



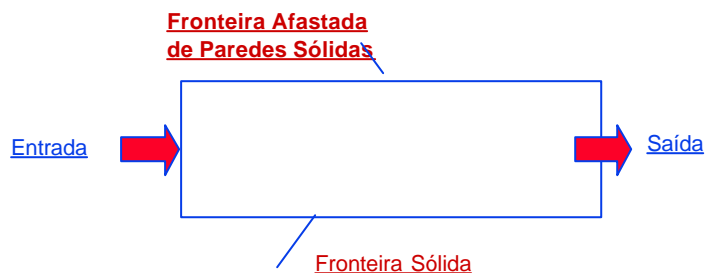
Modelo de Uma e de Duas Equações (continuação)

IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



CONDIÇÕES DE CONTORNO

O modelo $k-\epsilon$ e as equações médias de Reynolds formam um sistema de equações diferenciais elípticas (ou parabólicas dependendo do caso). Se o sistema for elíptico, k e ϵ necessitam de especificação de velocidade, em todo o contorno.



IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



CONDIÇÕES DE CONTORNO: k ENTRADA



Em entradas os valores de k e ϵ frequentemente não são conhecidos! Se eles forem disponíveis devem ser utilizados. O valor das velocidades na entrada também deve ser conhecido ou estimado.

Se o valor de k não é conhecido usualmente estima-se como uma pequena porcentagem da intensidade de turbulência ($0.5\% < I < 3\%$), onde $I = k/U^2$ e U é a velocidade de referência do campo médio.



CONDIÇÕES DE CONTORNO: ϵ ENTRADA



O valor de ϵ deve ser selecionado de tal modo que a escala 'L' de comprimento usada na equação abaixo seja aproximadamente 1/10 da largura da camada limite ou de outra dimensão característica do escoamento (diâmetro, espaçamento entre placas, etc).

$$\epsilon \cong k^{3/2}/L$$

Se a tensão de Reynolds e o campo médio de vel. forem medidos na entrada, ϵ também pode ser estimado utilizando a condição de equilíbrio local:

$$P_k = \epsilon \rightarrow \epsilon \cong \overline{-u'v'} \frac{\partial U}{\partial y}$$



CONDIÇÕES DE CONTORNO: ENTRADA



- O valores estimados para k e ϵ na entrada do domínio fornecem campos corretos no interior do domínio.
- Isto porque sua influência diminui a medida que o escoamento avança no domínio além disto, k e ϵ são produzidos e destruídos no interior do domínio. Estes fontes estabelecem os valores corretos dos balanços de k e ϵ diminuindo a relevância dos valores de entrada.
- Entretanto campos de k e ϵ em regiões próximas das entradas sofrem influência dos valores estimados na entrada. Portanto a análise nesta região deve ser evitada pois ela é sensível aos valores de entrada.

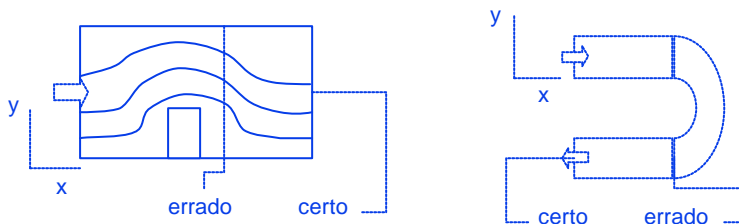
IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



CONDIÇÕES DE CONTORNO: SAÍDA



A saída do domínio computacional normalmente deve ser posicionada numa região onde o escoamento seja o mais paralelo possível. Isto é, não se recomenda posicionar a saída numa região com recirculação, na saída de uma curva ou outras quaisquer onde o escoamento está sujeito a descolamentos ou re-colamentos a superfície.



IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



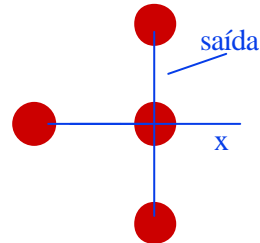
CONDIÇÕES DE CONTORNO: SAÍDA



Atendida esta condição pode-se impor que a propriedade na saída do domínio não apresenta variação. Neste caso a condição de contorno passa a ser uma de segunda espécie (Neuman), isto é, a propriedade apresenta derivada nula na saída:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0$$

Isto significa que na saída os acoplamentos difusivos não existem e o transporte convectivo ocorre devido ao ponto a montante do domínio.



