Escoamentos Limitados por Paredes & as Multiplas Escalas

• **Em escoamentos com paredes sólidas a viscosidade impõe na parede a condição de não-deslizamento: a vel. do fluido na parede deve ser igual a vel. da parede!**

•**Espera-se portanto que próximo da parede o escoamento seja dominado pela viscosidade e um comprimento caracteristico seja a razão entre a visc. cinemática e flutuação vel. : n/u**

• **Para altos Re, a espessura da camada limite, d, é muito maior que a escala n/u , consequentemente o problema apresenta duas escalas.**

Escoamentos Limitados por Paredes & as Multiplas Escalas

• **O comportamento destes perfis é completamente distinto de perfis laminares**

• **Todavia eles possuem uma característica em comum: uma mudança de concavidade em y/d @ 0.2**

• **Prandtl e Von Kármám deduziram que há duas escalas que governam o escoamento e definiram três camadas:**

Escoamentos Limitados por Paredes
& as Multiplas Escalas

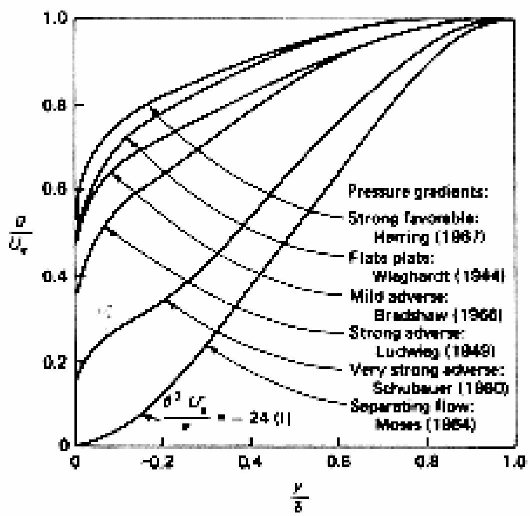


FIGURE 6-8 Experimental turbulent-boun layer velocity profiles for va pressure gradients. [*Data Coles and Hirst (1968).*]

As Camadas & Suas Escalas

- **As três camadas surgem devido as possíveis combinaçoes dos dois comprimentos característicos independentes: aquele controlado pela viscosidade molecular n/u e aquele pelas dimensões dos turbilhões y/d**

Camada Interna (Inner Layer):
aquela onde as deformações devido a viscosidade molecular dominam. O comprimento viscoso: n/u é muito maior que a distância y da parede, yu/n<< 1 , além disto, a espessura da C.L. d, é muito maior que y; y/d << 1.

Camada Externa (Outer Layer):
aquela onde as deformações devido aos turbilhões dominam. O comprimento viscoso n/u é muito menor que a distância y da parede, yu/n>> 1 ,além disto, a espessura da C.L. d, é da ordem da distância ; y/d @1.

Camada Intermediária (Overlap Layer or Inertial Sublayer) :
onde ambos efeitos co-existem.Nesta região, yu/n>> 1 porém y/d << 1.

As Camadas & Suas Escalas

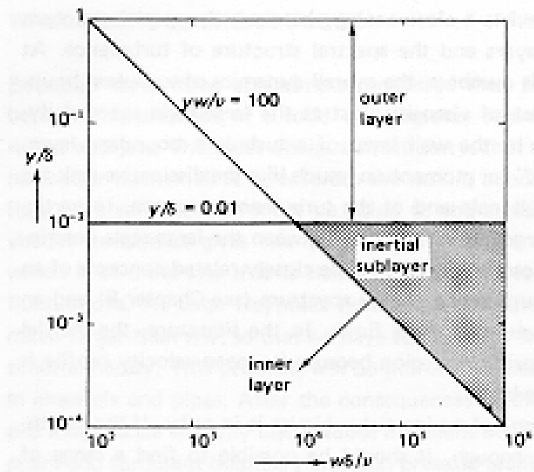


Figure 5.1. An inertial sublayer can exist only if the Reynolds number is large enough. For illustrative purposes, yw/ν >> 1 and y/δ << 1 have been interpreted as yw/ν > 100, y/δ < 0.01. For many practical applications, the limits do not need to be as strict as this.

Camadas Interna e Externa: um ajuste baseado em análise dimensional

• **As análises que sucedem são válidas para o limite assintótico: isto é, somente para escoamentos com Re elevados!** $Re^* = \frac{\delta \cdot v^*}{\nu} \to \infty$

• INNER LAYER : o perfil de velocidades depende da tensão na parede, das propriedades do fluido (ρ e μ) e da distância y da parede mas não dos parâmetros da corrente livre, isto é, do gradiente de pressão.

$$\overline{U} = f(\tau_w, \rho, \mu, y) \rightarrow \frac{\overline{U}}{v^*} = f\Big(\underbrace{yv^*/\nu}_{y^+}\Big); \quad v^* = \underbrace{\sqrt{\tau_w/\rho}}_{\text{vel. atrito}}$$

• OUTER LAYER : a presença da parede causa uma redução na velocidade local em relação a velocidade externa, Ue, independentemente de μ mas dependente da tensão na parede, da espessura da camada limite δ e do gradiente de pressão externo a camada limite:

$$\underbrace{U_e - \overline{U}}_{\text{deficit de velocidade}} = g\left(\tau_w, \rho, \delta, y, \frac{dP_e}{dx}\right) \rightarrow \frac{U_e - \overline{U}}{v^*} = g\left(\frac{y}{\delta}, \xi\right); \quad \xi = \frac{\delta}{\tau_w} \cdot \frac{dP_e}{dx}$$

A Camada Intermediária - Overlap Layer

• **OVERLAP LAYER: é uma região onde as funções da 'inner layer' e 'outer layer' se mergem. Isto é obtido fazendo-se o casamento do limite da expansão interna quando y+ infinito com o limite da expansão externa quando y/d vai p/ zero**

$$\overline{U}_{inner} = \overline{U}_{outer} \rightarrow \frac{\overline{U}}{v^*} = \underbrace{f\left(\frac{\delta v^*}{\nu}\frac{y}{\delta}\right)}_{inner} = \underbrace{\frac{U_e}{v^*} - g\left(\frac{y}{\delta}\right)}_{outer}$$

