Escalas Características
&
Dinâmica da Turbulência

Escalas Características

A utilização de escalas características para os movimentos dos turbilhões é fundamental para constituição dos modelos de turbulência.

São apresentadas as escalas características para:

- **velocidades dos turbilhões, u,**
- **comprimento dos turbilhões, L,**
- **tempo dos turbilhões,** τ_0,
- **taxa de dissipação dos turbilhões,** ε ,
- **viscosidade turbulenta,** ν_T

MULTLAB UNICAMP

Escalas Características - Velocidade

- **A velocidade característica dos turbilhões nas grandes escalas pode ser representada pela energia cinética dos turbilhões:**

$$\tilde{u} \propto \sqrt{(2/3)k}$$

- **Uma outra forma alternativa, pode ser obtida a partir da própria definição de tensão turbulenta:**

$$t_{\mathbf{ij}} = r\,\overline{\mathbf{u}_{\mathbf{i}}\mathbf{u}_{\mathbf{j}}} \ ® \ \tilde{\mathbf{u}} \ \mu \ \sqrt{t/r}$$

- **quando o escoamento possui apenas uma direção ou mesmo tensão $u_i u_j$ significativa, pode-se obter a definição de velocidade de atrito se** t **for a tensão na parede:** $\mathbf{u^*} = \sqrt{t_{\mathbf{w}}/r}$

MULTLAB UNICAMP

Escalas Características - Dimensão Turbilhão

O comprimento característico do turbilhão é dado em função da razão entre velocidade e tempo característicos:

$$\ell \propto \tilde{u} \cdot \tau_0$$

Reconhecendo que $t_{\mathbf{0}}$ **e u podem ser expressos em função da energia cinética e da dissipação, k e** e**, então, o comprimento característico das grandes escalas pode ser posto na forma:**

$$\ell \ \mu \ \frac{\mathbf{k}^{\mathbf{3/2}}}{e}$$

MULTLAB

Escalas características - Dissipação e

UNICAMP

– **A taxa pela qual o escoamento médio produz energia turbulenta, k, é determinada pelo escoamento das grandes escalas; somente esta quantidade de energia pode ser transferida às menores escalas e finalmente ser dissipadas em calor.**

– **Pode-se esperar que a taxa de dissipação** e **é governada pelo movimento das grandes escalas apesar da dissipação ocorrer somente nas menores escalas.**

$$P_k = \overline{u_i u_j} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \varepsilon$$

MULTLAB

Escalas Características - Dissipação e

UNICAMP

– **Para um escoamento em equilíbrio, isto é com ausência de transporte convectivo e difusivo, a eq. k reduz aos termos: produção e dissipação**

$$P_k = \overline{u_i u_j} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \varepsilon$$

Utilizando-se o conceito de comprimento de mistura, l, e a escala para velocidade:

$$\overline{u_i u_j} \propto (u^*)^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \propto \frac{u^*}{\ell} \quad \rightarrow \quad \varepsilon \propto \frac{(u^*)^3}{\ell} = \frac{k^{3/2}}{\ell}$$

MULTLAB

Escalas Características - Tempo dos Turbilhões

UNICAMP

- **O tempo característico dos turbilhões pode ser estimado a partir do comprimento de mistura e da velocidade característica:**

$$\tau_0 \propto \frac{\ell}{\tilde{u}} = \frac{\ell}{\sqrt{k}}$$

- **Reconhecendo que:** $\varepsilon \propto k^{3/2}/l$, **pode-se expressar** τ_0 **em função de k e** ε**:**

$$\tau_0 \propto \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)$$

MULTLAB

Escalas Características - Viscosidade Turbulenta ν_T

UNICAMP

As tensões de Reynolds estão relacionadas com o campo médio de velocidades por meio da hipótese de Bousinesq:

$$\overline{u_i u_j} = \nu_T \frac{dU_i}{dx_j}, \qquad i \neq j$$

Introduzindo o conceito de comprimento de mistura de Prandtl e a escala de tempo dos turbilhões tem-se que:

$$\overline{u_i u_j} \propto (\ell/\tau_0)^2 \; ; \quad \frac{dU_i}{dx_j} \propto \frac{u^*}{\ell} = \frac{1}{\tau_0} \quad \rightarrow \quad \nu_T \propto \left(\frac{\ell^2}{\tau_0}\right)$$