CONDIÇÕES CONTORNO: LONGE PAREDES SÓLIDAS



- Usualmente existem dois tipos de fronteiras longe de paredes sólidas: uma onde o escoamento livre é turbulento e outra onde ele é ausente de turbulência.
- Escoamento ambiente com presença de turbulência isotrópica:

$$U = U_{\text{ext}} \quad U \frac{\partial k}{\partial x} = -\varepsilon \quad U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

- Escoamento ambiente numa corrente livre de turbulência:

$$U = U_{\text{ext}} \quad k \cong 0 \quad \varepsilon \cong 0 \quad \mu_T = C_{\mu} \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \cong 0$$

Intermitência



CONDIÇÕES DE CONTORNO: PAREDES SÓLIDAS



- A condição de não-deslizamento na parede impõe uma dificuldade extra em escoamentos turbulentos. O modelo k - ϵ (assim como a maioria dos modelos de duas equações) falham em reproduzir o comportamento da lei log se integrados a partir da parede, $y^+ > 1$.
- Existem duas alternativas para se estabelecer as c.c. na parede: (1) introduzir funções de amortecimento similares ao fator de amortecimento de Van Driest para permitir integração da parede ou (2) utilizar a lei log para determinar a velocidade, k e ϵ no primeiro nó interior da grade.
- A opção (1) será transferida para o tópico de modelo k - ϵ de Baixo Reynolds pois envolve mais do que melhorar a integração na Camada Interna.
- A opção (2) será tratada aqui.

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



CONDIÇÕES DE CONTORNO: PAREDES SÓLIDAS



- Utiliza-se leis de parede para fazer uma 'ponte' entre o escoamento próximo da parede e a região log.
- O escoamento no primeiro nó adjacente à parede não é resolvido mas determinado a partir das leis de parede.
- É necessário que a distância da parede ao primeiro esteja dentro da região log, $30 < y^+ < 200$. Isto porque o modelo k - ϵ atende a solução da região log naturalmente.

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



CONDIÇÕES DE CONTORNO: PAREDES SÓLIDAS (II)



(a) Escoamento onde dissipação = produção no primeiro nó da grade – região log.

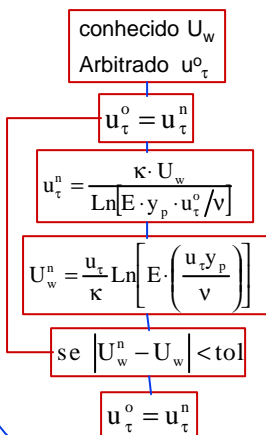
- Este procedimento utiliza a lei de parede como uma equação constitutiva entre a velocidade e a tensão na parede.
- A velocidade no nó próximo da superfície é uma função transcendental da vel. atrito (u_τ).
- O primeiro nó da grade, que deve estar na região log - $30 < y^+ < 130$, U , e u_τ são determinados iterativamente.



CONDIÇÕES CONTORNO PAREDES SÓLIDAS : ATRITO



Para $30 < y^+ < 200$



• Os métodos numéricos iniciam com um valor inicial para o campo de velocidades, U_w .

• Este valor pode ser utilizado para iniciar o cálculo da tensão na parede. Para cada velocidade no primeiro nó haverá uma tensão:

• y_p é a distância do 1º nó à parede,

• O sub índice w refere-se à propriedade calculada no 1º nó,

• $E = e^{k \cdot B}$ e $k = 0.41$ e $5 < B < 5.5$;

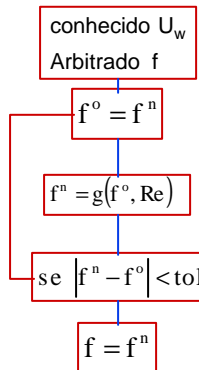
• $E = 9.54$;



CONDIÇÕES CONTORNO PAREDES SÓLIDAS : ATRITO



Para $30 < y^+ < 200$



- Os métodos numéricos de volumes finitos empregam diretamente a tensão na parede.
- Ela também pode ser calculada utilizando a definição de fator de atrito, f .

$$\tau_w = f \frac{1}{2} \rho U_w^2 \rightarrow f = \max(f_L, f_T)$$

- onde f assume o maior valor entre o fator de atrito laminar ou turbulento.

$$f_T = \left[\frac{\sqrt{2} \cdot \kappa}{\ln[E \cdot Re \cdot \sqrt{2} \cdot f_T / 2]} \right]^2 \quad \& \quad f_L = \frac{2}{Re}; \quad Re = \frac{y_p \cdot U_w}{\nu}$$

- a vantagem deste procedimento é que se $y_p^+ < 30$ o valor estimado de f não é muito ruim porque ele assume o f laminar.

IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



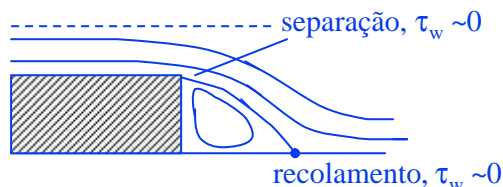
CONDIÇÕES DE CONTORNO: PAREDES SÓLIDAS



- As deficiências da abordagem padrão ocorrem para regiões onde o escoamento descola/recola à parede.
- As deficiências ocorrem porque para escoamentos com descolamento:

$\tau_w = 0$ no ponto de separação e portanto $k_w = 0$ e $q_w = 0$ também, isto conduz a uma situação não realista!

- Medidas experimentais revelam que k_w e q_w atingem máximos locais no ponto de separação.



IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



CONDIÇÕES DE CONTORNO: PAREDES SÓLIDAS (V)



(b) Escoamentos separados; com regiões de recirculação e especialmente em regiões com descolamento e re-colamento.

Remédio: uma abordagem muito empregada (Launder e Spalding) substitui a velocidade característica u_τ por $k^{1/2}$.

Esta modificação resulta em melhores resultados mas não resolve completamente o problema. Nestas regiões a existe um transporte difusivo normal a parede e a aproximação da lei log, a rigor, não é válida. Entretanto ela se restringe a uma pequena região próximo do ponto crítico ($t_w = 0$)

$$U_w = \frac{C_\mu^{1/4} \sqrt{k_w}}{\kappa} \ln \left[E \cdot \left(\frac{y_p \cdot C_\mu^{1/4} \sqrt{k_w}}{v} \right) \right] \quad k_w = \frac{(u_\tau)^2}{\sqrt{C_\mu}}$$

$$\frac{\tau_w}{\rho} = u_\tau \frac{\kappa \cdot (C_\mu^{1/4} \sqrt{k_w}) \cdot U_w}{\ln \left[E \cdot \left(\frac{y_p \cdot C_\mu^{1/4} \sqrt{k_w}}{v} \right) \right]} \quad \varepsilon_w = \frac{C_\mu^{3/4} \cdot k_w^{3/2}}{\kappa y_p}$$

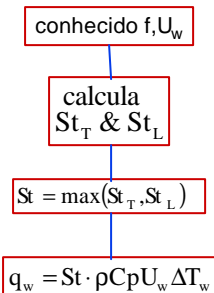
Fora de pontos críticos ela é equivalente ao item (a): $u_\tau = C_m^{1/4} k^{1/2}$



CONDIÇÕES CONTORNO PAREDES SÓLIDAS : T/Q



Para $30 < y^+ < 200$



• Em transferência de calor/massa o fluxo de calor ou a temperatura/entalpia podem ser estimados no nó adjacente à parede utilizando St determinado da lei log térmica:

$$q_w = \rho C_p U_w St \cdot \Delta T_w \rightarrow St = \max(St_L, St_T)$$

• Procedimento utilizado no Phoenics

$$St_T = \frac{f_T/2}{Pr_T [1 + Pm \cdot \sqrt{f_T}]} \quad \& \quad St_L = \frac{1}{Pr Re}$$

$$Pm = 9 \left(\frac{Pr}{Pr_T} - 1 \right) \cdot \left(\frac{Pr_T}{Pr} \right)^{1/4}$$

• St_T vem similar ao exemplo 'trans cal placa plana, slide (ii)' da aula sobre T-law.



CONDIÇÕES CONTORNO PAREDES SÓLIDAS : T/Q



conhecido f, U_w

calcula
 St_T & St_L

$$q_w = St \cdot \rho C_p U_w \Delta T_w$$

- se $y^+ < y_{crit}^+$, t^+ deve ser calculado pela relação:
 $t^+ = Pr \cdot y^+$

- Procedimento utilizado pelo pacote TEACH e CAST.