• **A igualdade é verdadeira somente p/ funções log; (o produto e a soma de dois parâmetros são iguais para funções log)**
• **Expressas em termos das var. internas ou externas:**

• **var. internas: k=0.41 e B=5.0 são const. universais**

• **var. externas: A depende do grad. pressão, (x)**

$$\frac{\overline{U}}{v^*} = \frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{yv^*}{\nu}\right) + B$$

$$\frac{U_e - \overline{U}}{v^*} = -\frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{y}{\delta}\right) + A(\xi)$$

Argumento de Milikan (1939) – (veja Panton p/ detalhes)

- **Para que haja um encontro (casamento) entre as camadas é necessário que as funções f e g sejam coincidentes em alguma região!**
- **A igualdade pode ser posta em termos do gradiente de velocidades:**

$$\frac{y}{v^*}\frac{\partial \overline{U}}{\partial y} = \underbrace{y^+ f'(y^+)}_{inner} = \underbrace{-\eta g'(\eta)}_{outer} = \text{constante}$$

•As duas representações podem se suporporem se as funções f'e g' forem constantes em alguma região.

•A igualdade é verdadeira somente p/ funções log;

A Camada Intermediária - Overlap Layer

- **Millikan mostrou que o gradiente da velocidade na camada intermediária é expresso por:**

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\mathbf{v}^*}{\mathrm{k}\mathbf{y}}$$

- **onde k é a constante de von Kàrmàn, k = 0.41. Após a integração encontra-se que**

A Camada Intermediária - Overlap Layer

- **var. internas: k=0.41 e B =5.0 são const. universais**

$$\frac{\overline{U}}{v^*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y v^*}{\nu}\right) + B$$

- **var. externas: A depende do grad. pressão, (x)**

$$\frac{U_e - \overline{U}}{v^*} = -\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{\delta}\right) + A(\xi)$$

A Camada Intermediária - Overlap Layer

- **A camada intermediária também é conhecida por ‘inertial sublayer’ . Esta denominação deve-se ao fato que na camada intermediária (região log) as tensões turbulentas são muitas vezes superiores aquelas de origem viscosa, daí o nome de sub-camada inercial.**

- **Uma das características importantes é que nela a tensão de cisalhamento,** t**, é aproximadamente constante!**

- **É considerada um dos grandes sucessos da análise em escoamentos turbulentos pelo caráter universal que esta lei apresenta.**

LEIS DE PAREDE

Detalhes da Lei de parede- Inner Law

- A lei interna ‘inner law’ sai da condição de não-deslizamento na parede para encontrar o ‘overlap’ ou lei log em aproximadamente $y^+ \approx 30$.

- Muito próximo da parede a turbulência é amortecida e a camada limite é dominada pelas forças viscosas.

- Sub-Camada Laminar - Tensão constante:
- ocorre em distâncias muito próximas da parede, $y^+ < 5$

$$\tau_w = \frac{\mu U}{y} \rightarrow U^+ = y^+$$

Detalhes da Lei de parede - Inner Law

- Sua espessura é estimada em: $\delta=5(\nu/v^*)$. Numa placa plana em ar com $v^*=1.24$ m/s, a subcamada é 0.06 mm enquanto que a camada limite é de 3 cm.

- Buffer Layer- o perfil não é linear nem turbulento, $5< y^+ <30$

Spalding (1961) propôs a eq. abaixo válida da parede até $y^+ \approx 100$

Nesta região a tensão de origem viscosa e turbulenta são de mesma ordem de grandeza.

$$\mathbf{y}^+ = \mathbf{U}^+ + \mathbf{e}^{-\kappa \mathbf{B}} \left[\mathbf{e}^{\kappa \mathbf{U}^+} - \mathbf{1} - \kappa \mathbf{U}^+ - \frac{(\kappa \mathbf{U}^+)^2}{2} - \frac{(\kappa \mathbf{U}^+)^3}{6} \right]$$

Inner + Buffer + Overlap Layers

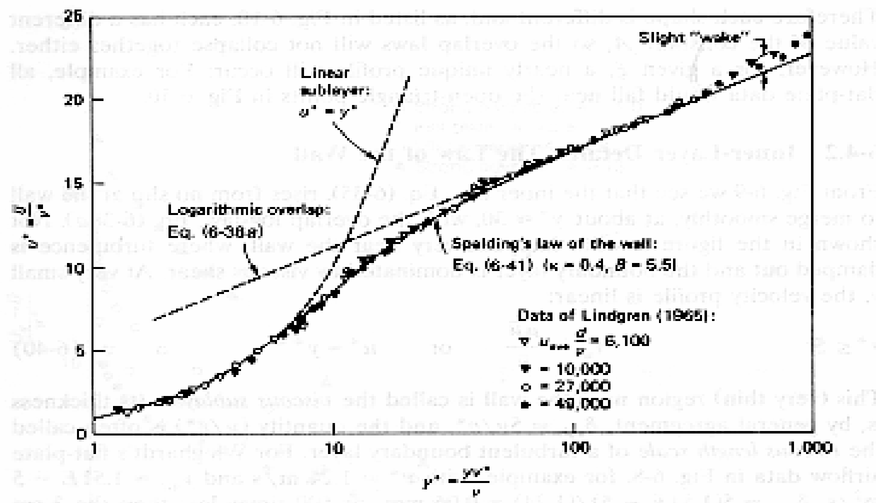
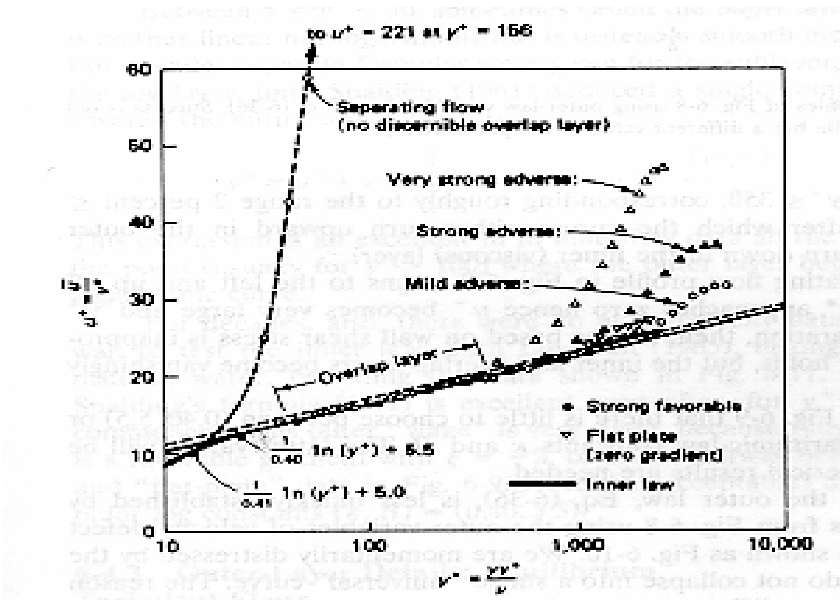