Evidentemente que a hipótese de caracterizar o tensor $\overline{u_i u_j}$ **por um único** ℓ **e** τ_0 **é uma idealização, turbulência apresenta um amplo espectro de** ℓ **e** τ_0**.**

MULTLAB

Escalas Características - Viscosidade Turbulenta n_T

UNICAMP

A forma de Kolmogorov-Prandtl (1945) é obtida expressando a escala de tempo em termos da energia cinética k

$$n_T \;\mu\; \ell \times \sqrt{\mathbf{k}}$$

A expressão de Kolmogorov-Prandtl pode ser também expressa em termos da função dissipação ao invés do comprimento de mistura:

$$n_{\mathbf{T}} \;\mu\; \frac{\mathbf{k}^2}{e}$$

MULTLAB

RESUMO

UNICAMP

Escala Velocidade (m/s) : $\tilde{\mathbf{u}} \;\mu\; \sqrt{\mathbf{k}}$ $\quad \mathbf{u^*} = \sqrt{t_{\mathbf{w}}/r}$

Escala Comprimento (m): $\ell \;\mu\; \dfrac{\tilde{\mathbf{u}}}{t_{\mathbf{0}}}$ $\quad \ell \;\mu\; \dfrac{\mathbf{k}^{3/2}}{e}$

Escala Tempo (s): $t_{\mathbf{0}} \;\mu\; \dfrac{\ell}{\tilde{\mathbf{u}}} = \dfrac{\ell}{\sqrt{\mathbf{k}}}$ $\quad t_{\mathbf{0}} \;\mu\; \left(\dfrac{\mathbf{k}}{e}\right)$

Escala Taxa Dissipação (J/s): $\varepsilon \propto \dfrac{(u^*)^3}{\ell} = \dfrac{k^{3/2}}{\ell}$

Escala Viscosidade (m²/s); $n_{\mathbf{T}} \;\mu\; \ell \times \sqrt{\mathbf{k}}$ $\quad n_{\mathbf{T}} \;\mu\; \dfrac{\mathbf{k}^2}{e}$

MULTLAB

APLICAÇÃO

UNICAMP

• O transporte de sólidos pelas flutuações dos turbilhões requer o emprego de modelos estocásticos de turbulência. Nestas aplicações é necessário conhecer a f.d.p., f(U), das velocidades.

• Uma aproximação é considerar que a velocidade está distribuída segundo uma Normal com média U e desvio padrão s.

•A variância de U é então:

$$\overline{u^2} = \int (U - u')^2 f(U)\,dU$$

•O desvio padrão passa a ser:

$$\sigma = \sqrt{\overline{u^2}} \propto \sqrt{(2/3)k}$$

•Próximo de paredes sólidas

•(lei log) uv/k ~ 0.3 e portanto

$$\sigma \propto \sqrt{(2/3)k} \cong 1.5\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

MULTLAB

UNICAMP

- Dinâmica da Turbulência -

(Tennekes & Lumley)

MULTLAB UNICAMP

Objetivo do Estudo da Dinâmica da Turbulência

Como a energia cinética turbulenta do escoamento é mantida?

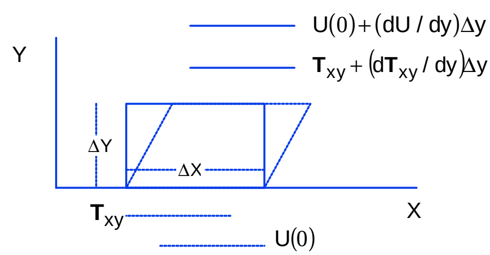
Equação da Energia Cinética do campo médio e das flutuações (turbulência)

Será mostrado que a turbulência extrai energia do campo médio (grandes escalas).

O ganho é aproximadamente balanceado pela dissipação viscosa nas pequenas escalas

MULTLAB UNICAMP

Cisalhamento Simples (Escoamento Couette)



Todas as demais componentes médias de velocidade são nulas, assim como suas derivadas.

A equação de conservação do momento é reduzida a um único termo e implica que a <u>tensão é constante</u>

$$\underbrace{\rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{=0} = -\underbrace{\frac{\partial P}{\partial x_j}}_{=0} + \frac{\partial T'_{ji}}{\partial x_j} + \underbrace{\rho g_i}_{=0} \Rightarrow \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = 0$$

IM – 450 '*Modelagem em Turbulência*' - Prof. Eugênio Spanó Rosa FEM/DE UNICAMP

Cisalhamento Simples (I)

A equação geral da Energia Cinética do <u>campo médio</u> do escoamento é:

$$U_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tfrac{1}{2}U_iU_i\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\frac{P}{\rho}U_j + 2\nu U_i S_{ij} - \overline{u_i' u_j'}U_i\right) - 2\nu S_{ij}S_{ij} + \overline{u_i' u_j'}S_{ij}$$

Aplicada ao escoamento de Couette desenvolvido ela se reduz a apenas dois termos não nulos:

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\nu\frac{\partial U}{\partial y} - \overline{u'v'}\right)U\right]}_{\substack{\text{Taxa trabalho recebido.}\\ \text{Tensões viscosas e turbulentas}\\ \text{no campo médio escoamento}}} - \underbrace{\left(\nu\frac{\partial U}{\partial y} - \overline{u'v'}\right)\frac{\partial U}{\partial y}}_{\substack{\text{Dissipação viscosa}\\ \text{devido as tensões}\\ \text{campo médio e flutuações}}}$$

$$W = -\mathbf{T}'_{\mathbf{xy}} U_j < 0$$

Cisalhamento Simples (II)

Para o escoamento de Couette turbulento a equação da energia cinética apresenta somente dois termos:

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\nu\frac{\partial U}{\partial y} - \overline{u'v'}\right)U\right]}_{\substack{\text{Taxa trabalho recebido.}\\ \text{Tensões viscosas e turbulentas}\\ \text{no campo médio escoamento}}} - \underbrace{\left(\nu\frac{\partial U}{\partial y} - \overline{u'v'}\right)\frac{\partial U}{\partial y}}_{\substack{\text{Dissipação viscosa}\\ \text{devido as tensões}\\ \text{campo médio e flutuações}}}$$

$$W = -\mathbf{T}'_{\mathbf{xy}} U_j < 0$$

- O sistema recebe trabalho espera-se que a energia cinética aumente;
- Isto não ocorre porque o trabalho recebido balança exatamente o termo de dissipação! Como consequência energia cinética média não se altera;
- Um campo de tensão constante não acelera o escoamento, a tendência de variar a K é compensada pela dissipação.

Cisalhamento Simples (III)

MULTLAB UNICAMP

• O termo de dissipação é sempre positivo. O sinal negativo a sua frente implica em dizer que ele sempre degrada a energia cinética em energia térmica de modo irreversível.

• No escoamento de couette K é constante mas todo o trabalho exercido pelas tensões é consumido na dissipação.

Cisalhamento Simples (IV)

MULTLAB UNICAMP

A dissipação é devido as parcelas da tensão molecular e turbulenta.

$$\left(\nu\frac{\partial U}{\partial y} - \overline{u'v'}\right)\frac{\partial U}{\partial y}$$

A parcela molecular é sempre positiva pois resulta do quadrado do tensor deformação do fluido.

$$2\nu S_{ij}\cdot S_{ij} > 0$$

A parcela turbulenta também apresenta a tendência de ser sempre positiva pois valores negativos $\overline{u'v'}$ de tendem a ocorrer para S >0. O contrário pode acontecer em situações não usuais.

$$-\overline{u_i'u_j'}\cdot S_{ij} > 0$$

MULTLAB

Energia Cinética do Campo Médio

UNICAMP

Na maioria dos escoamentos com alto Reynolds e suficientemente afastados das paredes, os termos viscosos são muito menores que os turbulentos e podem ser desprezados.