- Uma vez que u_τ é conhecido do campo de velocidades, eles determinam t^+ diretamente da lei:

$$t^+ = \frac{Pr_t}{\kappa} \ln y^+ + C_T(Pr);$$

$$C_T = 12.5 \cdot Pr^{2/3} + 2.12 \ln Pr - B^*$$

$$B^* = -5.3 \text{ se } Pr > 0.5 \text{ ou } -1.3 \text{ se } Pr < .5$$

$$St = \frac{1}{t_w^+ u_w^+}$$

$$q_w = \rho C_p U_w St \cdot \Delta T_w$$



CONDIÇÕES CONTORNO PAREDES SÓLIDAS : k e e



- Os valores para k e e são determinados no nó adjacente à parede a partir da solução da lei log. Uma vez conhecido a velocidade de atrito na parede, vem que para região log:

para $30 < y^+ < 130$

$$k_w = \frac{(u_\tau)^2}{\sqrt{C_\mu}}$$

$$\varepsilon_w = \frac{(u_\tau)^3}{\kappa y_p}$$

Onde y_p é a distância do 1º nó à parede, o sub índice w refere-se a propriedade calculada no 1º nó, $E = e^{k \cdot B}$ e $k = 0.41$ e $5 < B < 5.5$. Como k e e apresentam a mesma escala de tempo, é conveniente acoplar suas c.c., isto é,

$$\varepsilon_w = \frac{C_\mu^{3/4} \cdot k_w^{3/2}}{\kappa y_p}$$



COMENTÁRIOS SOBRE MODELO $k-\epsilon$ (I)



- Falta rigor físico na modelagem da equação da dissipação. De fato não são disponíveis medidas experimentais nem simulações numéricas (LES e DNS) que descrevem o comportamento físico de todos os termos da equação.
- O modelo é fundamentado em análise dimensional. De fato o que se modela são as equações de k e ϵ mas não a física da turbulência.
- As constantes do modelo são ajustadas para satisfazer escoamentos típicos de camada limite. Infelizmente elas não trazem universalidade ao modelo. Os valores das constantes podem ser ajustados para que o modelo melhor represente classes específicas de escoamentos.
- Os comentários acima se aplicam aos outros tipos de modelo de duas equações. Caso eles não empreguem a equação da dissipação haverá outra grandeza modelada que se desconhece igualmente sua natureza.

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



COMENTÁRIOS SOBRE MODELO $k-\epsilon$ (II)



- A implementação das Eq. Médias de Re é simples, isto é, elas apresentam forma similar aos casos laminares se $n_{\text{eff}} = n_L + n_T$. Porém há duas equações extras a serem resolvidas.
- O problema com eqs. $k-\epsilon$ é que elas possuem uma escala de tempo muito menor que a escala do campo médio. Isto faz com que o sistema $k-\epsilon$ seja bem mais 'rígido' que o do momento.
- Por esta razão resolve-se primeiro o momento com um campo aproximado de $k-\epsilon$. Depois disto completado inicia-se a solução de $k-\epsilon$ de forma iterativa.
- A rigidez do sistema e o acoplamento entre $k-\epsilon$ e U freqüentemente causam, para grandes passos de tempo (ou equivalente em métodos iterativos), valores de k e ϵ negativos! que conduzem a divergência.
- Os perfis de k e ϵ apresentam, tipicamente, maiores gradientes próx. às paredes que o campo médio de velocidades. Estes picos são difíceis de capturar a menos que a grade seja refinada o suficiente.

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



COMENTÁRIOS SOBRE MODELO k-ε (III)



- O modelo k-ε produz resultados qualitativos para uma grande maioria de escoamentos. Em particular ele produz bons resultados para escoamentos em camada limite (thin shear flows) e escoamentos desenvolvidos em dutos.
- Em casos mais complexos, que também são casos padrões para teste de modelos elípticos ele não produz resultados satisfatórios e necessita de correções, p. ex: escoamento num degrau e escoamento confinado em duto com rotação (swirling flow). Até em casos mais simples, jato axi-simétrico, é reconhecida sua pobre performance.
- Pode-se afirmar que o modelo k-ε com as constantes padrões não produz bons resultados quantitativos em situações onde existem uma elevada tensão média ou regiões do escoamento com extensa área de escoamento separado.
- Atribui-se a estas incapacidades ao modelo a equação da dissipação. Em geral o modelo k-ε produz valores de n_T majorados, adicionalmente a equação da dissipação nem sempre produz os valores corretos do comprimento de escala L.
- Estas situações são remediadas introduzindo-se correções no modelo k-ε !

IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



FORMAS ALTERNATIVAS AO MODELO k-ε PADRÃO



- É reconhecido que o modelo k-ε apresenta uma tendência sobre-estimar os valores de n_T .
- Este comportamento 'difusivo' é constatado em escoamentos padrões como: taxa de abertura de jatos axi-simétricos, expansão no degrau, escoamentos com velocidades tangenciais (swirling flows).
- A inconsistência no modelo padrão k-ε é, frequentemente, atribuída a equação da dissipação a qual foi constituída a partir de bases empíricas.
- As correções ao modelo surgiram a partir de modificações na equação da dissipação introduzindo uma abordagem um pouco mais racional.
- Serão apresentados os modelos:
 - k-ε Chen-Kim (1987)
 - k-ε RNG (Orzag) (1986)
 - k-ε Realizable (Shih) (1995)

IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



Formas Alternativas ao Modelo k-ε (II)



$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + P_k - \varepsilon$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + P_\varepsilon - D_\varepsilon$$

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Modelo	P_k	P_ε	D_ε
Padrão (1972)	$\tau_{ij} S_{ij}$	$C_{\varepsilon 1} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) P_k$	$C_{\varepsilon 2} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) \varepsilon$
RNG (1986)	$\tau_{ij} S_{ij}$	$C_{\varepsilon 1} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) P_k$	$C_{\varepsilon 2} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) \varepsilon + C_{\varepsilon 3} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) \varepsilon$
Chem-Kin (1987)	$\tau_{ij} S_{ij}$	$C_{\varepsilon 1} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) P_k + C_{\varepsilon 3} \left(\frac{P_k^2}{k} \right)$	$C_{\varepsilon 2} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) \varepsilon$
Realizável (1995)	$\tau_{ij} S_{ij}$	$C_{\varepsilon 1} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) \cdot (\tilde{S} \cdot k)$	$C_{\varepsilon 2} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{1 + \sqrt{\nu \varepsilon / k^2}} \right)$

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



Formas Alternativas ao Modelo k-ε (III)



Constantes do modelo RNG:

$$C_{\varepsilon 3} = \frac{C_\mu \lambda^3 (1 - \lambda / \lambda_0)}{1 + \beta \lambda^3}$$

$$\lambda = \frac{k}{\varepsilon} \tilde{S} \sqrt{2}$$

$$\tilde{S} = \sqrt{S_{ij} S_{ji}}$$

$$C_{\varepsilon 1} = 1.42$$

$$C_{\varepsilon 2} = 1.68$$

$$C_\mu = 0.085$$

$$\sigma_k = 0.72$$

$$\sigma_\varepsilon = 0.72$$

$$\beta = 0.012$$

$$\lambda_0 = 4.38$$

Constantes do modelo Chem-Kin:

$$C_{\varepsilon 1} = 1.15$$

$$C_{\varepsilon 2} = 1.9$$

$$C_{\varepsilon 3} = 0.25$$

$$C_\mu = 0.09$$

$$\sigma_k = 0.72$$

$$\sigma_\varepsilon = 1.15$$

Constantes do modelo Realizável:

$$C_{\varepsilon 1} = \max \left[0.43, \frac{\eta}{\eta + 5} \right]$$

$$\eta = \frac{k}{\varepsilon} \tilde{S}$$

$$\tilde{S} = \sqrt{S_{ij} S_{ji}}$$

$$C_{\varepsilon 2} = 1.9$$

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_S (U^* k / \varepsilon)}$$

$$U^* = \sqrt{S_{ij} S_{ij} + \Omega_{ij} \Omega_{ij}}$$

$$A_0 = 4.04$$

$$A_S = \sqrt{6} \cos \phi$$

$$\phi = \frac{1}{3} \arccos \left[\sqrt{6} W \right]$$

$$W = \frac{S_{ij} S_{jk} S_{ki}}{\tilde{S}}$$

$$\sigma_k = 1.0$$

$$\sigma_\varepsilon = 1.2$$

$$\beta = 0.012$$

$$\lambda_0 = 4.38$$

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



CORREÇÕES k-ε PARA EFEITOS DE EMPUXO



- Efeitos de empuxo deslocam fluido e, conseqüentemente, turbilhões. Estes por sua vez podem receber ou ceder energia devido as variações de densidade (empuxo).
- A variação de densidade no fluido pode ocorrer por efeito térmico ou pela variação da concentração de massa (reação química ou mistura de soluções, dispersão de gases, etc).
- A equação média do momento apresenta uma força de campo a mais devido ao termo de empuxo:

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu S_{ij} - \overline{\rho u_j u_i}) + (\rho - \rho_{ref}) g_i$$

IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



CORREÇÕES k-ε PARA EFEITOS DE EMPUXO



- Devido à força de campo e à diferença de densidade surge um termo a mais na equação da energia cinética turbulenta que corresponde ao trabalho recebido pelo fluido devido a flutuação da força de empuxo:

$$B_k = \overline{u_i \rho' g_i}$$

- onde a densidade foi decomposta numa densidade média e sua flutuação, ($\rho = \rho' + \rho'$),
- Ele pode representar a transferência de energia potencial em energia cinética turbulenta para uma situação de um escoamento estratificado instável:

mais pesado
desce
mais leve
sobe
- ou representar a transferência de energia cinética turbulenta em energia potencial para uma situação onde há mistura de um fluido pesado em um leve

IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



CORREÇÕES k-ε PARA EFEITOS DE EMPUXO



- A equação da energia cinética turbulenta passa a ser:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + P_k - \varepsilon + B_k$$

- O termo B_k é modelado (Rodi 1980) por: $B_k = \overline{u_i \rho' g_i} = |g_i| \frac{\nu_T}{\sigma_b} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$

s_b corresponde a um Prandtl turbulento para o empuxo.

- $dr/dx < 0$ corresponde a um escoamento estratificado estável, B_k age como um sorvedouro (dissipador) de k
- $dr/dx > 0$ corresponde a um escoamento estratificado instável, B_k age como uma fonte (termo produtor) de k



CORREÇÕES k-ε PARA EFEITOS DE EMPUXO



- Uma alteração similar também ocorre para equação da dissipação.

- O termo B_ε é modelado (Rodi 1980) por: $B_\varepsilon = \frac{C_{\varepsilon 1} \varepsilon}{k} \cdot C_{\varepsilon 3} \cdot \max(B_k, 0)$

- $C_{\varepsilon 3}$ corresponde a uma constante.
- $dr/dx < 0$ corresponde a um escoamento estratificado estável, B_ε é nulo & $B_k < 0$, isto é não traz modificações na eq. e.
- $dr/dx > 0$ corresponde a um escoamento estratificado instável, B_ε cresce proporcional a ε & $B_k > 0$, aumenta termo produção ε .

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} [P_k + C_{\varepsilon 3} \max(B_k, 0)] - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K}$$



CORREÇÕES $k-\epsilon$ PARA EFEITOS DE CURVATURA



- Efeitos de curvatura estão relacionados com a curvatura das paredes e também das linhas de corrente.
- Eles podem apresentar significativas alterações nas tensões turbulentas porque são capazes de amplificar ou atenuar os turbilhões de maneira similar à estratificação térmica causada pelos efeitos de empuxo.
- Eles estão presentes em corpos com curvatura, como aerofólios, assim como próximo a pontos críticos do escoamento onde ocorre descolamento/recolamento do escoamento.

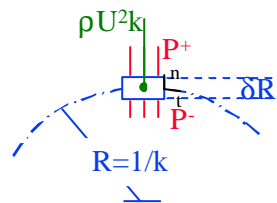
IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



LINHAS DE CORRENTE CURVAS & FORÇAS ATUANTES



- Para um elemento de fluido descrever uma trajetória com curvatura k , é necessário que aja sobre o elemento uma força centrípeta (diferença de pressão) na direção n .
- Esta força equilibra a ação centrífuga devido a variação angular da aceleração corpo.
- Considerando apenas forças inerciais, o balanço na direção normal à linha de corrente é:
- Aproximação inercial é válida para as grandes escalas (turbilhões) porque os efeitos de viscosidade molecular são pequenos nesta escala



$$mU^2k = (P^+ - P^-)A$$

$$m \equiv \rho A \delta R \rightarrow kU^2 - \frac{\partial P}{\partial n} = 0$$

