmica

- Sub C. Lam. $y^+ < 5 \quad \rightarrow \tau \sim \mu dU/dy$
- Buffer $5 < y^+ < 30 \rightarrow \tau \sim \mu dU/dy + \rho u'v'$
- Log $y^+ > 30-50 \rightarrow \tau \sim \rho u'v'$

Térmica

- $y^+Pr < 5 \quad \rightarrow q \sim kdT/dy$
- $5 < y^+Pr < 30 \rightarrow q \sim kdT/dy + \rho C_p u't'$
- $y^+Pr > 30-50 \rightarrow q \sim \rho C_p u't'$

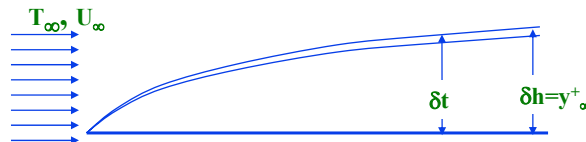
Note que a camada viscosa é composta pela sub-camada laminar e o buffer. Na sub-camada laminar somente efeitos de difusão molecular prevalecem.

APLICAÇÕES DA 'T-LAW'

IM – 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP

Transferência de Calor numa Placa Plana

- Considere ar escoando sobre uma placa plana com velocidade uniforme, U_∞ , a borda externa da C.L. é denominada por y_∞^+ :



- Os perfis de velocidade e temperatura, para região log e esteira são dados por:

$$u^+ = 2.44 \cdot \ln(y^+) + 5.5$$

$$t^+ = 2.075 \cdot \ln(y^+) + 3.9$$

IM – 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP



Transferência de Calor numa Placa Plana (II)



- Na borda externa da C.L., $y^+ = y_\infty^+$, os perfis de velocidade e temperatura são:

$$u_\infty^+ = 2.44 \cdot \ln(y_\infty^+) + 5.5 + 2.3$$

$$t_\infty^+ = 2.075 \cdot \ln(y_\infty^+) + 3.9 + 2.3$$

- Onde o fator 2.3 é acrescido as leis-log para corresponder ao acréscimo dado pela esteira.
- Assume-se que as esteiras hidrodinâmica e térmica são igualmente representadas pelo fator 2.3.



Transferência de Calor numa Placa Plana (III)



- Reconhecendo que: $u_\infty^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{C_f/2}} = 2.44 \cdot \ln(y_\infty^+) + 5.5 + 2.3$

$$t_\infty^+ \equiv \frac{\sqrt{C_f/2}}{St} = 2.075 \cdot \ln(y_\infty^+) + 3.9 + 2.3$$

- Eliminando-se $\ln(y_\infty^+)$ de ambas as equações encontra-se:

$$St = \frac{C_f/2}{\left(\sqrt{C_f/2}\right) \cdot (13.2 \cdot Pr - 8.66) + 0.85}$$

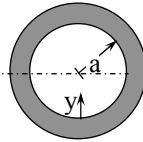
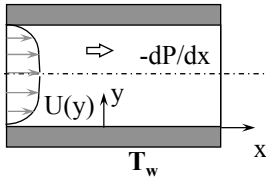
- Substituindo-se $C_f/2$ por $0.0287 Re_x^{-0.2}$

$$St = \frac{0.0287 \cdot Re_x^{-0.2}}{0.169 \cdot Re_x^{-0.1} \cdot (13.2 \cdot Pr - 8.66) + 0.85} \cong \frac{0.0287 \cdot Re_x^{-0.2}}{Pr^{-0.4}}$$

- A aproximação do denominador é válida para gases, $0.5 < Pr < 1.0$ e $5 \times 10^5 < Re_x < 5 \times 10^6$



Transferência Calor num Tubo c/ Seção Circular



O tubo possui raio 'a'. A distância da parede é $y = a - r$ onde r é a coordenada radial contada a partir do centro.

- A parede do tubo está mantida a temperatura T_w enquanto que a temperatura de mistura da seção transversal é T_m .
- A temperatura no centro do tubo, $y = a$;

$$t_c^+ \equiv \left(\frac{T_c - T_w}{T_m - T_w} \right) \cdot \left(\frac{U_c}{U} \right) \cdot \left(\frac{v^*}{U_c} \right) \cdot \frac{1}{St} = \frac{Pr_t}{\kappa} \cdot \ln(a^+) + C_T(Pr)$$

- Note que o fluxo de calor foi definido em termos da temperatura de mistura; $q = h(T_m - T_w)$ e que $St = h/(\rho \cdot C_p \cdot U_{\text{medio}})$



Transferência Calor num Tubo c/ Seção Circular (II)



- Uma primeira aproximação considera-se que a razão de temperaturas e de velocidades seja aproximadamente um:

$$\left(\frac{T_c - T_w}{T_m - T_w} \right) \cdot \left(\frac{U_c}{U} \right) \cong 1$$

- Além disto, utilizando a lei-log p / velocidade temos que:

$$\left(\frac{v^*}{U_c} \right) \cdot \frac{1}{St} = Pr_t \cdot \left[\frac{U_c}{v^*} - B \right] + C_T(Pr)$$

- Isolando para St encontra-se:

$$St = \frac{(v^*/U_c)^2}{Pr_t + (v^*/U_c) \cdot (C_T(Pr) - B)}$$



Transferência Calor num Tubo c/ Seção Circular (III)



- A razão entre a velocidade de atrito e a do centro do tubo:

$$\frac{v^*}{U_c} \equiv \frac{v^*}{\bar{U}} \left(\frac{\bar{U}}{U_c} \right) = \frac{\bar{U} \sqrt{C_f/2}}{\bar{U}} \cdot \left(\frac{\bar{U}}{U_c} \right) \cong \sqrt{C_f/2}$$

- O Pr_t para tubo: $Pr_t = 0.88$
- A constante B da lei-log da velocidade: $B = 5.5$
- A constante de von Kàrmàn: $k = 0.41$
- A função $C_T(Pr)$ para tubo: $CT(Pr) = 13.39 Pr^{(2/3)} - 5.66$
- Substituindo estes valores na expressão para St:

$$St = \frac{C_f/2}{0.88 + 13.39 \cdot (Pr^{2/3} - 0.78) \cdot \sqrt{C_f/2}}$$



Transferência Calor num Tubo c/ Seção Circular (IV)



- Sendo $Nu = St \cdot Re \cdot Pr$, a expressão na forma do Nu:

$$Nu = \frac{Re \cdot Pr \cdot (C_f/2)}{0.88 + 13.39 \cdot (Pr^{2/3} - 0.78) \cdot \sqrt{C_f/2}}$$

- onde Re denota n. Reynolds baseado no diâmetro do tubo.
- Para $3 \times 10^4 < Re_d < 10^6$, $C_f/2 = 0.023 Re_d^{-0.2}$
- Substituindo a definição de $C_f/2$ também encontra-se:

$$Nu = \frac{Re_d^{0.8} \cdot Pr}{0.88 + 2.03 \cdot (Pr^{2/3} - 0.78) \cdot Re_d^{-0.1}}$$

- Para gases, $0.6 < Pr < 1.0$ a expressão acima pode ser simplificada para:

$$Nu = 0.022 \cdot Re_d^{0.8} \cdot Pr^{0.5}$$