Vamos investigar qual é a condição suficiente para que isto ocorra a partir de escalas que ocorrem na Equação da Energia Cinética do Campo médio:

$$U_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tfrac{1}{2}U_i U_i\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\frac{P}{\rho}U_j + 2\nu U_i S_{ij} - \overline{u_i' u_j'}\, U_i\right) - 2\nu S_{ij}S_{ij} + \overline{u_i' u_j'}\, S_{ij}$$

MULTLAB

Energia Cinética do Campo Médio

UNICAMP

Trabalho das tensões turbulentas x moleculares

$$\frac{\overline{u_i' u_j'}\, U_i}{2\nu U_i S_{ij}} \approx \frac{\left(u^*\right)^2 \cdot U}{\nu U \left(u^*/\ell\right)} = \frac{u^* \ell}{\nu} >> 1$$

Taxa dissipação turbulenta x molecular

$$\frac{\overline{u_i' u_j'}\, S_{ij}}{2\nu S_{ij} S_{ij}} \approx \frac{\left(u^*\right)^2 \cdot \left(u^*/\ell\right)}{\nu \left(u^*/\ell\right)^2} = \frac{u^* \ell}{\nu} >> 1$$

- **Estas relações são válidas se a turbulência puder ser caracterizada somente pela velocidade e comprimento, u* e l, isto é, o escoamento não apresenta nenhuma outra escala relevante.**
- **Esta situação ilustra que a estrutura geral dos escoamentos turbulentos é independente da viscosidade!**
- **A viscosidade do fluido se faz presente na turbulência de forma indireta.**

Dissipação Campo Médio x Produção Turbulência

Como o campo turbulento recebe energia para manter as flutuações de velocidade?

Isto pode ser analisado comparando-se as equações da energia cinética para o campo médio e das flutuações (escoamentos Re >> 1):

Campo Médio

$$U_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tfrac{1}{2}U_iU_i\right) = +\overline{u'_i u'_j}\, S_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\frac{P}{\rho}U_j - \overline{u'_i u'_j}\, U_i\right)$$

Turbulência

$$U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = -\overline{u'_j u'_j}\, S_{ij} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i u'_j} - \frac{1}{\rho}\overline{u'_i p'}\right)$$

Dissipação Campo Médio x Produção Turbulência

A direta comparação entre equações mostra que:

- **O termo de dissipação do campo médio aparece com o sinal invertido na equação da turbulência**
- **Ele é responsável pela transferência da energia do campo médio para o turbulento.**
- **Por esta razão ele é denominado por produção de turbulência, Pk.**
- **A energia cinética turbulenta extrai energia do campo médio por meio de Pk.**

MULTLAB

Produção Turbulência = Dissipação (I)

UNICAMP

- Na maioria dos escoamentos produção e dissipação não se balanceiam completamente, mas são de mesma ordem de magnitude (ou mesmo muito próximas entre si).

No escoamento de Couette (homogêneo com todas variáveis médias independentes de y, a exceção de U, e com tensão e deformação constante) a equação da energia cinética turbulenta se reduz para um balanço entre a produção e energia cinética turbulenta e dissipação de k:

$$\underbrace{-\overline{u'_j u'_j}\, S_{ij}}_{P_k} = \underbrace{2\nu \overline{s_{ij} s_{ij}}}_{\varepsilon} \quad \text{onde} \quad S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \quad \text{e} \quad s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)$$

- onde S_{ij} e s_{ij} representam o tensor deformação do campo médio e das flutuações, respectivamente.

MULTLAB

Produção Turbulência = Dissipação (I)

UNICAMP

- Para o escoamento de Couette, a taxa de produção de k pelas tensões turbulentas é igual a taxa de dissipação viscosa.
- Isto significa que a escala da produção e da dissipação são de mesma grandeza!

$$P_k = -\overline{u'_j u'_j}\, S_{ij} \approx \left(u^*\right)^2 \cdot \left(\frac{u^*}{\ell}\right) \quad \rightarrow \quad \varepsilon \approx \frac{\left(u^*\right)^3}{\ell}$$

- Da igualdade acima pode-se obter uma escala para a taxa de deformação do campo flutuante:

$$\overline{s_{ij} s_{ij}} \approx \frac{\left(\mathbf{u}^*\right)^2}{\nu}\left(\frac{\mathbf{u}^*}{\ell}\right)$$

MULTLAB

Produção Turbulência = Dissipação (II)

UNICAMP

• Uma comparação direta entre as escalas da taxa de deformação do campo médio e das flutuações mostra que:

$$\frac{\overline{s_{ij}\,s_{ij}}}{S_{ij}\,S_{ij}} \approx \frac{u^{*}\ell}{?} \equiv \mathrm{Re}$$

• A taxa de deformação da flutuação é muito maior que a do campo médio para Re >> 1.