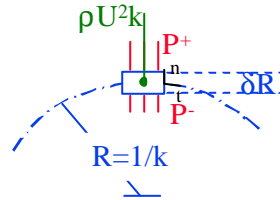
IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



LINHAS DE CORRENTE CURVAS & FORÇAS ATUANTES



- Para haver curvatura numa linha de corrente é necessário que haja um gradiente de pressão normal à linha de corrente.
- A pressão aumenta com a distância radial.
- Corolário, a medida que se aproxima do centro da curva a pressão diminui.
- A diferença de pressão na partícula de fluido age no sentido do centro da curva.
- A aceleração centrífuga age no sentido do raio crescente, para fora da curva.



$$mU^2k = (P^+ - P^-)A$$

$$m \equiv \rho A \Delta R \rightarrow kU^2 - \frac{\partial P}{\partial n} = 0$$

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



INSTABILIDADES DEVIDO A CURVATURA



- O movimento radial dos turbilhões pode ser atenuado ou amplificado devido a combinação da curvatura das linhas de corrente e seu perfil de velocidades.
- Se um turbilhão tende a transportar fluido numa trajetória normal à linha de corrente a ação centrípeta do campo de pressão ou a ação centrífuga da aceleração podem atuar como agentes restauradores ou amplificadores de seu transporte.

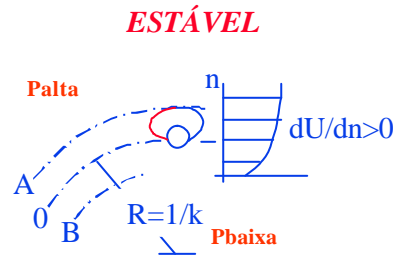
IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



SUPERFÍCIE CONVEXA ESTACIONÁRIA



- Um turbilhão desloca fluido da trajetória 0-0 para A-A;
- $U_0 < U_A$ e $DP_0 < DP_A$
- A força pressão tende a trazer o turbilhão para a trajetória 0-0; um deslocamento para B-B a força centrífuga tenderia a trazer para trajetória 0-0.
- É uma configuração estável pois tende a trazer o turbilhão para posição inicial.
- Ela inibe o movimento transversal dos turbilhões. A tensão turbulenta diminui se comparada a uma parede plana.



$$mU^2k = (P^+ - P^-)A$$

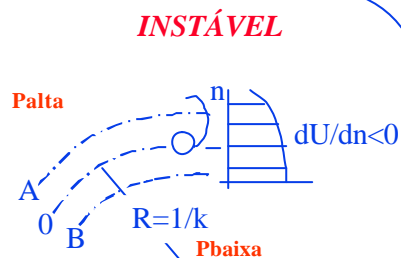
IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



SUPERFÍCIE CONVEXA SE MOVENDO



- Um turbilhão desloca fluido da trajetória 0-0 para A-A;
- $U_0 > U_A$ e $DP_0 < DP_A$
- Um turbilhão com U_0 na trajetória A-A tem uma centrífuga maior que a pressão; se deslocado para trajetória B-B ele terá centrífuga menor que pressão.
- É uma configuração instável pois o turbilhão tende a se mover radialmente para fora ou para dentro.
- Ele favorece o movimento transversal dos turbilhões. A tensão turbulenta aumenta se comparada a uma parede plana.



$$mU^2k = (P^+ - P^-)A$$

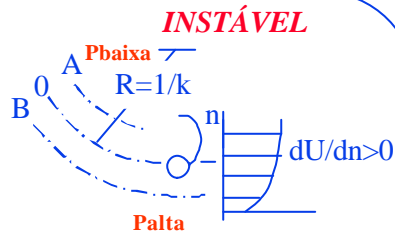
IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



SUPERFÍCIE CÔNCAVA ESTACIONÁRIA



- Um turbilhão desloca fluido da trajetória 0-0 para A-A;
- $U_0 < U_A$ e $DP_0 < DPA$
- Um turbilhão com U_0 na trajetória A-A tem uma centrífuga maior que a pressão; se deslocado para trajetória B-B ele terá centrífuga menor que pressão.
- É uma configuração instável pois o turbilhão tende a se mover radialmente para fora ou para dentro.
- Ele favorece o movimento transversal dos turbilhões. A tensão turbulenta aumenta se comparada a uma parede plana.