FIGURE 6-11
Comparison of Spalding's inner-law expression with the pipe-flow data of Lindgren (1965).

Overlap ou Região Log: Perfis Velocidades

- **OVERLAP LAYER :** **o perfil de velocidades em termos das variáveis internas: $y^+=yv^*/n$; $u^+=U/v^*$.**
- **A região de 'overlap'corresponde a 35 < y^+ < 130 - 350, isto equivale aproximadamente a 2% < y/d < 20%,**
- **Acima desta faixa está na 'outer layer' e abaixo a 'inner layer'**
- **Destaca-se o fato que para escoamentos próximos da separação, a 'log- layer' quase que não existe porque t_w tende a zero, consequentemente o perfil cresce uma vez que v* zera.**

Overlap: Perfis Velocidades



Overlap: Perfis Velocidades

- Para valores de y^+ >70, as tensões são praticamente de origem turbulenta, a <u>viscosidade do fluido influi pouco</u>. Por isto esta camada também é conhecida por sub-camada inercial.
- Nela, a tensão turbulenta é 'aproximadamente' constante, isto é: $t @ t_w$ porém deve-se exclusivamente a parcela das tensões de origem turbulenta.

NONISOTROPIC "WALL" TURBULENCE 525

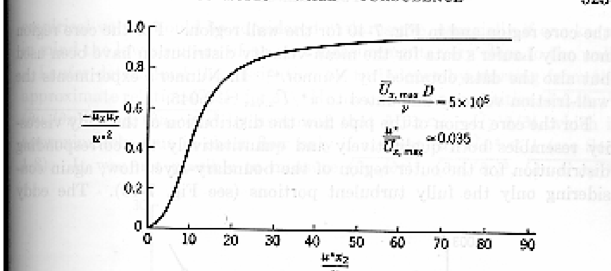


FIG. 7-38. Distribution of turbulence shear stress near the wall in pipe flow. (*Laufer, J.; reprinted from NACA Tech. Repts. 1174, p. 17, 1954, by permission of the National Advisory Committee for Aeronautics.*)

Camada Externa: Perfis de Velocidade

• **OUTER LAYER:**
o perfil de velocidades em termos das variáveis externas: y/d; Ue - U/v*

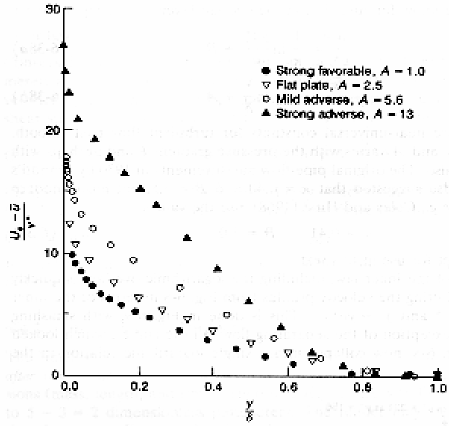


FIGURE 6-10
Replot of the velocity profiles of Fig. 6-8 using outer-law variables from Eq. (6-36). Success is not evident because each profile has a different value of the parameter ξ.

• **Os perfis de vel. não colapsam sobre uma única curva pq. para perfil há um diferente gradiente de pressão externo, (x):**

• x = -4.8 **favorável;** x = 0 **placa plana;** x = + 6.3 **levemente adverso;** x = + 29 **fortemente adverso;**

A Constante “A” da Lei Externa - Outer Law

•Para Re elevados, as características turbulentas do escoamento na camada externa ‘outer layer’ são independentes da viscosidade.

•Não é possível tornar a lei externa universal:constante depende do gradiente de pressão externo.

• Coles observou que o excesso de velocidade da ‘outer layer’ sobre a região logaritmica (overlap) apresentava uma forma de S também conhecida por esteira (wakelike).

A Constante “A” da Lei Externa- Outer Law

•Coles propôs uma função para o excesso de velocidade que deve ser adicionado a lei logarítmica para representar a região de ‘overlap e outer layer’:

$$U^{+} \cong \underbrace{\frac{1}{\kappa} Ln\left(y^{+}\right) + B}_{Overlap} + \frac{2\Pi}{\kappa} f\left(\frac{y}{\delta}\right);$$

$$f\left(\frac{y}{\delta}\right) \cong Sin^{2}\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right) \approx 3\left(\frac{y}{\delta}\right)^{2} - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^{3}$$

• onde Π é o parâmetro de Coles e está diretamente relacionado com a constante ‘externa ‘ A; $\Pi = \kappa A/2$

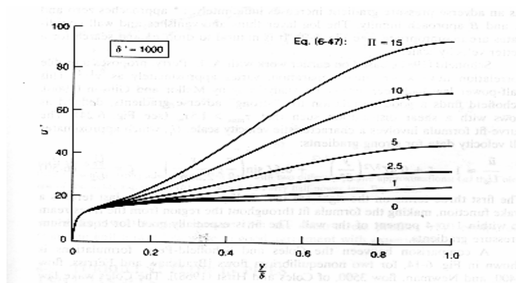


FIGURE 6-13
Turbulent velocity profiles computed from the Coles wall-wake formula, Eq. (6-47), assuming $\delta^{+} = 1000$. The curve for $\Pi = 0$ is the pure law of the wall from Eq. (6-41).

Comentários sobre as Leis

•Há considerável desvio desta lei para escoamentos próximo de pontos críticos (separação).

•As leis fornecem perfis de velocidade adimensionais em função das <u>incógnitas</u>: tensão na parede e parâmetro de Coles.

• Estes perfis em conjunto com equações auxiliares (conservação massa, eq. integrais ou diferenciais) constituem os modelos mais simples de escoamento turbulento.

Sumário das Leis

Região Interna

$$U^+ = y^+$$

interpolação Spalding:
subcamada laminar & buffer

$$y^+ = U^+ + e^{-\kappa B}\left[e^{\kappa U^+} - 1 - \kappa U^+ - \frac{(\kappa U^+)^2}{2} - \frac{(\kappa U^+)^3}{6}\right]$$

Região Logaritmica ou SubCamada Inercial

$$U^+ = \frac{1}{\kappa}\ln y^+ + B$$

k = 0.41 e B=5.0 (Coles 1951)
k = 0.40 e B=5.5 (Nikuradse 1930)

Região Externa

perfis de Coles,
Π≅0.45 placa plana
Π≅0 tubo

$$\frac{U_e - \overline{U}}{v^*} = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{y}{\delta}\right) + A$$

$$U^+ \cong \underbrace{\frac{1}{k} Ln\left(y^+\right) + B}_{Overlap} + \frac{2\Pi}{k} f\left(\frac{y}{\delta}\right);$$

Visualização das Estruturas Turbulentas

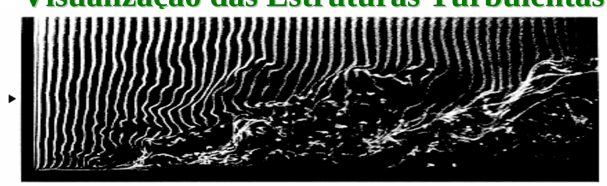
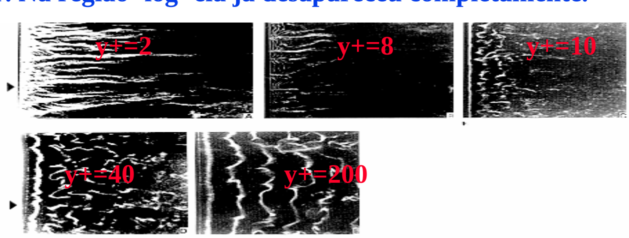


Fig. 34. Turbulent boundary layer along a flat plate (water, free stream velocity 20.4 cm/s, Re_θ = 990, hydrogen bubble method).

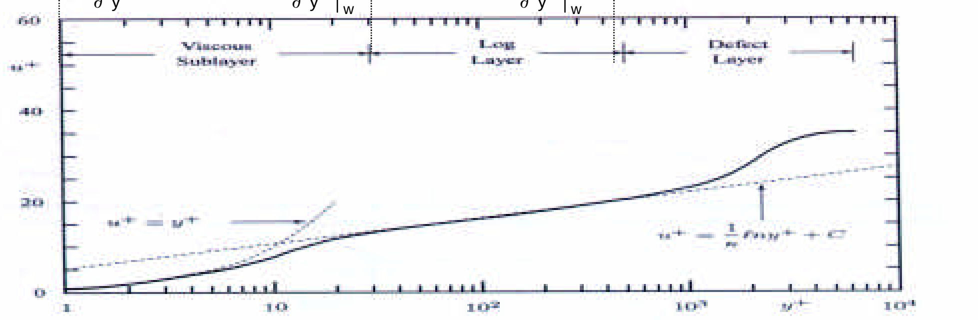
- **Estrutura da camada limite turbulenta (água, vel. livre 20.4 cm/s, Req=990. A seqüência de foto exibe a estrutura para a sub-camada viscosa (y^+=2), buffer layer (y^+=8) e sub-camada inercial (y^+=40 e 200).**
- **Na camada viscosa destacam-se, periodicamente, filetes na direção principal do escoamento. No buffer há intensa produção de turbulência e a estrutura de filetes começa a desaparecer. Na região ´log´ ela já desapareceu completamente.**



Comentários sobre as Leis (II)

região tensão cte. $t @ t_w$

$$\nu \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{u'v'} \cong \nu \frac{\partial U}{\partial y}\bigg|_w \qquad \overline{u'v'} \cong \nu \frac{\partial U}{\partial y}\bigg|_w$$



• A camada logarítmica (lei log) é a região da camada limite suficientemente próxima da superfície tal que os termos inerciais podem ser desprezados e ainda distante o suficiente para que a tensão viscosa possa ser muito menor que a tensão turbulenta. A tensão é constante.

• Muito próximo da parede, $y^+ < 5$, a tensão viscosa domina, a tensão é constante e a velocidade U = $t_w y/m$.

Comentários sobre as Leis (III)

• Grandezas como espessura da camada limite, d, ou diâ. duto D, a velocidade externa Ue ou outra escala média de velocidade não influenciam a camada log e a região interna .

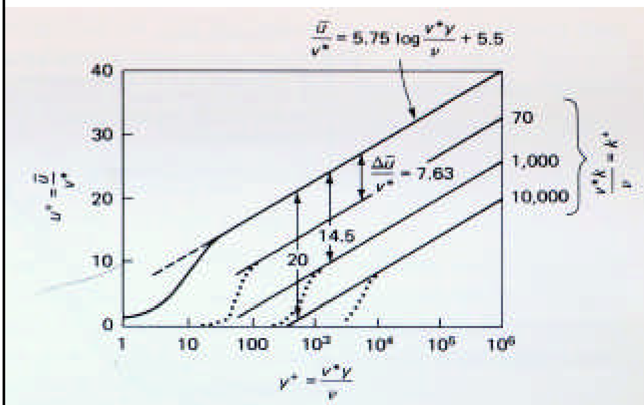
• Além do mais, o gradiente de pressão na parede e mesmo a história do escoamento a montante são também desprezados.

• Este comportamento geral foi confirmado por inúmeros experimentos e estas leis se constituem um dos alicerces da turbulência.
•Cabe observar que este comportamento é notável pois o único efeito do escoamento externo (defect layer, 80% da camada limite) é determinar t_w!

• Entretanto, pode-se esperar desvios de seu comportamento para escoamentos 'mal comportados', por exemplo próximos a pontos de separação.

• Nestas regiões, a sub-camada viscosa se estende consideravelmente no escoamento e o gradiente de pressão na direção do escoamento não pode ser desprezado.

Lei de Parede para Superfície Rugosa (I)



•A rugosidade influencia muito pouco esc. Laminar mas fortemente esc. Turbulentos.

• A rugosidade da superfície pode romper com a sub-camada viscosa e aumentar substancialmente o atrito.

k denota a altura da rugosidade

A região logarítmica ainda existe mas a medida que k+ cresce o coef. linear da reta desloca-se para baixo.

Lei de Parede para Superfície Rugosa (II)

•A lei log passa a ser escrita:

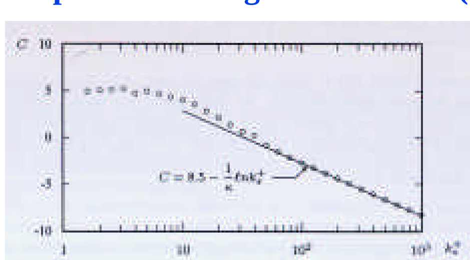
$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln\left(y^+\right) + C\left(k^+\right)$$

• A variação de C com k+ não é única (depende do tipo de rugosidade: areia uniforme, rebites, esferas, telas, etc) mas ela não é significativa.
•Três 'regimes rugosos' podem ser definidos:

$k^+ < 4$ parede lisa -> $C = 5.5$

$4 < k^+ < 60$ transição lisa-rugoso

$k^+ > 60$ completamente rugoso -> $C = 8.5-(1/k)\ln k^+$



Lei de Parede para Superfície Rugosa (III)

- Os três regimes de rugosidade podem ser representados por uma única relação.
- Para o regime completamente rugoso:

$$C = 5.5 + \left[3.0 - \frac{1}{\kappa}\ln\left(k^{+}\right)\right] \cong 5.5 - \frac{1}{\kappa}\ln\left(0.3 \cdot k^{+}\right)$$

- Uma boa aproximação para a região de transição é a inserção da unidade no argumento do logarítmo. Assim para $k^{+} = 0$ ela coincide com parede lisa e para $k^{+} >> 1$ ela coincide com o regime rugoso

$$C \cong 5.5 - \frac{1}{\kappa}\ln\left(1 + 0.3 \cdot k^{+}\right)$$

- Em particular para o regime rugoso, $k^{+} > 60$ a viscosidade não é mais importante e o perfil de velocidades em termos das variáveis internas:

$$u^{+} = \frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{y^{+}}{k^{+}}\right) + 8.5$$

Diagrama de Moody e o fator de Atrito f

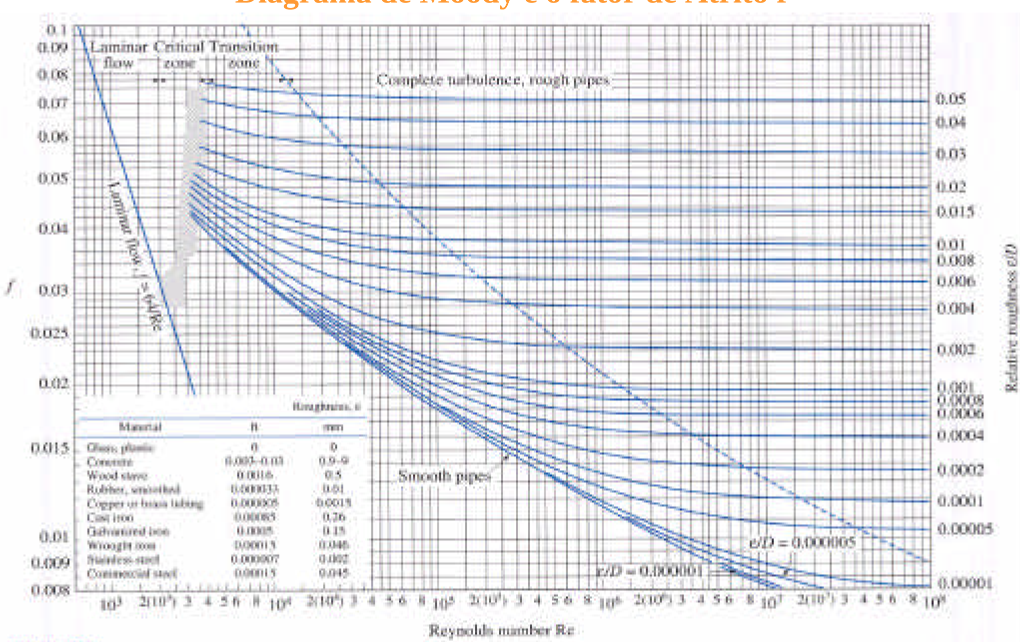
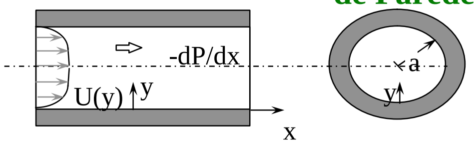


FIGURE A-27

The Moody chart for the friction factor for fully developed flow in circular tubes.

Exemplo: Escoamento em Dutos Circulares de Paredes Lisas



•**De posse do perfil de velocidades pode-se calcular a velocidade média**:

$$\bar{U} = \frac{Q}{A} = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a U(r)2\pi r \cdot dr \equiv \frac{1}{a^2}\int_0^a U(y)2(a-y)\cdot dy; \qquad y = a - r$$

•**É conhecido que escoamentos turbulentos em tubos apresentam pouco efeito de esteira; $\Pi \cong 0$. Portanto pode-se aplicar as correlações obtidas para os perfis de velocidades das camadas internas e intermediárias.**

•**Considerando que na camada interna penetra muito pouco no duto, a vazão associada a ela é desprezível face a vazão total. Portanto para se determinar a vazão irá utilizar-se da lei logaritimica.**

$$U^+ = \frac{1}{k} Ln\left(y^+\right) + B$$

Exemplo: Escoamento em Dutos Circulares de Paredes Lisas

•**Re-escrevendo a velocidade média em termos das variáveis internas tem-se:**

$$\frac{\bar{U}}{v^*} = \frac{2}{a^{+2}}\int_{30}^{a^+} U^+\left(y^+\right)\cdot\left(a^+ - y^+\right)\cdot dy^+; \qquad v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}; \; y^+ = \frac{y v^*}{\nu}$$

onde o limite de integração inferior deveria ser da parede, y+=0(sub-camada laminar), mas nesta região a lei-log não se aplica, daí incia-se em y+=30.

•**sabendo-se que:**

$$\int Ln(x)\cdot dx = x\cdot Ln(x) - x; \quad \text{e} \quad \int x\cdot Ln(x)\cdot dx = \frac{x^2}{2}\cdot\left(Ln(x) - \frac{1}{2}\right)$$

Exemplo: Escoamento em Dutos Circulares de Paredes Lisas- cont.

•A velocidade média fica:

$$\frac{\overline{U}}{v^*} = \frac{1}{k} Ln\left(a^+\right) + B - \frac{3}{2k}$$

Utilizando as definições:

$$C_f = \frac{2 \cdot \tau_w}{\rho \cdot \overline{U}^2} \qquad \frac{\overline{U}}{v^*} = \left(\frac{2}{C_f}\right)^{1/2} \qquad Re_D = \frac{2 \cdot a \cdot \overline{U}}{\nu} \qquad \frac{a v^*}{\nu} = Re_D \left(\frac{C_f}{8}\right)^{1/2}$$

Obtêm-se uma relação de fatores de atrito e Reynolds:

$$\left(\frac{2}{C_f}\right)^{1/2} = \frac{1}{k} Ln\left[Re_D \left(\frac{C_f}{8}\right)^{1/2}\right] + B - \frac{3}{2k}$$

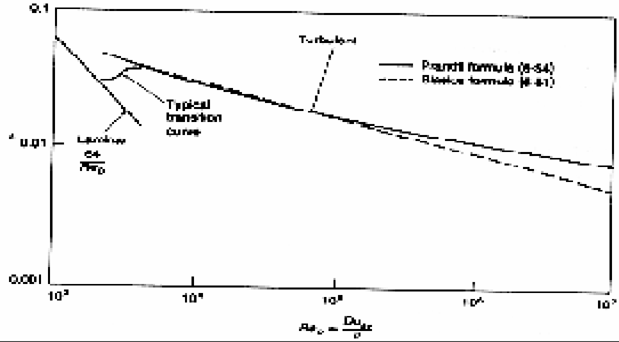
• Definindo o fator de Darcy: Λ=4Cf e introduzindo log na base 10 chega-se a relação para o fator de atrito Prandtl (1935)

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = 1.99 \, Log\left[Re_D \cdot \Lambda^{1/2}\right] - 1.02$$

Exemplo: Escoamento em Dutos Circulares de Paredes Lisas - cont.

- Como na dedução da relação Prandtl desprezou a sub-camada inercial e efeitos de esteira, ele próprio ajustou as constantes: 1.99 e 1.02 para melhor se ajustarem aos dados expementais, especialmente para baixos ReD. A relação final fica:

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = 2.0 Log\left[Re_D \cdot \Lambda^{1/2}\right] - 0.8$$



Análise Integral para Placa Plana

• O escoamento sobre uma placa plana em alto Re foi extensivamente estudado. Nesta abordagem, utiliza-se o método integral e o perfil de velocidades com o ajuste de Coles:

• Método Integral:

$$C_f = 2 \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

• Perfil de velocidades, $\Pi \approx 0.45$ - overlap + outer layers (Coles)

$$\frac{U(y)}{v^*} \approx \frac{1}{\kappa} Ln\left(y^+\right) + B + \frac{2\Pi}{\kappa}\left[3\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)\right]$$

Análise Integral para Placa Plana

para y=δ, obtêm-se uma relação entre Cf e a velocidade externa, Ue:

$$\frac{U_e}{v^*} \approx \frac{1}{\kappa} Ln\left(\delta^+\right) + B + \frac{2\Pi}{\kappa} \rightarrow \left(\frac{2}{C_f}\right)^{1/2} \approx 2.44 \cdot Ln\left[Re_\delta \left(\frac{C_f}{2}\right)^{1/2}\right] + 7.2$$

• A relação acima é algebricamente difícil de tratar uma vez que C_f é dado implicitamente. Para $0.001 < C_f < 0.005$, a relação acima pode ser aproximada pelo ajuste de potência:

$$C_f \approx 0.020 \cdot Re_\delta^{-1/6}; \quad \text{onde} \quad Re_\delta = \delta v^* / \nu$$

• A expressão acima cuida do lado direito da equação integral. Resta agora determinar a espessura de momento e sua derivada com o auxílio do perfil de velocidades.

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{U_e}\left(1 - \frac{u}{U_e}\right) \cdot d\eta; \qquad \eta = \frac{y}{\delta}$$

Análise Integral para Placa Plana- cont

• O perfil de velocidades expresso pela velocidade Ue:

$$\left(\frac{u(\eta)}{U_e}\right) = \frac{\frac{1}{\kappa}\mathbf{Ln}\left(\eta\delta^{+}\right) + \mathbf{B} + \frac{2\Pi}{\kappa}\left(3\eta^{2} - 2\eta\right)}{\left[\frac{1}{\kappa}\mathbf{Ln}\delta^{+} + \mathbf{B} + \frac{2\Pi}{\kappa}\right]}; \qquad \delta^{+} = \mathbf{Re}_{\delta}\left(\frac{C_f}{2}\right)^{1/2}$$

• A integração deste perfil de velocidades para resultar na espessura de momento é trabalhosa. As dificuldades algébricas são eliminadas aproximando os perfis por uma lei de potência (Prandtl 1921).

$$\frac{u}{U_e} \cong \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}$$

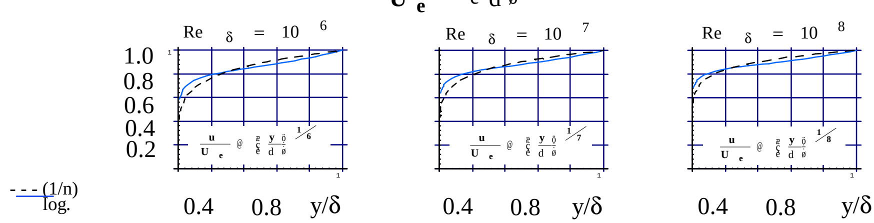
Análise Integral para Placa Plana- cont

• onde $\delta=\delta(x)$ é a espessura da camada limite que é uma função de x a ser determinada. A hipótese do ajuste de potência implica que os perfis de vel. são similares, isto é, todos eles coincidem em uma única curva u/Ue x y/δ

• Substituindo a relação de Cf =0.020 $Re_\delta^{-1/6}$ na expressão log (u/U_e), obtêm-se o perfil de vel. exato em função de Re_δ.

•A fig. compara os perfis resultantes e o ajuste da lei de potência.

$$\frac{u}{U_e} \cong \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}$$



• Observa-se que os ajustes apresentam uma dependência em Re, todavia a hipótese de que eles sejam similares ainda é razoável uma vez que a potência *n* não varia significativamente quando Re aumenta de uma ordem de grandeza!

Análise Integral para Placa Plana- cont.

Para perfis de potência, tem-se que: $\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{1+n}$ $\frac{\theta}{\delta} = \frac{n}{(1+n)(2+n)}$

• Em particular para n=7 $\theta = \frac{7}{72}\delta$

• A substituição desta relação na eq. Integral, conduz a EDO:

$$0.020\cdot Re_\delta^{-1/6} \approx 2\frac{d}{dx}\left(\frac{7}{72}\delta\right) = \frac{7}{36}\frac{d\,Re_\delta}{d\,Re_x}$$

assumindo que $\delta=0$ para x=0 (camada limite turbulenta da origem), a solução fica sendo:

$$Re_\delta \approx 0.16\cdot Re_x^{-6/7} \qquad \frac{\delta}{x} \approx \frac{0.16}{Re_x^{1/7}} \qquad C_f \approx \frac{0.027}{Re_x^{1/7}}$$

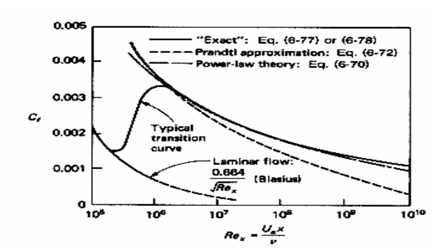
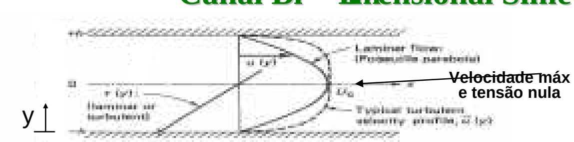


FIGURE 6-20
Local skin friction on a smooth flat plate for turbulent flow, showing several theories.

Canal Bi-Dimensional Simétrico (I)



• A existência de simetria com a linha de centro do canal permite realizar um casamento das duas camadas que se desenvolvem junto a parede na linha de centro.

• A equação do momento se reduz ao balanço das forças de pressão e das tensões na parede:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d\tau}{dy} \rightarrow \tau \text{ deve variar linearmente e } \tau = \mu\frac{dU}{dy} - \rho\overline{u'v'}$$

• Devido a simetria, as tensões nas paredes são idênticas pode-se relacionar o gradiente de pressão com a tensão na parede:

$$\frac{\tau_w}{h} = \left(\frac{dP}{dx}\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{\tau}{\tau_w} = 1 - \left(\frac{y}{h}\right)$$

• A distribuição de tensão é unicamente determinada porque a posição y onde τ é nulo, y_0, coincide com o máximo no perfil de velocidade, y_m, isto é: $y_0 = y_m$

Canal Bi-Dimensional Simétrico (II)

• Neste caso os perfis de velocidade que se desenvolvem em cada parede são idênticos e simétricos.

•Além disto, como a esteira é pequena e a sub-camada laminar tem espessura desprezível, o perfil de velocidades através de toda seção transversal do canal pode ser razoavelmente representado pela lei log:

$$u^{+} = \tfrac{1}{\kappa}\ln\left(y^{+}\right) + B$$

•A velocidade média pode ser calculada por:

$$u_{avg} = \frac{1}{h}\int_0^h u\,dy \cong u^{*}\cdot\left(\tfrac{1}{\kappa}\ln\left(h^{+}\right) + B - \tfrac{1}{\kappa}\right)$$

Canal Bi-Dimensional Simétrico (II)

•A velocidade média e o coeficiente de atrito:

$$\frac{u_{avg}}{u^{*}} = \sqrt{\frac{2}{C_f}}$$

•O Reynolds baseado no diâmetro hidráulico:

$$Re_{Dh} = \frac{u_{avg} D_h}{\nu} \qquad D_h = \frac{4A}{P} = 2h$$

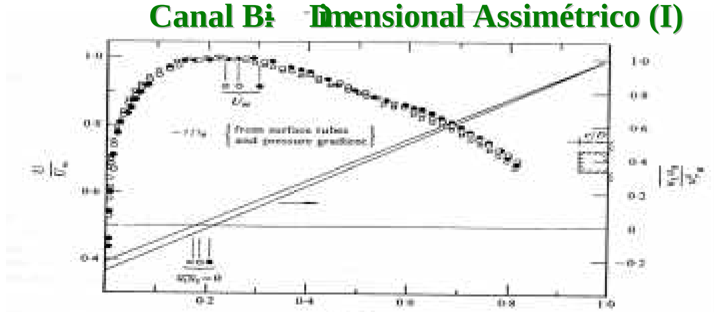
• Introduzindo estas expressões na vel. Média, chega-se a expressão para o coeficiente de atrito em função Reynolds.

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = 1.22\ln\left(Re_{Dh}\cdot\sqrt{C_f}\right) - 1.19$$

• Por meio da lei log foi possível analisar o escoamento em dutos e canais e calcular a velocidade média.

•Nenhuma equação diferencial foi resolvida e nenhuma ‘teoria física’ foi usada. A lei log é apenas um ajuste de dados e análise dimensional!

Canal Bi-Dimensional Assimétrico (I)



•Hanjalic and Launder, “Fully developed asymetric flow in a plane channel, JFM, (51), 2, 1972

• **Escoamento asimétrico desenvolvido num canal 2D formado por dois planos.**

•**A asimetria foi formada introduzindo-se uma rugosidade em uma parede enquanto que a outra foi mantida lisa.**

• **A razão entre as tensões da parede rugosa e lisa é aproximadamente de 4:1.**

• **Os planos de tensão zero e velocidade máxima não coincidem! Isto se deve a grande iteração caracterizada pela difusão da tensão turbulenta e energia cinética da parede rugosa em direção a lisa.**

Canal Bi-Dimensional Assimétrico (II)

• **Na ausência de simetria do escoamento médio e da tensão com a linha de centro é necessário a introdução de uma condição explícita para casar o escoamento nas duas paredes do canal.**

• **Uma hipótese simplificadora consiste em tomar como coincidentes as posições de máx. velocidade e de tensão nula;**

• **Ela se justifica considerando o conhecimento preciso da forma com que a velocidade no núcleo varia (y+>200) não influencia fortemente a vazão total, mas sim a tensão de cisalhamento na parede. Isto em conta pode-se concluir que $y_m = y_i$ não é crítico para determinação do fator de atrito.**

Canal Bi-Dimensional Assimétrico (III)

- **A aproximação também se apóia no comentário que o único efeito do escoamento externo é determinar τ_w.**
- **Hanjalic e Launder (1968) mostraram que próximo às paredes os perfís de velocidade seguiam as leis de parede:**
- **onde S e R referem-se a lisa e rugosa, 'e' a altura caract. da rugosidade. As coordenadas y^+S e y^+R tem a origem nas paredes lisa e rugosa respectivamente.**

$$u_S^+ = \frac{1}{\kappa}\ln\left(y_S^+\right) + 5.0 \qquad u_R^+ = \frac{1}{\kappa}\ln\left(y_R^+ / e^+\right) + 8.5$$

Canal Bi-Dimensional Assimétrico (IV)

• O perfil de velocidade fica completamente determinado conhecendo-se o ponto de máxima velocidade.

•Se a rugosidade é conhecida a priori, a vazão total e o ponto de máximo (onde as velocidades das duas camadas logarítmicas se encontram) são determinados iterativamente.

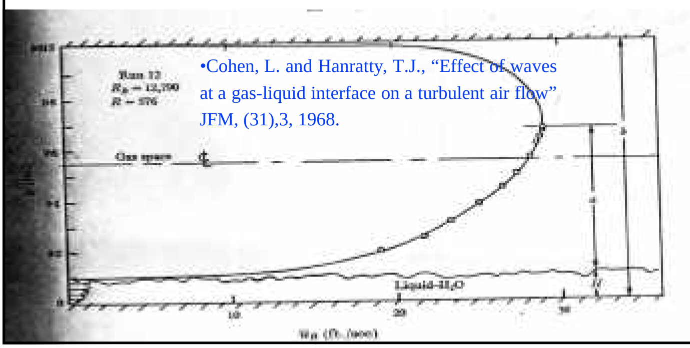
•Caso a rugosidade da parede não seja conhecida não é possível determinar a vazão nem o ponto de máximo das velocidades.

Canal Bi-Dimensional Assimétrico (V)

•Assumindo que são coincidentes a tensão zero com velocidade máxima, a tensão na parede pode ser determinada experimentalmente a partir do conhecimento do ponto de máximo do perfil e do gradiente de pressão:

$$-\frac{dP}{dx} \cong \frac{\tau_{WR}}{y_i} = \frac{\tau_{WS}}{(H - y_i)}$$

•De fato este argumento foi empregado por Cohem e Hanraty (1967) para determinar a tensão na interface água-ar de um escoamento estratificado.



•Cohen, L. and Hanratty, T.J., "Effect of waves at a gas-liquid interface on a turbulent air flow" JFM, (31),3, 1968.

$$-\frac{dP}{dx} \cong \frac{\tau_{WR}}{a}$$