• A S_{ij} e s_{ij} são inversamente proporcionais a escala do tempo convectivo, S ~ $(\text{seg})^{-1}$;

• Os turbilhões que contribuem à dissipação tem um tempo característico muito menor do que a escala do escoamento médio;

MULTLAB

Produção Turbulência = Dissipação (II)

UNICAMP

•Como a escala de tempo entre as deformações é muito distinta, ela também sugere que é pequena a interação direta entre as deformações das flutuações com aquelas do campo médio, desde que Re>>1;

• S_{ij} e s_{ij} não interagem fortemente pois não tem a mesma faixa de frequência;

• As pequenas escalas da turbulência tendem a ser independentes que qualquer efeito de orientação dado pelo campo médio;

• Isto faz com que qualquer processo de média aplicado às pequenas escalas não se altera mesmo se houver uma rotação ou reflexão do sistema de coordenadas;

• As estruturas das pequenas escalas são isotrópicas;

MULTLAB

Tensores de Reynolds e Re-Distribuição Energia (I)

UNICAMP

Balanço de energia para cisalhamento puro a partir das três componentes da tensão normal de Reynolds. Os termos viscosos desprezados, e para Re >> 1 a estrutura dissipativa será considerada isotrópica.

$$\frac{1}{2}\overline{u'^2} \rightarrow 0 = \overline{u'v'}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\overline{p'\frac{\partial u'}{\partial x}} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\overline{u'^2 v'}\right) - \frac{1}{3}\varepsilon$$

$$\frac{1}{2}\overline{v'^2} \rightarrow 0 = 0 + \frac{1}{\rho}\overline{p'\frac{\partial v'}{\partial y}} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\overline{p'v'}}{\rho} + \frac{1}{2}\overline{v'^2 v'}\right) - \frac{1}{3}\varepsilon$$

$$\frac{1}{2}\overline{w'^2} \rightarrow 0 = 0 + \frac{1}{\rho}\overline{p'\frac{\partial w'}{\partial z}} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\overline{w'^2 v'}\right) - \frac{1}{3}\varepsilon$$

Somando-se as três componentes chega-se na equação de k:

$$0 = \overline{u'v'}\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\overline{p v'}}{\rho} + \frac{1}{2}\overline{\left(u'^2 + v'^2 + w'^2\right)v'}\right) - \varepsilon$$

Note que devido a incompressibilidade:

$$\frac{1}{\rho}\overline{p'\frac{\partial u'}{\partial x}} + \frac{1}{\rho}\overline{p'\frac{\partial v'}{\partial y}} + \frac{1}{\rho}\overline{p'\frac{\partial w'}{\partial z}} = + \frac{1}{\rho}\overline{p'\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}} = 0$$

MULTLAB

Tensores de Reynolds e Re-Distribuição Energia (II)

UNICAMP

Comparando-se as equações contata-se que toda produção ocorre na eq. de (1/2)u'²;

As equações de (1/2)v'² e (1/2)w'² não tem termos de produção;

Foi visto o mecanismo de transferência de energia do campo médio para as flutuações, mas isto não explica como v' e w' podem ter energia: (1/2)v'² e (1/2)w'² devem ser produzidos por algum mecanismo!

Como a soma das flutuações de pressão é nula, os termos de pressão são os agentes que permutam energia entre as componentes de velocidade sem no entanto alterar a energia total.

Tensores de Reynolds e Re-Distribuição Energia (III)

- Para no escoamento de Couette as energias: $(1/2)v'^2$ e $(1/2)w'^2$ balancearem as perdas por dissipação, é necessário que

- Isto ocorre somente se a turbulência for não isotrópica. Na realiadade na maioria dos escoamentos com cisalhamento, é aproximadamente o dobro de $(1/2)v'^2$ e $(1/2)w'^2$;

- Resumindo: a componente u' tem mais energia do que as outras componentes porque ela recebe toda a produção de energia cinética; a transferência de energia para as outras componentes é realizado pelas iterações não-lineares da pressão-velocidade.