



# Modelo de Uma e de Duas Equações

IM –450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## INTRODUÇÃO



Os modelos de Uma ou Duas Equações apresentam características comuns:

- Utilizam a aproximação de Boussinesq
- Utilizam a Equação da Energia Cinética Turbulenta,  $k$

Os Modelos de Uma Equação são incompletos:  
necessitam de uma relação entre a escala de comprimento das grandes escalas com uma dimensão característica do escoamento;

Os Modelos de Duas Equações são completos:  
a inserção da segunda equação provê a determinação da escala de comprimento internamente ao modelo. Não necessitam de informações externas!

IM –450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## TENSOR DE REYNOLDS & HIPÓTESE BOUSINESQ



Ele em si não é um modelo de turbulência, apenas relaciona a tensão com o campo médio de deformações.

$$\sigma_{i,j}^T = \frac{\tau_{i,j}^T}{\rho} = 2\nu_T S_{i,j} - \frac{2}{3}k\delta_{i,j}$$

A viscosidade turbulenta é uma propriedade do escoamento e não do fluido! O problema da turbulência passa a ser a determinação da distribuição de  $\nu_T$ !

O principal aspecto desta relação entre  $\tau_{ij}$  e  $S_{ij}$  é a natureza ESCALAR de  $\nu_T$ . Isto é, ele é constante em qualquer direção e portanto isotrópico. Esta aproximação é razoável para escoamentos simples de camada limite (thin shear flows) mas pode falhar em casos complexos.



## TENSOR DE REYNOLDS & HIPÓTESE BOUSINESQ



- Por exemplo: escoamento em canal paralelo com rugosidade diferente em cada parede faz com que o máximo de velocidade não coincida com a região de tensão nula.
- Isto é existem regiões onde  $\tau$  e  $dU/dy$  apresentam sinais opostos. Com o modelo de Bousinesq  $\nu_T < 0$  o que é fisicamente não plausível e portanto revela deficiência da hipótese.
- Em tempo, o modelo com Bousinesq não determinará  $\nu_T < 0$ , mas também não distinguirá que  $\tau$  e  $dU/dy$  tem máximos em posições distintas.



## TENSOR DE REYNOLDS & HIPÓTESE BOUSINESQ



- **Por exemplo:** A variação brusca do tensor de deformação do fluido,  $S_{ij}$ , não é acompanhada pelo tensor das tensões turbulento.
- Isto ocorre em contrações ou expansões abruptas, ou mesmo em escoamentos 2-D onde subitamente é introduzido uma ‘tridimensionalidade’ no escoamento (um obstáculo).
- Nestas regiões a direção principal da tensão não está alinhada com a deformação. As estruturas dos turbilhões que conduzem as tensões levam a um tempo de relaxação maior daquele utilizado pelo tensor deformação se modificar.

IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## MODELO 1 EQUAÇÃO – PRANDTL & KOLMOGOROV (1945)



As flutuações de velocidades são caracterizadas pela energia cinética das flutuações:

$$\sqrt{u'^2} \approx \sqrt{v'^2} \approx \sqrt{w'^2} \approx \sqrt{k}$$

- Como  $k$  é constituído, principalmente, pela energia dos grandes turbilhões,  $k^{1/2}$  é a velocidade representativa das grandes escalas.
- Se somente duas escalas: velocidade  $k^{1/2}$  e comprimento  $L$ , podem definir a viscosidade turbulenta então, por argumentos dimensionais sua relação é:

$$v_T = C'_\mu \sqrt{k} \cdot L$$

onde  $C'_m$  é uma constante somente para elevados números de Reynolds.

IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## MODELO 1 EQUAÇÃO – (II)



$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \underbrace{\sigma_{i,j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{P_k} - \varepsilon + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ v \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i' u_j'} - \frac{1}{\rho} \overline{p' u_j'} \right]}_{D_k}$$

- A equação de  $k$  não pode ser empregada diretamente em modelos de turbulência. Ela apresenta correlações que envolvem flutuações de velocidade que são desconhecidas, p. ex. dissipação e difusão.
- Para cada termo desconhecido é necessário o desenvolvimento de modelo de forma que a equação de transporte de  $k$  possa ser resolvida.
- Passa-se a seguir a aplicação dos modelos para os termos de difusão, produção e dissipação.