$$mU^2k = (P^+ - P^-)A$$

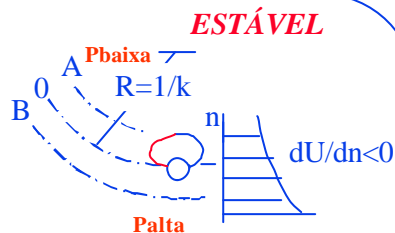
IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



SUPERFÍCIE CÔNCAVA SE MOVENDO



- Um turbilhão desloca fluido da trajetória 0-0 para A-A;
- $U_0 > U_A$ e $DP_0 > DPA$
- Um turbilhão com U_0 na trajetória A-A tem uma centrífuga maior que a pressão; se deslocado para trajetória B-B ele terá centrífuga menor que pressão.
- É uma configuração estável pois o turbilhão tende a ser restaurado para sua posição inicial.
- Ele inibe o movimento transversal dos turbilhões. A tensão turbulenta diminui se comparada a uma parede plana.



$$mU^2k = (P^+ - P^-)A$$

IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



RESUMO INSTABILIDADE DEVIDO CURVATURA LINHA CORRENTE



	$dU_q/dr > 0$	$dU_q/dr < 0$
Curvatura convexa	estável	instável
Curvatura côncava	instável	estável

Varição do atrito em relação a uma parede plana:

	$dU_q/dr > 0$	$dU_q/dr < 0$
Curvatura convexa	atrito ?	atrito ?
Curvatura côncava	atrito ?	atrito ?

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP

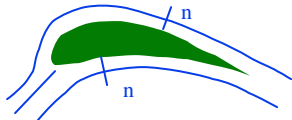


EXEMPLOS



Aerofólio

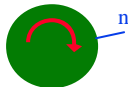
CONVEXA, $dU/dn > 0$ estável, τ ?



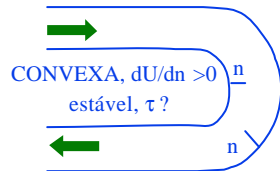
CONCÔVA, $dU/dn > 0$ instável, τ ?

Cilindro girando

CONVEXA,
 $dU/dn < 0$
instável, τ ?



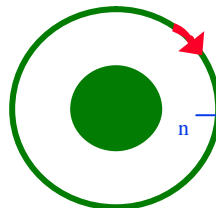
Curva U



CÔNCOVA,
 $dU/dn > 0$
instável, τ ?

Cilindro externo girando, interno estacionário

CÔNCOVA,
 $dU/dn < 0$
estável, τ ?



IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



CORREÇÕES NO MODELO k-ε



- O modelo k-ε não captura ao aumento ou diminuição da turbulência devido à curvatura das linhas de corrente na mesma magnitude dos dados experimentais.
- Diversas correções empíricas ou semi-empíricas foram propostas. Para compreensiva revisão veja Patel & Sotiropoulos, Prog. Aerospace Sci, vol 33, pp 1-70 (1997).
- Há modelos que introduzem correções nas equações de k e outros na equação para ε e outros na constante C_m;
- Todos os modelos concordam em empregar a lei de parede, sem modificações, para condição de contorno.

IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



CORREÇÕES NO MODELO k-ε Launder



- Launder (1977) introduziu uma modificação na equação de ε relativa ao termo de destruição:

$$C_{\varepsilon 2}(1 - C_c Ri_t) \frac{\varepsilon^2}{k}; \quad Ri_t = \frac{k}{\varepsilon^2} S(1+S) \frac{\partial U}{\partial y} \quad \& \quad S = \frac{kU}{\partial U / \partial y}$$

- O termo modificado é dependente o n. Richardson definido em termos da escala de tempo da turbulência, da curvatura k e da razão extra de deformação S; C_c = 0.2.
- Para cenário estável Ri_t > 0 e a taxa de dissipação diminui, ε aumenta e k diminui
- Para cenário instável, Ri_t < 0 e a taxa de dissipação aumenta, ε diminui e k aumenta.

IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP