- Decomposição de Reynolds -

Equações Básicas dos Termos Médios e Flutuações

Fluido com Propriedades Constantes

Processos de Média

<u>Média Temporal</u> - apropriada para turbulência estacionária, isto é as propriedades médias não variam com o tempo (escoamento numa tubulação impulsionado por uma bomba de rotação constante)

$$F_T(x) = \underbrace{\lim}_{T\to\infty} I \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(x,t)\,dt$$

- **<u>Média Espacial</u> - pode ser utilizada para turbulência homogênea que possui propriedades médias uniformes para todas as direções.**

$$F_V(x) = \underbrace{\lim}_{V\to\infty} \frac{1}{V} \iiint_V f(x,t)\,dV$$

Processos de Média

• **Média de Conjunto (ensemble)** - aplica-se para escoamentos que variam com o tempo.

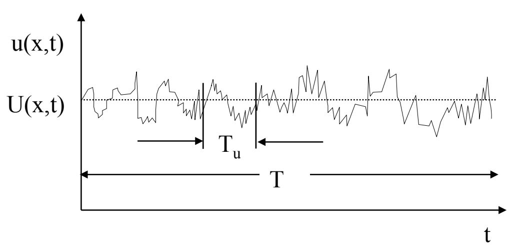
• Exemplo: N experimentos idênticos com condições de contorno que diferem por pertubações aleatórias. $f_n(x,t)$ é a medida de f do n^{th} experimento, e sua média de conjunto é:

$$F_E(x) = \underbrace{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_n(x,t)$$

Para um escoamento estacionário e homogêneo as três médias são coincidentes. Esta é conhecida como hipótese ergótica.

Decomposição de Reynolds

Média temporal p/ turbulência estacionária



• A velocidade instantânea é dada pela soma da velocidade média e flutuações:

$$u_i(x,t) = U_i(x) + u_i^{'}(x,t)$$

Decomposição de Reynolds

- A velocidade média é estimada considerando-se que o período da flutuação, Tu é muito menor que o tempo T de aquisição:

$$U_i(x) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} u_i(x,t)dt \quad , \qquad T_u << T$$

- A média da média é a própria média; a barra superior indica média temporal

$$\overline{U_i(x)} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} U_i(x)dt = U_i(x)$$

- A média da flutuação é nula:

$$\overline{u_i'(x)} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} [u_i(x,t) - U_i(x)]dt =$$

$$= U_i(x) - \overline{U_i(x)} = 0$$

Propriedades da Média de Reynolds

O processo de média de Reynolds sobre operações envolvendo as variáveis instantâneas é decorrente das definições da média:

$$\underbrace{f}_{\text{valor instantâneo}} = \underbrace{\bar{f}}_{\text{valor medio}} + \underbrace{f'}_{\text{valor flutuante}}$$

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f}$$

$$\overline{f'} = 0$$

$$\overline{f \cdot \bar{g}} = \overline{(\bar{f} + f') \cdot \bar{g}} = \bar{f} \cdot \bar{g}$$

$$\overline{f'\bar{g}} = 0$$

$$\overline{f + g} = \overline{(\bar{f} + f') \cdot (\bar{g} + g')} = \bar{f} + \bar{g}$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{(\bar{f} + f')}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$$

$$\overline{\int f dx} = \int \overline{(\bar{f} + f')} dx = \int \bar{f} dx$$

Correlações (I)

A média do produto de duas variáveis, ϕ e ψ tem a forma:

$$\overline{\phi\psi} = \overline{(\Phi + \phi')} \cdot \overline{(\Psi + \psi')} = \overline{\Phi\Psi} + \underbrace{\overline{\Phi\psi'}}_{=0} + \underbrace{\overline{\Psi\phi'}}_{=0} + \overline{\phi'\psi'} = \Phi\Psi + \overline{\phi'\psi'}$$

- **A média do produto entre uma quantidade média e outra flutuante é zero porque a média da flutuante é nula!**

- **A média do produto de duas flutuações não é necessariamente nula. As quantidades ϕ e ψ estão correlacionadas se $\overline{\phi'\psi'} \neq 0$. Elas não apresentam correlação se $\overline{\phi'\psi'} = 0$.**

Correlações (I)

- **Para produtos triplos encontra-se, de forma similar:**

$$\overline{\phi\psi\xi} = \overline{(\Phi + \phi')} \cdot \overline{(\Psi + \psi')} \cdot \overline{(\Xi + \xi')} = \Phi\Psi\Xi + \overline{\phi'\psi'}\Xi + \overline{\psi'\xi'}\Phi + \overline{\phi'\xi'}\Psi + \overline{\phi'\psi'\xi'}$$

- **Os termos lineares em ϕ', ψ' e ξ' tem média zero. Termos de flutuação quadráticos e cúbicos não apresentam razões a priori para serem nulos.**

Correlações (II)

Considere um escoamento 2D no plano (x,y):

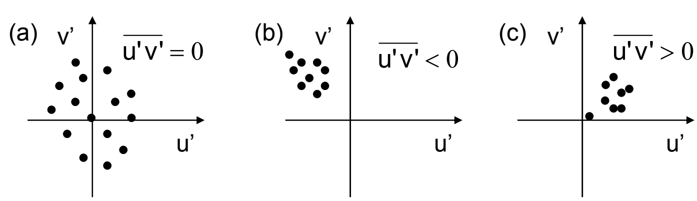
se $\phi' = \psi' = u_i'$ tem-se o valor médio quadrádico da flutuação,

$$\overline{u'u'} \neq \overline{v'v'} \geq 0$$

se $\phi' = u'$ e $\psi' = v'$ tem-se a correlação de velocidades, ela expressa o grau de associação entre as variáveis.

Correlações (II)

Representação instantânea das ocorrências de u' e v' num gráfico (x,y)



(a) u' e v' não estão correlacionados
(b) u' e v' correlacionados; se u' aumenta, v' diminui e vice versa;
(c) u' e v' correlacionados; se u' aumenta, v' aumenta e vice versa;

Desigualdade de Schawrz: $u'v' \leq \sqrt{\overline{u'}^2} \cdot \sqrt{\overline{v'}^2}$

Coeficiente de correlação: $R_{uv} = \dfrac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'}^2} \cdot \sqrt{\overline{v'}^2}}, \quad -1 \leq R_{uv} \leq +1$

Definição das Variáveis Instantâneas, Médias e FlutuantesPara as Equações de Transporte

	Instantânea	Média	Flutuante
Velocidade	u_i	U_i	u'_i
Pressão	p	P	p'
Temperatura	t	T	t'
Energia Cinética	q	K	k'
Deformação	**s**	**S**	**s'**
Tensor Tensões	**t**	**T**	**t'**

Equações Médias de Reynolds - Massa

Equação da conservação da massa para um fluido incompressível :

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0$$

pode-se concluir então que: $\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0$

isto é, a vazão do campo médio assim como a do campo flutuante se conservam instante a instante. Em outras palavras, o divergente do campo médio assim como o das flutuações são nulos!

Equação de N.S. média

Tomando-se a média temporal da Equação da quantidade de movimento instantânea:

$$\overline{\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial\left(\rho u_j u_i\right)}{\partial x_j}} = -\overline{\frac{\partial(p)}{\partial x_i}} + \mu\overline{\frac{\partial^2(u_i)}{\partial x_j \partial x_j}}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \overbrace{\frac{\partial(\rho U_j U_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial\left(\overline{\rho u'_j u'_i}\right)}{\partial x_j}} = -\frac{\partial(P)}{\partial x_i} + \frac{\partial^2(U_i)}{\partial x_j \partial x_j}$$

Equação de N.S. média

A equação do momento em termos das variáveis médias é idêntica aquela com variáveis instantâneas a exceção do termo de correlação $\overline{\rho u'_j u'_i}$. Ele representa a média temporal do fluxo de momento devido as flutuações.

Esta correlação constitui o problema fundamental em turbulência! Para calcular todas as propriedades médias do escoamento é necessário prover equações constitutivas (modelos) para o termo de correlação das flutuações. *Aqui começa a ciência e a arte da modelagem.*

Tensor de Reynolds (I)

- O fluxo de momento devido às flutuações é conhecido como o tensor de Reynolds;
- Ele é também reconhecido como a tensão exercida no fluido pelas flutuações turbulentas;
- Ele é simétrico e possui seis componentes independentes entre si;

$$T_{i,j}^{T} = -\rho\overline{u_i^{'}u_j^{'}} = -\begin{bmatrix} \rho\overline{u'u'} & \rho\overline{v'u'} & \rho\overline{w'u'} \\ \rho\overline{u'v'} & \rho\overline{v'v'} & \rho\overline{w'v'} \\ \rho\overline{w'u'} & \rho\overline{w'v'} & \rho\overline{w'w'} \end{bmatrix}$$

Tensor de Reynolds (I)

- A soma dos elementos da diagonal principal é a energia cinética turbulenta específica, (energia por unidade massa), freqüentemente denominada por energia cinética somente;

$$k = \frac{1}{2}\overline{u_i^{'}u_i^{'}} = \frac{1}{2}\left[\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right] \left(\frac{J}{kg}\right)$$

- Por conveniência, a correlação de velocidades passará a ser expressa por:

$$\sigma_{i,j}^{T} = -\overline{u_i^{'}u_j^{'}} = T_{i,j}^{T} \big/ \rho$$

Tensor de Reynolds (III)

- O tensor das tensões no fluido é decomposto na sua componente média e outra devido à turbulência (flutuações das velocidades).

$$\mathbf{T}_{i,j} = \underbrace{-P\delta_{i,j} + 2\mu\mathbf{S}_{i,j}}_{\text{Tensões Campo Médio}} \quad - \quad \underbrace{\rho\overline{u_i^{'}u_j^{'}}}_{\text{Tensões Campo Flutuações}}$$

- A forma mais popular da equação média do momento é transportando o termo de fluxo de momento das flutuações para o lado direito da equação e reconhecendo-o como a contribuição do movimento turbulento ao campo das tensões:

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j U_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[2\mu\mathbf{S}_{i,j} - \rho\overline{u_j^{'}u_i^{'}}\right]$$

Tensor de Reynolds (III)

- O tensor de Reynolds introduz mais 6 variáveis além de (U,V,W e P). Portanto existem mais incógnitas que equações para o problema! Se for tentado obter eq. para as tensões turbulentas aparecerão incógnitas do tipo $\overline{u_i^{'}u_j^{'}u_j^{'}}$ que serão geradas pelos termos não lineares da inércia. Tornando o processo de fechamento recursivamente não solucionável.

Equação das Flutuações de Velocidade

- **Ela pode ser obtida a partir da equação do momento da flutuação que é obtida subtraindo-se a equação N.S da velocidade instantânea da eq. N.S em termos da média temporal:**

$$\frac{\partial\left[\rho\left(U_i+u_i'\right)\right]}{\partial t}+\frac{\partial\left[\rho\left(U_j+u_j'\right)\left(U_i+u_i'\right)\right]}{\partial x_j}=-\frac{\partial[P+p']}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2\left[\left(U_i+u_i'\right)\right]}{\partial x_j\partial x_j}$$

$$-$$

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t}+\frac{\partial\left[\rho\left(U_jU_i+\overline{u'_ju'_i}\right)\right]}{\partial x_j}=-\frac{\partial(P)}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2(U_i)}{\partial x_j\partial x_j}$$

$$=\frac{\partial\left(\rho u_i'\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left\{\rho\left[\left(U_iu_j'\right)+\left(U_ju_i'\right)+\left(u_j'u_i'\right)-\left(\overline{u_j'u_i'}\right)\right]\right\}}{\partial x_j}=-\frac{\partial(p')}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2\left(u_i'\right)}{\partial x_j\partial x_j}$$

O operador Navier-Stokes (N(*))

- **Definindo o operador Navier-Stokes das flutuações de velocidade, $N(u'_i)$:**

$$N\left(u_i'\right)=\frac{\partial\left(\rho u_i'\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left\{\rho\left[\left(U_iu_j'\right)+\left(U_ju_i'\right)+\left(u_j'u_i'\right)-\left(\overline{u_j'u_i'}\right)\right]\right\}}{\partial x_j}+\frac{\partial(p')}{\partial x_i}-\mu\frac{\partial^2\left(u_i'\right)}{\partial x_j\partial x_j}=0$$

Equação das Tensões de Reynolds (I)

- **Equação de transporte para o tensor de Reynolds, $\sigma_{i,j}$, por meio da média temporal do produto entre o operador Navier-Stokes e a com a flutuação de velocidade**

$$\overline{u_i' \cdot N(u_k') + u_k' \cdot N(u_i')} = 0$$

- **A operação é detalhada termo a termo a seguir. Considerando o termo transiente:**

$$\overline{u_i' \frac{\partial(\rho u_k')}{\partial t} + u_k' \frac{\partial(\rho u_i')}{\partial t}} = \frac{\partial\left(\rho \overline{u_i' u_k'}\right)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho\sigma_{i,k})}{\partial t}$$

- **O termo convectivo:**

$$\overline{\rho u_k' \frac{\partial\left(U_i u_j' + U_j u_i' + u_j' u_i' - \overline{u_j' u_i'}\right)}{\partial x_j}} + \overline{\rho u_i' \frac{\partial\left(U_k u_j' + U_j u_k' + u_j' u_k' - \overline{u_j' u_k'}\right)}{\partial x_j}} =$$

$$\frac{\partial\left(\rho U_j \overline{u_i' u_k'}\right)}{\partial x_j} + \rho\overline{u_j' u_k'}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \rho\overline{u_i' u_j'}\frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \rho\frac{\partial \overline{u_i' u_k' u_j'}}{\partial x_j} =$$

$$-\frac{\partial(\rho U_j \sigma_{i,k})}{\partial x_j} - \rho\sigma_{j,k}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho\sigma_{i,j}\frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \rho\frac{\partial \overline{u_i' u_k' u_j'}}{\partial x_j}$$

Equação das Tensões de Reynolds (II)

- **O termo de pressão:**

$$\overline{u_i' \frac{\partial(p')}{\partial x_k} + u_k' \frac{\partial(p')}{\partial x_i}} = \overline{\frac{\partial(u_i' p')}{\partial x_k} + \frac{\partial(u_k' p')}{\partial x_i} - p'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} - p'\frac{\partial u_k'}{\partial x_i}} = \frac{\partial\left(\overline{u_i' p'}\right)}{\partial x_k} + \frac{\partial\left(\overline{u_k' p'}\right)}{\partial x_i} - \overline{p' \mathbf{s}_{i,k}'}$$

- **O termo viscoso:**

$$\overline{\mu u_i' \frac{\partial^2 u_k'}{\partial x_j \partial x_j} + \mu u_k' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_j}} = \mu\left[\frac{\partial^2 \overline{u_i' u_k'}}{\partial x_j \partial x_j}\right] - \mu 2 \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_k'}{\partial x_j}} = -\mu\left[\frac{\partial^2 \sigma_{i,k}}{\partial x_j \partial x_j}\right] - 2\mu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_k'}{\partial x_j}}$$

- **Lembrando-se que $T_{i,j}^T$ representa o tensor turbulento. Para expandir e simplificar os termos convectivos foi utilizado relações da eq. continuidade: ($\partial U_i / \partial x_i = \partial u'_i / \partial x_i = 0$)**

Equação das Tensões de Reynolds (III)

- **Coletando-se os termos transiente, convectivo, pressão e difusivo e considerando ρ conste, chega-se a:**

$$\frac{\partial \sigma_{i,k}}{\partial t}+\underbrace{\frac{\partial U_j \sigma_{i,k}}{\partial x_j}}_{\text{Transporte Tensor pelo Campo Médio}}=+\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu \frac{\partial \sigma_{i,k}}{\partial x_j}\right]}_{\text{Difusão Molecular}}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[C_{i,k,j}\right]}_{\text{Difusão Turbulenta}}-\underbrace{\sigma_{k,j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\sigma_{k,i}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}}_{\text{ProduçãoTensor pelo Campo médio}}+\underbrace{\varepsilon_{i,k}}_{\text{Dissipação (destruição) Tensor}}-\underbrace{\Pi_{i,k}}_{\text{Correlação: Pressão Deformação}}$$

onde as definições dos termos:

$$\sigma_{i,k}=-\overline{u_i' u_k'}$$

$$C_{i,k,j}=\left[\left(\overline{u_i' u_k' u_j'}\right)+\overline{\frac{p'}{\rho}\left(u_k'\delta_{j,k}+u_i'\delta_{j,i}\right)}\right]$$

$$\varepsilon_{i,k}=2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_k'}{\partial x_j}}$$

$$\Pi_{i,k}=\overline{\frac{p'}{\rho}\cdot\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k'}{\partial x_i}\right)}=2\cdot\overline{p' s_{i,k}'}$$

Equação das Tensões de Reynolds (IV)

- **A equação do tensor de Reynolds possui (6) componentes, uma para cada tensor;**
- **Apesar de se ter criado 6 novas equações, foram também geradas 22 novas incógnitas:**

$$\overline{u_i' u_k' u_j'} \rightarrow 10 \quad \text{incógnitas}$$

$$\varepsilon_{i,k}=2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_k'}{\partial x_j}} \rightarrow 6 \quad \text{incógnitas}$$

$$\overline{u_i'\frac{\partial (p')}{\partial x_k}+u_k'\frac{\partial (p')}{\partial x_i}} \rightarrow 6 \quad \text{incógnitas}$$

Equação das Tensões de Reynods (V)

- **Devido a não-linearidade da Eq. N.S nota-se que a tentativa de se obter equações de ordem estatística superiores (correlação $u_i u_k$) são gerados novas incógnitas.**
- **Se fosse produzido novas equações para os termos incógnitos novas variáveis desconhecidas seriam geradas!**
- **Isto ocorre pq o processo de média é matemático e não físico.**
- **A geração de incógnitas revela que o processo de média de Reynolds é uma brutal simplificação da eq. N.S. Se os termos incógnitos não são modelados adequadamente significa que a eq. N.S modelada está perdendo informação.**

Equação da Energia Cinética Turbulenta (I)

- **A energia cinética turbulenta específica (J/kg) é obtida a partir da diagonal principal (traço) do tensor turbulento do fluido:**

$$\sigma_{i,i} = -\overline{u'_{i,i} u'_{i,i}} = -2k$$

- **A equação da energia cinética turbulenta é constituída tomando-se o 'traço' da equação do tensor de Reynolds, isto é, fazendo-se os índices i=k**

$$\frac{\partial \sigma_{1,1}}{\partial t} + \frac{\partial U_j \sigma_{1,1}}{\partial x_j} = + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu \frac{\partial \sigma_{1,1}}{\partial x_j}\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[C_{1,1,j}\right] - \sigma_{1,j}\frac{\partial U_1}{\partial x_j} - \sigma_{1,j}\frac{\partial U_1}{\partial x_j} + \varepsilon_{1,1} - \Pi_{1,1}$$

$$\frac{\partial \sigma_{2,2}}{\partial t} + \frac{\partial U_j \sigma_{2,2}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu \frac{\partial \sigma_{2,2}}{\partial x_j}\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[C_{2,2,j}\right] - \sigma_{2,j}\frac{\partial U_2}{\partial x_j} - \sigma_{2,j}\frac{\partial U_2}{\partial x_j} + \varepsilon_{2,2} - \Pi_{2,2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{3,3}}{\partial t} + \frac{\partial U_j \sigma_{3,3}}{\partial x_j} = + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu \frac{\partial \sigma_{3,3}}{\partial x_j}\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[C_{3,3,j}\right] - \sigma_{3,j}\frac{\partial U_3}{\partial x_j} - \sigma_{3,j}\frac{\partial U_3}{\partial x_j} + \varepsilon_{3,3} - \Pi_{3,3}$$

Equação da Energia Cinética Turbulenta (II)

- **Somando-se e contraindo-se as três equações chega ao transporte da energia cinética turbulenta:**

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\underbrace{\frac{\partial\left(U_j k\right)}{\partial x_j}}_{\substack{\text{Transporte K}\\ \text{campo médio}}}=\underbrace{\sigma_{i,j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{\text{Produção}}-\underbrace{\varepsilon}_{\text{Dissipação}}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu\frac{\partial k}{\partial x_j}-\frac{1}{2}\overline{u_i'u_i'u_j'}-\frac{1}{\rho}\overline{p'u_j'}\right]}_{\substack{\text{(1) Difusão:Molecular}\\ \text{(2) Transporte Turbulento}\\ \text{(3) Difusão da Pressão}}}$$

Equação da Energia Cinética Turbulenta (III)

- **O tensor $\Pi_{i,j}$ é nulo quando i, j. Isto significa que a correlação entre a flutuação de pressão e o tensor das deformações flutuantes não produz energia mas redistribui!**
- **A produção de K, P_K, representa a taxa com que a energia está sendo transferida do campo médio para turbulência. Como S_{ij} é simétrico, P_K pode ser re-escrito como: $P_K=\sigma:S$;**
- **Dissipação ε é a taxa com que a energia cinética turbulenta é convertida em energia intena; escoamentos em equilíbrio a taxa de produção é igual a de dissipação, $P_K = \varepsilon$;**
- **$\mu dk/dx_j$ é o transporte por difusão molecular da energia cinética turbulenta;**
- **A correlação tripla é o transporte da energia turbulenta ($u_i u_i$) no fluido pelas turbulência;**
- **A difusão da pressão é o transporte turbulento resultante da correlação entre a flutuação de pressão e velocidade.**

Equação da Energia Cinética Turbulenta (IV)

- A mesma equação também se chega a partir da média temporal no operador:

$$\overline{u_i' \cdot N(u_i')} = 0$$

onde N(u'$_i$) é o operador Navier-Stokes para as flutuações de velocidade.

- 'q' é a energia cinética e sua decomposição;

$$q = (U_i + u_i')^2 = U_i U_i + 2U_i u_i' + u_i' u_i'$$

- o valor médio de q é o quadrado da velocidade média (K) mais a média do quadrado das flutuações, (k);

$$\overline{q} = \underbrace{U_i^2}_{K} + \underbrace{\overline{u'^2_i}}_{k}$$

- Define-se intensidade de turbulência como sendo a razão entre energias cinéticas das flutuações com o as do campo médio; tipicamente I < 5% porém pode atingir até 60%.

$$I = \frac{k}{K}$$

Expressões para o termo de Dissipação, ε (I)

- A quantidade ε, expressa a taxa de dissipação de energia por unidade de massa por unidade de tempo. Ela é denominada por função dissipação deriva do traço do tensor dissipação,$\varepsilon_{i,j}$

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$$

- Ela difere da definição da função dissipação, (Hinze, Townsend), que é proporcional ao quadrado do tensor deformação das flutuações:

$$\varepsilon_{\mathbf{d}} = 2\nu \overline{\mathbf{s}_{i,j}' : \mathbf{s}_{i,j}'}, \qquad \mathbf{s}_{i,j}' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)$$

Expressões para o termo de Dissipação, ε (II)

- **Reconhecendo-se que ambas expressões são sempre positivas a dissipação real, ε_d e o termo viscoso acima estão relacionados por meio de:**

$$\varepsilon = \varepsilon_{\mathbf{d}} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\nu u_i' \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}}\right) \equiv \varepsilon_{\mathbf{d}} - \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j \partial x_i}$$

A equação acima tem direta relação com Eq. (101) na apostila 'Forma Diferencial das Equações de Transporte'

- **Nota-se que ε não é a expressão completa para a função dissipação a menos que as 2ª derivadas das tensões de Re são nulas ou desprezíveis em comparação com ε. Pode-se afirmar contudo que para escoamentos com Re elevados, $\varepsilon \approx \varepsilon_d$. Na prática, a diferença entre os termos é pequena (< 2% Bradshaw) a exceção de *regiões próximas às paredes*.**

Expressões para o termo de Dissipação, ε (III)

- **A funções ε ε_d são coincidentes para turbulência isotrópica (G.I.Taylor). O quadrado da média de todas derivadas parciais pode ser expresso em função de apenas uma derivada.**
- **Turbulência isotrópica:** $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}$ **em qualquer região do espaço mas podem variar com o tempo. Se as flutuações são aleatórias, não pode haver correlação cruzada:** $\overline{u'v'} = 0$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\mathbf{d}} - \nu \underbrace{\frac{\partial^2 \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j \partial x_i}}_{=0} \rightarrow \varepsilon \equiv \varepsilon_{\mathbf{d}}$$

Veja Warsi

$$\varepsilon = \varepsilon_d = 15\nu \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)}$$

Sumário Equação da Energia Cinética Turbulenta (I)

- **Em notação tensorial cartesiana a equação de transporte da energia cinética turbulenta é dada por:**

$$\frac{\partial k}{\partial t}+U_i\frac{\partial k}{\partial x_i}=-\overline{u_j^{'}u_j^{'}}\cdot\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\varepsilon+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu\frac{\partial k}{\partial x_i}-\frac{1}{2}\overline{u_i^{'}u_j^{'}u_j^{'}}-\overline{\frac{1}{\rho}u_i^{'}p^{'}}\right)$$

Sumário Equação da Energia Cinética Turbulenta (II)

- **Dado que o tensor de Reynolds é simétrico, o termo de produção também pode ser expresso pelo produto dele com o tensor médio da deformação :**

$$\frac{\partial k}{\partial t}+U_i\frac{\partial k}{\partial x_i}=-\overline{u_j^{'}u_j^{'}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)-\varepsilon+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu\frac{\partial k}{\partial x_i}-\frac{1}{2}\overline{u_i^{'}u_j^{'}u_j^{'}}-\overline{\frac{1}{\rho}u_i^{'}p^{'}}\right)$$

- **A função dissipação ε, coincide com a dissipação real do fluido somente para escoamentos isotrópicos; e portanto ela também é batizada por dissipação isotrópica,**

$$\varepsilon=\nu\overline{\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j}\frac{\partial u_i^{'}}{\partial x_j}}$$

Equação da Dissipação, ε

- A equação para ε é obtida tomando-se a média temporal do operador:

$$2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\left[N(u_i')\right]}=0$$

onde $N(u'_i)$ é o operador Navier-Stokes para as flutuações de velocidade.

- Existe uma considerável álgebra para se chegar a forma final da equação de e. As passagens algébricas para alguns termos são mostradas:

$$\text{transiente}: \overline{\left(\nu\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial t}\right)}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}$$

$$\text{convectivo}: \overline{\left(\nu\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)\cdot U_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)}=\frac{1}{2}U_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\right)=\frac{1}{2}U_k\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_k}$$

$$\text{pressão}: \overline{\left(\nu\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right)}=\frac{\nu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\frac{\partial p'}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\right)$$

Equação da Dissipação, ε (II)

(I) variação temporal; (II) convecção; (III) difusão da dissipação por efeitos molecular, pelas flutuações de pressão e pelas flutuações de velocidade; (IV) geração devido a deformação do campo médio; (V) geração de flutuação de vorticidade devido a ação de auto-alongamento da turbulência; (VI) decaimento (destruição) da taxa de dissipação devido a ação viscosa.

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+U_j\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}-\nu\overline{\left(u_j'\cdot\frac{\partial u_i'}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial u_i'}{\partial x_m}\right)}+\frac{2\nu}{\rho}\overline{\frac{\partial p'}{\partial x_m}\frac{\partial u_j'}{\partial x_m}}+\right)$$
$$-2\nu\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\left(\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}+\overline{\frac{\partial u_k'}{\partial x_i}\frac{\partial u_k'}{\partial x_j}}\right)-2\nu\overline{\left(u_k'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j\partial x_k}$$
$$-2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_m}\frac{\partial u_k'}{\partial x_m}}-2\nu^2\left(\overline{\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k\partial x_m}\cdot\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k\partial x_m}}\right)$$

Equação da Dissipação, ε (III)

- A equação da dissipação é muito mais complexa que a equação da energia cinética turbulenta;
- Ela envolve diversas novas e desconhecidas correlações duplas e triplas das flutuações de velocidade, pressão e gradiente de velocidade!
- As correlações duplas e triplas existentes são praticamente impossíveis de se medir experimentalmente;
- Do ponto de vista experimental não se tem esperança de se conseguir relações para fechamento das correlações que envolvem a eq. ε;
- Recentes simulações com DNS vem ajudando a se ganhar um maior conhecimento sobre as correlações duplas e triplas mas a base de conhecimento ainda é muito esparsa.

Equação da Dissipação, ε (IV)

- A forma exata da equação da dissipação não é útil para ser o ponto inicial de desenvolvimento de um modelo.
- Da teoria de Kolmogorov, ε é visto como o fluxo de energia na cascata dos turbilhões;
- O fluxo de energia é determinado pelos grandes turbilhões num processo que não depende da viscosidade!
- Porém, a energia é dissipada nas pequenas escalas;
- A equação de ε deveria se ater as pequenas escalas, porém o <u>processo de média</u> introduz diversos produtos de correlações que, de forma indireta, expressam a taxa de dissipação
- É praticamente impossível modelar fisicamente os termos da equação de ε uma vez que eles referem-se a produtos e correlações das grandes escalas.
- Portanto, a forma modelada da eq. para ε é vista como <u>empírica</u>.

Equação da Energia Média em termos da Temperatura

A equação da energia aplica-se para escoamentos sem dissipação, sem trabalho de compressão e propriedades constantes.

A difusividade térmica é definida por α = k/ρCp

$$\frac{\overline{\partial(T+t')}}{\partial t} + \frac{\overline{\partial\left[\left(U_j+u_j'\right)\cdot\left(T+t'\right)\right]}}{\partial x_j} = \alpha\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\overline{\partial(T+t')}}{\partial x_j}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{\partial(T)}{\partial t} + \overbrace{\frac{\partial\left(U_jT\right)}{\partial x_j} + \frac{\partial\left(\overline{u_j't'}\right)}{\partial x_j}} = \alpha\frac{\partial^2(T)}{\partial x_j\partial x_j}$$

Fluxo de Calor Turbulento, q'

A média temporal do produto entre a flutuação de velocidade e de temperatura pode ser interpretado como um fluxo de calor transportado pelo campo médio.

$$\overrightarrow{q^T} = -\left\langle \rho C_p\overline{t'u'};\ \rho C_p\overline{t'v'};\ \rho C_p\overline{t'w'}\right\rangle$$

De forma que ele pode ser transposto para os termos difusivos da equação da energia!

$$\frac{\partial(T)}{\partial t} + \frac{\partial\left(U_jT\right)}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho C_p}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[k\frac{\partial T}{\partial x_j} - \rho C_p\left(\overline{u_j't'}\right)\right]$$

Equação das Flutuações de Temperatura

- **Ela pode ser obtida a partir da equação do momento da flutuação que é obtida subtraindo-se a equação N.S da velocidade instantânea da eq. N.S em termos da média temporal:**

$$\frac{\partial[(T+t')]}{\partial t} + \frac{\partial[(U_j+u'_j)(T+t')]}{\partial x_j} = \alpha\frac{\partial^2[(T+t')]}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$-$$

$$\frac{\partial(T)}{\partial t} + \frac{\partial\left[\left(U_j T + \overline{u'_j t'}\right)\right]}{\partial x_j} = \alpha\frac{\partial^2(T)}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$= \frac{\partial(t')}{\partial t} + \frac{\partial\left[(U_j t') + (T u'_j) + (u'_j t') - \left(\overline{u'_j t'}\right)\right]}{\partial x_j} = \alpha\frac{\partial^2(t')}{\partial x_j \partial x_j}$$

O operador da Equação da Energia E(*)

- **Definindo o operador da equação da energia para as flutuações de temperatura, E(t'):**

$$E(t') = \frac{\partial(t')}{\partial t} + \frac{\partial\left[(U_j t') + (T u'_j) + (u'_j t') - \left(\overline{u'_j t'}\right)\right]}{\partial x_j} - \alpha\frac{\partial^2(t')}{\partial x_j \partial x_j} = 0$$

- **Relembrando o operador Navier-Stokes das flutuações de velocidade, N(u'$_i$):**

$$N(u'_i) = \frac{\partial(u'_i)}{\partial t} + \frac{\partial\left[(U_i u'_j) + (U_j u'_i) + (u'_j u'_i) - \left(\overline{u'_j u'_i}\right)\right]}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(p')}{\partial x_i} - \nu\frac{\partial^2(u'_i)}{\partial x_j \partial x_j} = 0$$

Equação de Transporte do Fluxo de Calor Turbulento

O fluxo de calor turbulento q, é transportado pelo campo médio. A equação de transporte para q é obtida tomando-se a média temporal dos operadores N e E com t’ e u’ :

$$\overline{t' N\left(u_i'\right) + u_i' E\left(t'\right)} = 0$$

$$\frac{\partial\left(\overline{u_i' t'}\right)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[U_j\left(\overline{u_i' t'}\right)\right] =$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\alpha \overline{u_i' \frac{\partial t'}{\partial x_j}} + \nu \overline{t' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} + \alpha \overline{u_i' u_j' t'} + \frac{1}{\rho}\overline{p' t'}\delta_{i,j}\right]$$

$$-\left(\overline{u_j' t'}\right)\frac{\partial U_j}{\partial x_j} - \left(\overline{u_j' u_i'}\right)\frac{\partial T}{\partial x_j} - (\alpha + \nu)\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial t'}{\partial x_j}} + \frac{1}{\rho}\overline{p' \frac{\partial t'}{\partial x_i}}$$

Equação de Transporte do Fluxo de Calor Turbulento (II)

A equação de transporte do fluxo de calor turbulento é vetorial!

Uma interpretação física dos termos segue:

os termos do lado esquerdo representam o transporte de q;

o primeiro termo do lado direito (L.D.) é a difusão molecular (ν e α) , a difusão turbulenta e a difusão de pressão;

o segundo e terceiro termos do L.D. representam a produção pelo gradiente do campo médio de velocidades e temperatura

O quarto termo do L.D. é a dissipação devido aos efeitos de difusividade hidrodinâmica e térmica

O último termo do L.D. é uma correlação entre as flutuações de pressão e o gradiente da flutuação de temperatura

Equações Reynolds & En. Cinética Turbulenta
Escoamentos 2-D

- **Considera-se o fluido incompressível de propriedades constantes.**
- **O campo de escoamento é bi-dimensional em regime permanente; sendo U e V as velocidades médias ao longo das direções x e y**

$$\mathbf{U}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{V}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{y}} = -\frac{\mathbf{1}}{\rho}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{1}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\underbrace{\left[\mu\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}} - \rho\,\overline{\mathbf{u}\,\mathbf{u}}\right]}_{\tau_{xx}} + \frac{\mathbf{1}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\underbrace{\left[\mu\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{y}} - \rho\,\overline{\mathbf{u}\,\mathbf{v}}\right]}_{\tau_{yx}}$$

$$\mathbf{U}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{V}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{y}} = -\frac{\mathbf{1}}{\rho}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\mathbf{1}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\underbrace{\left[\mu\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} - \rho\,\overline{\mathbf{v}\,\mathbf{u}}\right]}_{\tau_{xy}} + \frac{\mathbf{1}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\underbrace{\left[\mu\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{y}} - \rho\,\overline{\mathbf{v}\,\mathbf{v}}\right]}_{\tau_{yy}}$$

Equações Reynolds & En. Cinética Turbulenta
Escoamentos 2-D

A energia cinética turbulenta, k

$$\underbrace{k = \frac{1}{2}\left[\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right]}_{\text{valor medio da en. cinética turbulent a}};\quad \underbrace{k' = \frac{1}{2}\left[u'^2 + v'^2 + w'^2\right]}_{\text{valor instantâneo de k}}$$

$$U\frac{\partial k}{\partial x} + V\frac{\partial k}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left[\nu\frac{\partial k}{\partial x} - \overline{u'k'} - \frac{\overline{pu'}}{\rho}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\nu\frac{\partial k}{\partial y} - \frac{1}{2}\overline{v'k'} - \frac{\overline{pv'}}{\rho}\right]}_{\text{difusaoturbulenta}}$$

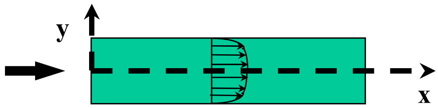
$$-\underbrace{\left[\overline{u'u'}\frac{\partial U}{\partial x} + \overline{u'v'}\frac{\partial U}{\partial y} + \overline{v'u'}\frac{\partial V}{\partial x} + \overline{v'v'}\frac{\partial V}{\partial y}\right]}_{\text{produçaopelograd.vel.media(P)}} - \underbrace{\varepsilon}_{\text{dissipaçao}}$$

Onde a dissipação das flutuações é dada pela expressão:

$$\varepsilon = \nu\left[\overline{\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_j}\cdot\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_j}}\right] = \nu\left[\begin{array}{l} \overline{\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}}\right)^2} \\ + \overline{\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{z}}\right)^2} \\ + \overline{\left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{y}}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}}\right)^2} \end{array}\right]$$

Para campo 2-D, as flutuações w são isotrópicas, dw/dx=dw/dy=dw/dz

Equações para um Canal/Tubo



$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\frac{\partial U}{\partial y} - \rho\overline{uv}\right]$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \overline{vv}}{\partial y}$$

- **Nota-se que estas equações só podem ser resolvidas se for provido equações constitutivas para o tensor de Reynolds**
- **Este problema é referido como problema de ´fechamento´em turbulência. Só pode ser resolvido propondo modelos para os termos do tensor de Reynolds**
- **Equação da Energia Cinética Turbulenta**

$$0 = +\underbrace{\frac{d}{dy}\left[\nu\frac{d\overline{k}}{dy} - \overline{kv} - \frac{\overline{pv}}{\rho}\right]}_{\text{difusao turbulenta}} - \underbrace{\left[\overline{uv}\frac{dU}{dy}\right]}_{\text{produçao (P)}} - \underbrace{\nu\overline{\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]^2}}_{\text{dissipaçao }(\varepsilon)}$$

Energia Cinética próximo a uma parede

$$0 = +\underbrace{\frac{d}{dy}\left[\nu\frac{d\overline{k}}{dy} - \overline{kv} - \frac{\overline{pv}}{\rho}\right]}_{\text{difusao turbulenta}} - \underbrace{\left[\overline{uv}\frac{dU}{dy}\right]}_{\text{produçao (P)}} - \underbrace{\nu\overline{\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]^2}}_{\text{dissipaçao }(\varepsilon)}$$

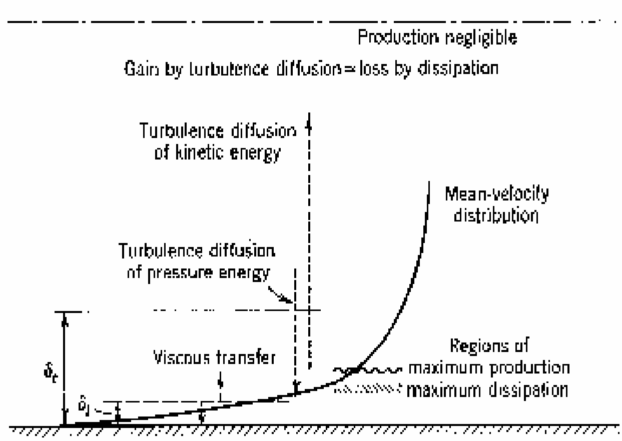


FIG. 7-47. Processes involved in the turbulence-energy balance in a pipe flow.

Equações da Camada Limite

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=U_0\frac{dU_0}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\left[\mu\frac{\partial U}{\partial y}-\rho\overline{uv}\right]}_{\tau_{yx}}$$

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial\overline{vv}}{\partial y}$$

$$U\frac{\partial\overline{k}}{\partial x}+V\frac{\partial\overline{k}}{\partial y}\cong\underbrace{+\frac{\partial}{\partial y}\left[\nu\frac{\partial\overline{k}}{\partial y}-\overline{kv}-\frac{\overline{pv}}{\rho}\right]}_{\text{difusao turbulenta}}-\underbrace{\left[\overline{uv}\frac{\partial U}{\partial y}\right]}_{\text{produçao (P)}}-\underbrace{\nu\overline{\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]^2}}_{\text{dissipaçao }(\varepsilon)}$$

Dados Experimentais em Tubos - Laufer (1954) Flutuação de Velocidade Próximo da Parede

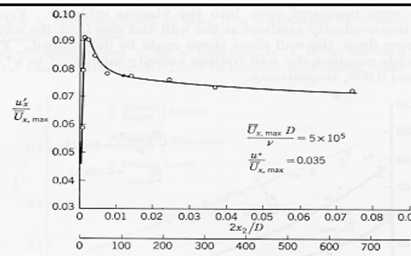


FIG. 7-33. Relative turbulence intensity $u'_x/\bar{U}_{x,max}$ near the wall in pipe flow. (*Laufer, J.; reprinted from NACA Tech. Repts. 1174, p. 6, 1954, by permission of the National Advisory Committee for Aeronautics.*)

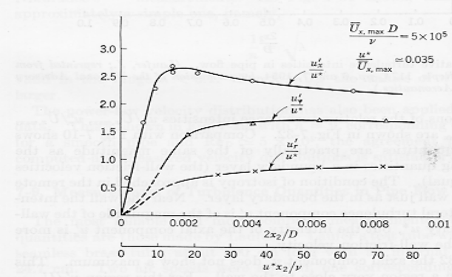


FIG. 7-34. Relative turbulence intensities near the wall in pipe flow. (*Laufer, J.; reprinted from NACA Tech. Repts. 1174, p. 17, 1954, by permission of the National Advisory Committee for Aeronautics.*)

Dados Experimentais em Tubos - Laufer (1954)Energia Cinética & Tensão Turbulenta

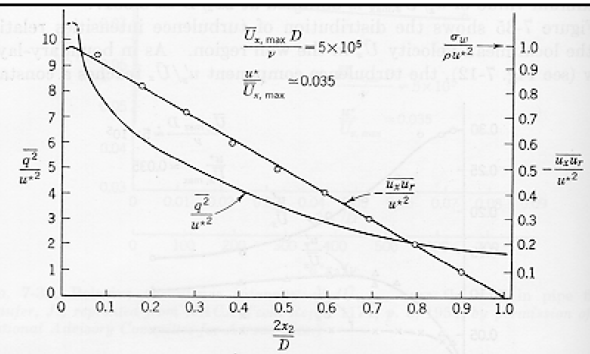


FIG. 7-36. Distributions of turbulence kinetic energy and turbulence shear stress in pipe flow. *(Laufer, J.; reprinted from NACA Tech. Repts. 1174, p. 7, 1954, by permission of the National Advisory Committee for Aeronautics.)*

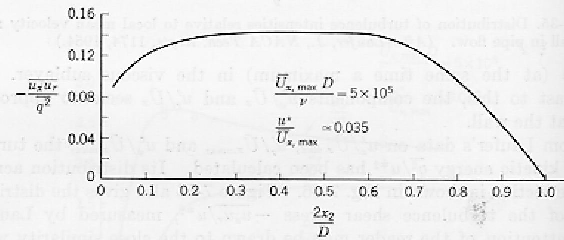


FIG. 7-37. Ratio between turbulence shear stress and turbulence kinetic energy in pipe flow. *(After Laufer, J., NACA Tech. Repts. 1174, 1954.)*

Dados Experimentais em Tubos - Laufer (1954)
Energia Cinética & Tensão Turbulenta

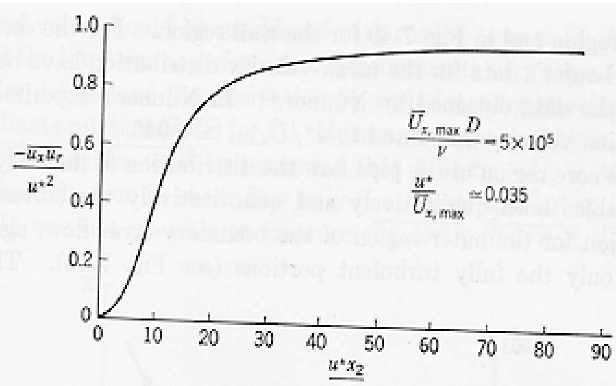


FIG. 7-38. Distribution of turbulence shear stress near the wall in pipe flow. *(Laufer, J.; reprinted from NACA Tech. Repts. 1174, p. 17, 1954, by permission of the National Advisory Committee for Aeronautics.)*

Dados Experimentais em Tubos - Laufer (1954)
Balanço de Energia Próximo da Parede

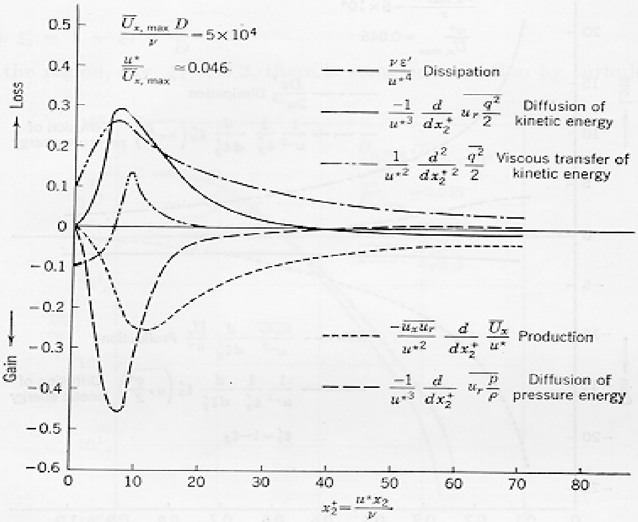


FIG. 7-43. Energy balance in the wall region of pipe flow. (*Laufer, J.; reprinted from NACA Tech. Repts. 1174, p. 14, 1954, by permission of the National Advisory Committee for Aeronautics.*)

Dados Experimentais em Tubos - Laufer (1954)
Balanço de Energia na Camada Externa

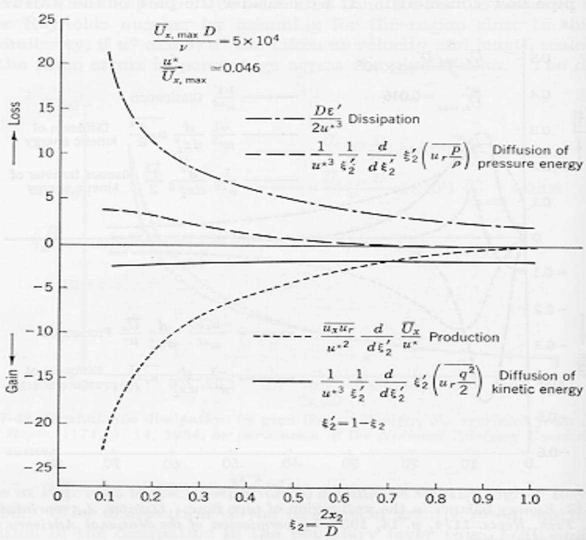


FIG. 7-44. Energy balance in the core region of pipe flow. (*Laufer, J.; reprinted from NACA Tech. Repts. 1174, p. 14, 1954, by permission of the National Advisory Committee for Aeronautics.*)