IM – 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## MODELO DA DIFUSÃO DE $k$ , $D_k$



$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ u_j \left( \frac{u_i u_i}{2} + \frac{p'}{\rho} \right) - v \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( v + \frac{v_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

- $D_k$  denota transporte de  $k$  por difusão:  $\text{div}(\text{grad}(k))$
- O último termo é o transporte por difusão molecular de  $k$  - relevante em regiões de baixa intensidade turb. i.e., sub camada viscosa .
- A pressão e o tensor turbulento são modelados utilizando-se, por hipótese, um de gradiente de  $k$  onde  $S_k$  é uma constante de ajuste do modelo e  $n_T$  o coeficiente de difusão turbulento

IM – 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## MODELO DE PRODUÇÃO DE k, Pk



$$P_k = -\overline{u'_i u'_j} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \cong v_T \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \equiv v_T \cdot S_{i,j} \cdot S_{i,j}$$

- $P_k$  denota produção de k e fisicamente significa o trabalho realizado pelas tensões de Reynolds no escoamento médio.
- Na equação de transporte de k ele aparece como um termo 'fonte'; porém na eq. Transporte da Energia Cinética média ele é um 'sorvedouro'
- Representa a taxa de transferência de energia do escoamento médio para os turbilhões.
- $P_k$  é modelado aproximando as tensões turbulentas,  $u'_i u'_j$ , por meio da aproximação Bousinesq.

IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## MODELO DISSIPAÇÃO k, e



A dissipação de k é modelada pela expressão:

$$\varepsilon = v \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$$

Ela difere da dissipação real do escoamento

$$\varepsilon_{\text{real}} = 2\nu \overline{s'_{ij} s'_{ij}} \quad \text{onde} \quad s'_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)$$

Mas elas estão relacionadas por meio da expressão

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{real}} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{\nu u'_i \frac{\partial u'_k}{\partial x_i}} \right)$$

Na prática  $\varepsilon \approx \varepsilon_{\text{real}}$  a menos em regiões onde existem fortes gradientes (choques em esc. Compressíveis) ou na subcamada laminar,  $y^+ < 5$ .

A taxa de dissipação  $\varepsilon$  coincide com a dissipação real somente p/ turbulência homogênea. Portanto ela também é conhecida como taxa de dissipação homogênea.

IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## MODELO DE DISSIPACÃO DE k (II)



- A correlação que define a taxa de dissipação de k é constituída por produtos de derivadas das flutuações de velocidade desconhecidas a priori. É necessário portanto modelar este termo.
- Baseando-se na análise dimensional, espera-se uma relação funcional entre a taxa de dissipação e as escalas do escoamento da forma:

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{L}$$

- onde  $C_D$  é uma constante a ser determinada e L é o comprimento característico das grandes escalas.
- De fato L varia com a distância relativa a parede e está relacionado diretamente com o comprimento de mistura para escoamentos em equilíbrio.

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## RELAÇÃO ENTRE L E O COMP. MISTURA



A condição de equilíbrio local em escoamentos turbulentos ocorre quando os termos de produção e dissipação se equivalem. Escoamentos em camadas limite e próximo das paredes (região log) frequentemente esta condição ocorre:

$$P_k = \varepsilon,$$

$$v_T \left( \frac{dU}{dy} \right)^2 = \varepsilon \equiv C_D \frac{k^{3/2}}{L}$$

Substituindo-se a definição de k da relação de Prandtl-Kolmogorov:  $k = (n_T / LC'_m)^2$  na taxa de dissipação encontra-se a viscosidade turbulenta que por comparação com a definição do comprimento de mistura resulta na relação entre as escalas  $l_m$  e L:

$$v_T = \left( \frac{C'_\mu}{C_D} \right)^{1/2} L^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \equiv l_m^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \rightarrow l_m = \left( \frac{C'_\mu}{C_D} \right)^{1/4} L$$

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## RAZÃO TENSÃO E ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA



Em equilíbrio local  $P_k = \epsilon$ , para região suficientemente longe da parede onde os efeitos viscosos são desprezíveis:

Da definição de comprimento de mistura e da equação constitutiva para taxa de dissipação:

Substituindo as relações na condição de equilíbrio local:

Introduzindo a relação entre os comprimentos chega-se que a razão tensão/ energia cinética é constante:

Ela também é conhecida por const. de Bradshaw ou const. Townsend

$$\overline{u'v'} \left( \frac{dU}{dy} \right) = \epsilon$$

$$\left( \frac{dU}{dy} \right) = \frac{\sqrt{u'v'}}{\ell_{mix}}$$

$$\epsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{L}$$

$$\frac{\overline{u'v'}}{k} = C_D^{2/3} \left( \frac{\ell_{mix}}{L} \right)^{2/3}$$

$$\frac{\overline{u'v'}}{k} = \frac{C'_\mu}{C_D^{1/4}} \cong 0.3$$



## SUMÁRIO MODELO 1 EQUAÇÃO



$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \underbrace{v_T \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2}_{P_k} - \underbrace{C_D \frac{k^{3/2}}{L}}_{\epsilon} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( v + \frac{v_T}{\sigma_K} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right]}_{D_k}$$

$$v_T = C'_\mu \sqrt{k} \cdot L$$

- A distribuição do comprimento  $L$  é similar àquela do comprimento de mistura.

$$C'_m @ 1.0; \quad s_k = 1.0; \quad e \quad 0.07 < C_D < 0.09$$

- O modelo não pode ser aplicado na sub-camada Laminar próxima das paredes. É necessário a aplicação de fatores de amortecimento no modelo de dissipação e em  $v_T$ , similar ao modelo de Van Driest para  $l_{mix}$ .



## COMENTÁRIOS SOBRE MODELO 1 EQUAÇÃO



- A modelagem termo a termo na equação da energia cinética foi iniciada por Prandtl em (1945). Ela constituiu em uma nova metodologia para se abordar fenômenos turbulentos.
- Ela realiza uma 'drástica cirurgia' na equação exata substituindo correlações desconhecidas por equações constitutivas que permitem o fechamento do modelo.
- O procedimento é fortemente baseado em análise dimensional e muitas vezes passa a se modelar a equação e não a física da turbulência.
- As relações de fechamento não são melhores que os dados experimentais nas quais elas foram obtidas.

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## Modelo de Duas Equações:

**k - e Padrão**

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP





## INTRODUÇÃO



No modelo k-ε padrão, provavelmente o mais popular, as escalas de comprimento e tempo são constituídas a partir da energia cinética e dissipação dos turbilhões:

$$L \propto \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad \tau_0 \propto \left( \frac{k}{\varepsilon} \right)$$

e a viscosidade turbulenta, em termos das escalas de comprimento e tempo é:

$$v_T \propto \frac{L^2}{\tau_0} \quad \rightarrow \quad v_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

onde  $C_\mu$  é uma constante para elevados Reynolds (isto é, não se aplica para a sub camada viscosa!). O modelo, por utilizar a hipótese de Boussinesq, é isotrópico:

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = 2/3\rho k$$



## MODELO COMPLETO!



- Resolvendo-se os campos para k e ε pode-se formar a partir destas variáveis:
  - escalas de comprimentos ( $L \sim k^{3/2}/\varepsilon$ );
  - escalas de tempo ( $t \sim k/\varepsilon$ )
  - escalas de viscosidade turbulenta ( $\nu_T \sim k^2/\varepsilon$ )
- Como consequência, o modelo k-ε é dito completo porque não necessita de especificações que são dependentes do campo do escoamento tais como comprimento de mistura .



## DESENVOLVIMENTO



- É creditado o desenvolvimento do modelo a Jones & Launder (1972) e Launder & Sharma (1974) por aperfeiçoar suas constantes.
- Desenvolvimentos anteriores se devem a: Davidov (1961); Harlow & Nakayama (1968); Hanjalic (1970); Launder & Spalding (1972).



## MODELO 1 EQ x MODELO 2 EQS



No modelo de uma equação a função dissipação é determinada a partir de hipótese de equilíbrio local :

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{L}$$

Isto se deve a obtenção L que baseia-se na hipótese de comprimento de mistura. A inserção de uma equação de transporte extra, e por exemplo, permite que L seja determinado a partir desta equação e da equação de k. Este caminho dispensa a hipótese de equilíbrio local e confere um grau maior de generalização aos modelos de duas equações:

$$L = C_D \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$$

Isto entretanto requer a solução simultânea de duas equações de transporte, k e  $\varepsilon$ , além da modelagem da equação da taxa de dissipação,  $\varepsilon$ .



## EQUAÇÃO ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA, k



$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = P_k - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right]$$

Ela é a mesma do modelo de uma equação. A principal diferença é que a função dissipação não será modelada a partir da escala de comprimento L, mas determinada da solução da equação de transporte de e!



## EQUAÇÃO DA DISSIPACÃO TURBULENTA, e



- A equação da dissipação turbulenta é, talvez, menos familiar que a equação da energia turbulenta.
- Ela é constituída pelos mesmos mecanismos de transporte da equação da energia cinética turbulenta: Convecção, Difusão, Produção de Dissipação e Destruição de Dissipação.
- As correlações turbulentas na equação de e são aproximadas por modelos constitutivos que contêm variáveis conhecidas ou passíveis de serem calculadas.
- O maior grau de incerteza na modelagem reside na equação de e.



## EQUAÇÃO DA DISSIPAÇÃO TURBULENTE, $\epsilon$



(I) variação temporal; (II) convecção; (III) difusão da dissipação por efeitos molecular, pelas flutuações de pressão e pelas flutuações de velocidade; (IV) geração devido a deformação do campo médio; (V) geração de flutuação de vorticidade devido a ação de auto-alongamento da turbulência; (VI) decaimento (destruição) da taxa de dissipação devido a ação viscosa.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} - \overline{u'_j \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \right)} + \frac{2\tau}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_m} \frac{\partial u'_j}{\partial x_m} + \right. \\ & - 2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right) - 2\nu \left( u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k} \\ & \left. - 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_k}{\partial x_m} - 2\nu^2 \left( \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m} \cdot \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m} \right) \right] \end{aligned}$$

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## MODELO DIFUSÃO DE $\epsilon$ , $D_\epsilon$



$$D_\epsilon = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{u_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} + \frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right)$$

- $D_\epsilon$  denota transporte de  $\epsilon$  por difusão. Ele é aproximado, por hipótese, utilizando-se o produto da viscosidade turbulenta e do gradiente de  $\epsilon$ .
- Acoplamentos flutuação de vorticidade e campo médio velocidades:

$$-2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) - 2\nu \frac{u_j \partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k} \equiv 0; \quad \text{Re elevados}$$

são usualmente desprezados desde que Re seja elevado (Tennekes e Lumley 1972)

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## MODELO PRODUÇÃO DE DISSIPÇÃO, $P_\epsilon$



• A produção nas grandes escalas,  $P_K$  deve ser balanceada pela produção de  $\epsilon$  nas pequenas escalas,  $P_\epsilon$ , para evitar um crescimento ilimitado.

• Por hipótese é proposto que a medida que  $k$  é produzido, sua dissipação também deve ser. Isto é, a produção de  $\epsilon$  é proporcional a razão: produção de energia cinética pelo tempo das grandes escalas. Note que a razão  $(\epsilon/k)$  é o inverso da escala de tempo

$$P_\epsilon = 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \cong C_{\epsilon 1} \left( \frac{\epsilon}{K} \right) P_K$$

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## MODELO DE DESTRUIÇÃO DE $\epsilon$



O termo de destruição tem uma estrutura similar ao termo de geração:  $\epsilon$  é proporcional a razão entre a dissipação  $\epsilon$  e a escala de tempo das grandes escalas,  $(\epsilon/k)$ .

$$d_\epsilon = 2 \left( \nu \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_j} \right)^2 \cong C_{\epsilon 2} \left( \frac{\epsilon}{K} \right) \cdot \epsilon$$

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## MODELO EQUAÇÃO TRANSPORTE DA DISSIPAÇÃO



$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( v + \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K}$$

- Esta é a forma que a equação da dissipação é encontrada em diversos modelos de turbulência.
- Ela é altamente empírica, ou melhor dizendo, fortemente baseada em argumentos de análise dimensional e não propriamente na física que representam as correlações de flutuações modeladas. Em parte se deve ao alto grau de incerteza e desconhecimento que se tem destes termos.
- Atribui-se, com frequência, à equação da dissipação as inconcistências que o modelo k-ε apresenta.

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## QUADRO SUMÁRIO DO MODELO k-ε PADRÃO



$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = P_k - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( v + \frac{v_T}{\sigma_K} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right]$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( v + \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K}$$

$$P_k = \overline{u_i' u_j'} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = v_T \underbrace{\left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{Hipótese Bousinesq}} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

**Hipótese  
Bousinesq**

$$v_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

### • Constantes do Modelo

- $C_m = 0.09$
- $C_{\varepsilon 1} = 1.44$
- $C_{\varepsilon 2} = 1.92$
- $S_k = 1.0$
- $S_\varepsilon = 1.3$

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



# Determinação das Constantes do Modelo k-e

IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DO MODELO



- As cinco constantes do modelo são obtidas por meio de comparações com dados experimentais de casos testes específicos:

Coef.	Valor	Caso Exp. Utilizado para Ajustar Coef
$C_m$	0.09	Equilibrium Shear Layer
$C_{e1}$	1.44	Equilibrium Shear Layer
$C_{e2}$	1.92	Homogeneous Flow
$S_k$	1.0	Shear Flow
$S_e$	1.3	Shear Flow

- Estudos de sensibilidade revelaram que as constantes que mais influenciam são  $C_{e1}$  e  $C_{e2}$ ; 5% de variação em uma delas produz 20% de variação na taxa de abertura de um jato; 10% de alteração causa uma variação de 40% na taxa crescimento da camada limite

IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## CONSTANTE $C_m$



Escoamentos cisalhantes 2D, 'shear layers', apresentam equilíbrio local: produção e dissipação de  $k$  são essencialmente iguais e a tensão turbulenta é praticamente constante! Próximo a parede podemos utilizar a lei log para o perfil de velocidades:

$$\frac{U}{y} = u^*/(ky); \quad k = 0.41 \text{ (Von Kármán)}$$

Substituindo na eq. de  $k$

$$P_K = \frac{\tau_w}{\rho} \frac{e}{k} \frac{\sqrt{\tau_w/\rho}}{ky} \frac{u}{u} = \frac{(u^*)^3}{ky} = e$$

A tensão turbulenta,  $u'v'$ , expressa em termos da viscosidade turbulenta:

$$-u'v' = C_m \frac{k^2}{e} \frac{U}{y}$$

Substituindo-se as expressões para  $dU/dy$  e evidências experimentais na região log de camadas limites revelarem que:

$$-u'v'/k = 0.3 \quad \text{®} \quad C_m @ 0.09 \quad -u'v'/k = \sqrt{C_m}$$



## DETERMINAÇÃO CONSTANTE $C_{e1}$



Com auxílio do perfil log e da condição equilíbrio local a eq. de  $e$  é modelada retendo difusão, produção e destruição:

$$0 = \frac{\rho}{\rho} \frac{\alpha (u^*)^4}{y} - 1 \frac{\rho}{\rho} + \frac{(C_{e2} - C_{e1}) C_m^{1/2} (u^*)^4}{(ky)^2} \quad \text{®} \quad C_{e1} = C_{e2} - \frac{k^2}{S_e C_m^{1/2}}$$

Esta relação fixa  $C_{e1}$  quando os valores das outras constantes estiverem determinados.





## DETERMINAÇÃO CONSTANTE $C_{e2}$



Em estudos experimentais do decaimento da turbulência homogênea introduzida por uma grade, temos que os termos de difusão e produção são nulos. Neste caso as equações de  $k$  e  $\epsilon$  reduzem para:

$$U \frac{dk}{dx} = -\epsilon \quad \& \quad U \frac{d\epsilon}{dx} = -C_{e2} \frac{\epsilon^2}{k}$$

combinando as duas equações e integrando:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{k}{k_0} \frac{C_{e2}}{\theta} \quad \& \quad \frac{k}{k_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \mathbf{1} + (C_{e2} - 1) \frac{\epsilon_0}{k_0} \frac{x}{U} \frac{1}{\theta}^{1/(1-C_{e2})}$$

onde  $k_0$  e  $\epsilon_0$  referem-se às condições iniciais.



## DETERMINAÇÃO CONSTANTE $C_{e2}$



Para uma posição suficientemente afastada da tela, 1000 o poro da grade, pode-se obter um escoamento isotrópico ( $u^2=v^2=w^2$ ) e portanto  $k=3/2u^2$ . O decaimento de  $k$  determinado experimentalmente revela que  $C_{e2}$  está na faixa de 1.8 a 2. Observa-se também que o valor recomendado,  $C_{e2} = 1.92$  é próximo de 2; então a eq. decaimento  $k$  pode ser simplificada ainda mais:

$$\frac{k}{k_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \mathbf{1} + \frac{\epsilon_0}{k_0} \frac{x}{U} \frac{1}{\theta}^{-1} \exp(-t/(k_0/\epsilon_0)); \quad t = \frac{x}{U} \frac{1}{\theta}$$

nota-se que a turbulência decai com uma constante de tempo  $t = k_0 / \epsilon_0$ .



## DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES $s_k$ e $s_\epsilon$



As constantes de difusão,  $s_k$  e  $s_\epsilon$ , possuem valores próximos da unidade. Elas, assim como  $C_{e1}$ , são ajustadas por a fim de otimizarem os resultados do modelo quando confrontados com diversos casos experimentais.

Devido sua associação ao gradiente da propriedade:

$$D_k = \left( \nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \quad D_\epsilon = \left( \nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}$$

a eles também pode-se associar o significado de número de Prandtl turbulento relativo à energia cinética turbulenta e à dissipação.



## REFERÊNCIAS



- Rodi, W., "Turbulence Models and Their Application in Hydraulics", IAHR Monograph Series, 3rd ed., 1993
- Warsi, Z.U.A., "Fluid Dynamics", CRC Press, 1993
- Deschamps, C.J., "I Escola de Primavera - Transição e Turbulência - Modelos Algébricos e Diferenciais", ABCM, 1998
- Speziale, C.G., "Analytical Methods for the Development of Reynolds-Stress Closures in Turbulence", Ann. Rev. Fluid Mechanics, 23, pp107-157, 1991.
- Lauder, B.E. and Spalding, D.B., "The Numerical Computation of Turbulent Flows", Comp. Meth. In Applied Mech and Engng, 3, pp269-289, 1974.
- Jones, W.P. and Lauder, B.E., (1972). The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. Int. J. Heat Mass Transfer 15, 301-314
- Lauder, B.E. and Sharma, B.I. (1974). Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. Lett. Heat Mass Transf. 1, 131-138.
- Harlow, F.H. and Nakayama, P.I. (1968). Transport of turbulence energy decay rate. University of California Report LA-3854, Los Alamos Science Laboratory.



$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = P_k - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_T}{\sigma_K} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right]$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K}$$

$$P_k = \overline{u_i u_j} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \nu_T \underbrace{\left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{Hipótese Bousinesq}} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

Hipótese  
Bousinesq

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

• Constantes do Modelo

- $C_\mu = 0.09$
- $C_{\varepsilon 1} = 1.44$
- $C_{\varepsilon 2} = 1.92$
- $\sigma_K = 1.0$
- $\sigma_\varepsilon = 1.3$



## ANÁLISE MODELO k-e NAS CAMADAS INTERNAS E LOG

### Objetivo:

**Desenvolver equações do k-e para as camadas internas e log e verificar os limites assintóticos das soluções contra as leis de parede estabelecidas**



## RECORDAÇÃO DAS CAMADAS INTERNA & LOG



- De fato existem somente duas camadas em regimes turbulentos: uma denominada Interna (muito próxima de paredes) e outra Externa (no núcleo do escoamento)
- Elas existem porque os processos físicos que ocorrem nestas regiões são descritos por diferentes escalas
- A camada Log é um limite assintótico entre estas duas camadas

$$\frac{U-U_e}{u_\tau} = g\left(\frac{y}{\delta}, \frac{\delta}{\tau_w} \frac{dP}{dx}\right)$$

EXTERNA

LOG

INTERNA

$u^+ = y^+$

$\frac{y}{\delta} \rightarrow 0$

$y^+ \rightarrow \infty$

- A camada Log realiza o 'casamento entre as camadas Interna e Externa, isto é, ela representa o limite assintótico superior da camada Interna e o limite assintótico inferior da camada Externa.

IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## EQUAÇÕES MODELO k-ε NA CAMADA LOG



- A Camada Log é a região suficientemente próxima da parede para que os efeitos inerciais sejam desprezados mas ainda suficiente distante da parede de tal modo que a viscosidade molecular seja muito menor que a turbulenta.
- Nesta região os termos convectivos e de gradiente de pressão são uma ordem de magnitude menor que os demais termos. Neste cenário as equações de transporte quando  $y^+ \gg 1$  se reduzem para:

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left[ v_T \frac{\partial U}{\partial y} \right] \rightarrow v_T \frac{\partial U}{\partial y} = \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)$$

$$0 = v_T \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{v_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right]$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K}$$

$$v_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## SOLUÇÃO MODELO k-ε NA CAMADA LOG



Na camada Log o gradiente de velocidades é:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\kappa y}$$

a viscosidade turbulenta é:

$$v_T = \frac{(u_\tau)^2}{(\partial U / \partial y)} \rightarrow v_T = u_\tau \kappa y$$

a dissipação em função de K:

$$\varepsilon = C_\mu \frac{k^2}{v_T} \rightarrow \varepsilon = \frac{C_\mu k^2}{u_\tau \kappa y}$$

substituindo estas definições na eq. k:

$$0 = A - Bk^2 + y \frac{\partial}{\partial y} \left[ y \frac{\partial k}{\partial y} \right] \quad \text{onde } A = \frac{(u_\tau)^2 \sigma_k}{\kappa^2} \text{ e } B = \frac{C_\mu \sigma_k}{(u_\tau \kappa)^2}$$

cuj solução não trivial no limite  $y^+ \gg 1$  é:

$$k = \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{(u_\tau)^2}{\sqrt{C_\mu}}$$

Na camada Log k é constante caso contrário, o 3º termo crescerá indefinidamente.

e consequentemente:

$$\varepsilon = \frac{(u_\tau)^3}{\kappa y}$$



## SOLUÇÃO MODELO k-ε NA CAMADA LOG



$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B$$

$$k = \frac{(u_\tau)^2}{\sqrt{C_\mu}}$$

$$\varepsilon = \frac{(u_\tau)^3}{\kappa y}$$

Substituindo-se as soluções do modelo k-ε na camada log na equação da dissipação encontra-se que:

$$\kappa^2 = \sqrt{C_\mu} (C_{\varepsilon 1} - C_{\varepsilon 2}) \sigma_\varepsilon$$

Substituindo-se os valores das constantes do modelo encontra-se que o valor da constante de Von Kàrmàn é:  $k = 0.433$ . O valor encontrado é ligeiramente superior ao experimental,  $k = 0.41$ .

Os modelos k-ω e k-ε RNG resultam nos valores 0.41 e 0.399, respectivamente. Do ponto de vista de satisfazer o valor mais correto da constante de Von Kàrmàn estes modelos são superiores.



## EQUAÇÕES MODELO k-ε NA CAMADA INTERNA



- Nesta região os termos convectivos e de gradiente de pressão são uma ordem de magnitude menor que os demais termos. Além disto, nesta região a viscosidade laminar e turbulenta são de mesma ordem de magnitude. Neste cenário as equações de transporte se reduzem para:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ (v + v_T) \frac{\partial U}{\partial y} \right] \rightarrow (v + v_T) \frac{\partial U}{\partial y} = \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right) \\ 0 &= (v + v_T) \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{(v + v_T) \partial k}{\sigma_K} \right] \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{(v + v_T) \partial \varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \end{aligned} \right\} v_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## EQUAÇÕES MODELO k-ε NA CAMADA INTERNA



O sistema de equações é de quinta ordem e requer cinco condições de contorno: uma para velocidade, duas para energia cinética e duas para dissipação.

Para casar com a lei log, as soluções devem apresentar o limite assintótico:

$$y^+ \rightarrow \infty \quad k = \frac{(u_\tau)^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \varepsilon = \frac{(u_\tau)^3}{\kappa y}$$

Na superfície sólida ocorre o não-deslizamento, isto implica em dizer que:

$$y^+ = 0 \quad k = U = 0$$

IM - 450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## EQUAÇÕES MODELO k-ε NA CAMADA INTERNA



Resta ainda determinar o valor da dissipação na parede. Enquanto que o fluido é impedido de ter velocidade na parede ele apresenta gradiente de velocidade não-nulo!

A partir da equação de k, para  $y = 0$  tem que:

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} \Big|_{y^+ = 0}$$

ou da definição da função de dissipação isotrópica também tem:

$$\varepsilon = \nu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y^+ = 0} \right)^2 \cong 2\nu \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \Big|_{y^+ = 0} \right)^2$$

ou mesmo a condição de grad nulo

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \Big|_{y^+ = 0} = 0$$

IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## EQUAÇÕES MODELO k-ε NA CAMADA INTERNA



O sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares pode ser integrado utilizando-se de técnicas numéricas como Runge-Kutta.

É esperado que o perfil de velocidades reproduza o perfil 'universal' da parede  $y^+ = 1$  até  $y^+ \sim 500$

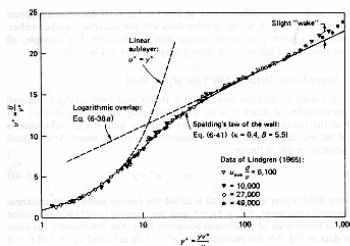


FIGURE 6-11 Comparison of Spalding's inner-law expression with the pipe-flow data of Lindgren (1965).

O modelo k-ε não consegue reproduzir satisfatoriamente os dados experimentais relativos a camada Interna e Log. A constante 'B', determinada pela lei de parede:

$$B = \lim_{y^+ \rightarrow \infty} [U^+ - \frac{1}{\kappa} \ln y^+] = -2.2$$

IM -450 'Modelagem em Turbulência' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DEUNICAMP



## EQUAÇÕES MODELO k-ε NA CAMADA INTERNA



• De fato o valor esperado de B seria  $5 < B < 5.5$ . Isto mostra que o modelo não reproduz os dados experimentais na camada Interna. Isto é, o modelo k-ε pode ser integrado a partir da camada Log pois o perfil de velocidades da lei log satisfaz as equações nesta região.

Integração a partir da camada Interna só é possível por meio da introdução de funções de amortecimento nos coeficientes do modelo (também conhecido como modelo k-ε de baixo Reynolds).