

Capítulo 5

Introdução à Análise Diferencial do Movimento do Fluido

Tópicos desta aula:

Equação da conservação da massa
Definição de função corrente

Conservação da Massa

- ✓ Equação de conservação da massa para um sistema escrita em função das propriedades de um V.C.

$$\frac{d}{dt} \int_{\text{V.C.}} \rho d\forall + \int_{\text{S.C.}} \rho (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA = 0$$

Taxa variação
massa dentro V.C.

+

Vazão mássica
que cruza a S.C.

= 0

Sistemas de Coordenadas

- ✓ A eq. da conservação da massa será escrita para um sistema de coordenadas Cartesiano e Cilindrico Polar .

$$\frac{d}{dt} \int_{\text{V.C.}} \rho d\forall + \int_{\text{S.C.}} \rho (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA = 0$$

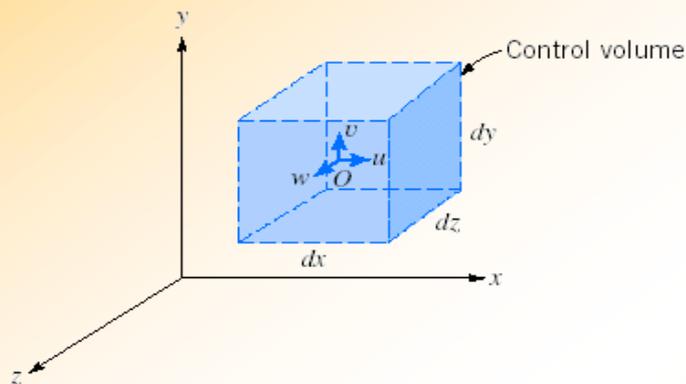


Fig. 5.1 Differential control volume in rectangular coordinates.

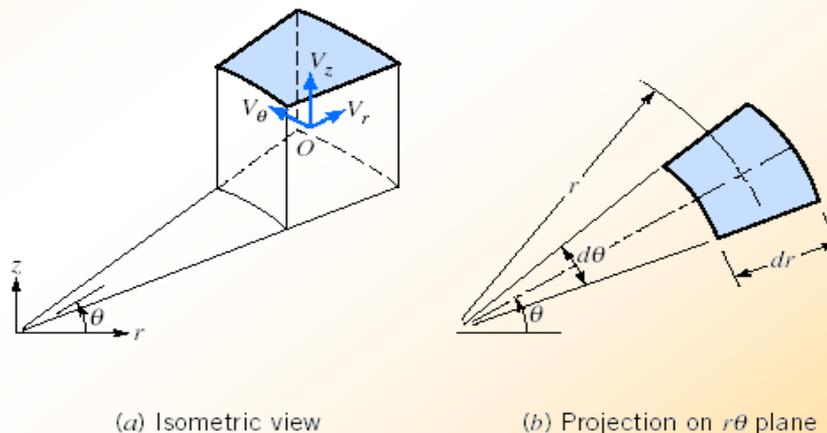
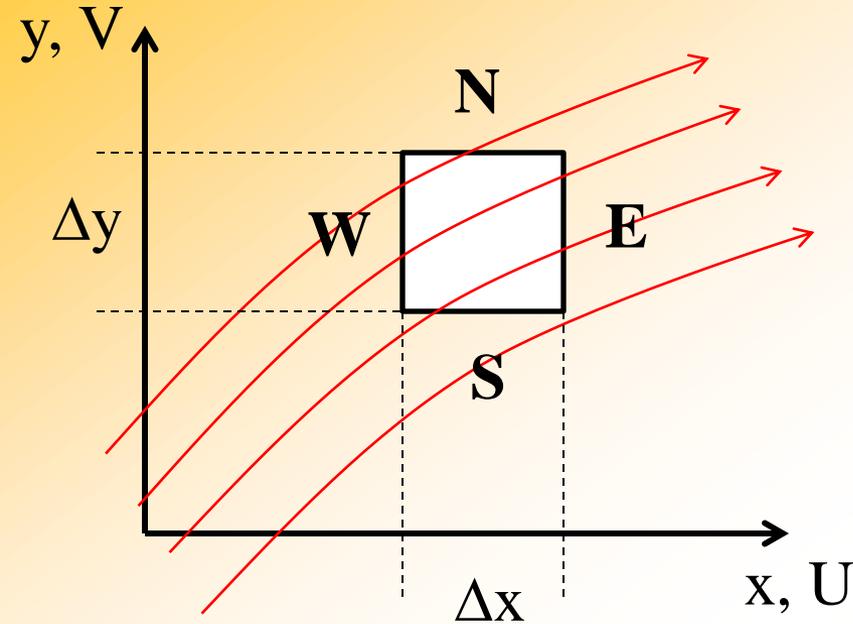


Fig. 5.2 Differential control volume in cylindrical coordinates.

- ✓ Para se chegar à forma diferencial da eq. da massa para coordenadas Cartesianas e Cilíndrico Polar o Volume de Controle, o volume finito de tamanho arbitrário, será reduzido para um volume infinitesimal .

Aplicação em um V.C. infinitesimal



$$\frac{d}{dt} \int_{\text{vol}} \rho dV + \int_{\text{s.c.}} \rho (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA = 0$$

Propriedades Geométricas:

$$\Delta z = 1$$

$$A_E = A_W = \Delta y \cdot 1$$

$$A_S = A_N = \Delta x \cdot 1$$

$$\text{Vol} = \Delta x \cdot \Delta y \cdot 1$$

Conceitos matemáticos para se chegar na Eq. da Massa:

Regra de Leibniz:
$$\frac{d}{dt} \int_{\text{vol}} \rho dV = \int_{\text{vol}} \frac{d\rho}{dt} dV + \int_{\text{s.c.}} \rho (V_b \cdot \vec{n}) dA = 0$$

Teorema de Gauss:
$$\int_{\text{vol}} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) dV \equiv \int_{\text{s.c.}} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

Conservação da Massa

Sistema Coord. Cartesianas

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Operador 'Del':

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Notação Vetorial:

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Sistema Cilindrico Polar

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Operador 'Del':

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Notação Vetorial:

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Veja dedução Eq. Massa em coordenadas cilíndrico polar no Apêndice I

Conservação Massa **Incompressível** (permanente ou transiente)

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \text{ou} \quad \text{div} \vec{V} = 0$$

✓ Cartesiano

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

✓ Polar

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

5.1 Quais dos seguintes conjuntos de equações representam possíveis casos de escoamento bidimensional incompressível?

(a) $u = x + y; v = x - y$

(b) $u = x + 2y; v = x^2 - y^2$

(c) $u = 4x + y; v = x - y^2$

(d) $u = xt + 2y; v = x^2 - yt^2$

(e) $u = xt^2; v = xyt + y^2$

Antes resolver a questão, qual versão da equação $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$ devo usar para resolver este exercício?

(i)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

(ii)

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

(iii)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Respostas – use eq. (iii); (a) conserva massa, (b, c, d, e) não conservam massa!

5.5 (8^a ed) - As três componentes da velocidade em um campo de velocidade são dadas por $u = Ax + By + Cz$, $v = Dx + Ey + Fz$ e $w = Gx + Hy + Jz$.

- i. Determine a relação entre os coeficientes de A a J que é necessária para que este seja um possível campo de escoamento incompressível.

Resposta: $A + E + J = 0$

5.6 (8ª ed) - A componente x da velocidade em um campo de escoamento em regime permanente e incompressível, no plano xy , é $u = A/x$, em que $A = 2 \text{ m}^2/\text{s}$ e x é medido em metros.

- i. Determine a mais simples componente y da velocidade para este campo de escoamento.

Resposta: $v = Ay/x^2$

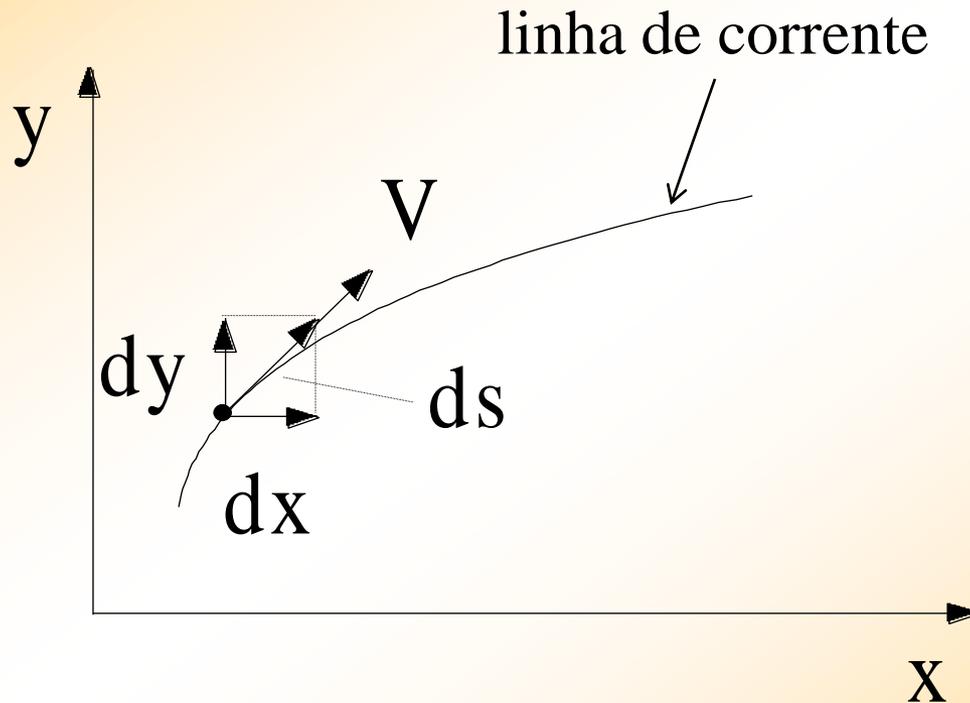
5.21 (8^a ed.) - Para um escoamento incompressível no plano $r\theta$, a componente r da velocidade é dada por $V_r = -\Lambda \cos \theta / r^2$.

- i. Determine uma possível componente θ da velocidade.
- ii. Quantas possíveis componentes θ existem?

Resposta: $v(\theta, r) = -\Lambda [\text{Sen}(\theta + 2\pi n)] / r^2 + f(r)$

Linha de Corrente: Conceito Cinemático

- ✓ Recapitulação EM461: as linhas de corrente são, por definição, tangentes ao vetor velocidade a todo instante, e são expressas por:



$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

Função Corrente para Escoamento Incompressível e Bi-Dimensional

✓ A função corrente, ψ , é um **conceito matemático** introduzido por Lagrange (1731).

✓ A hipótese de escoamento bi-dimensional reduz eq. massa para:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0$$

✓ Definição de função corrente:

Cartesiano		Polar		
$u \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y}$	and	$V_r \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$	and	$V_\theta \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial r}$

✓ Mostre que a função corrente **SEMPRE** satisfaz a Eq. da Massa!

✓ *Como se chega as definições de função corrente estão fora do escopo do curso. No apêndice traz um breve demonstração.*

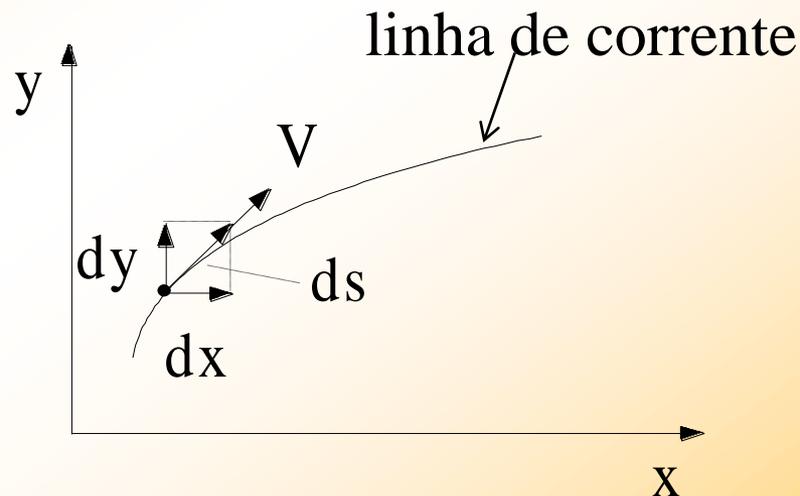
Função Corrente: Propriedades

✓ **PROPRIEDADE 1** - Em regime permanente, a curva definida por ψ constante coincide c/ linha corrente que passa pelos mesmos pontos.

✓ A função ψ depende de (x,y) ou (r,θ) . A variação de ψ é dada por:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy$$

✓ Para ψ constante, então $d\psi = 0$ e $dy/dx = v/u$, isto é, as linhas com ψ constante coincidem com a definição de linha de corrente.

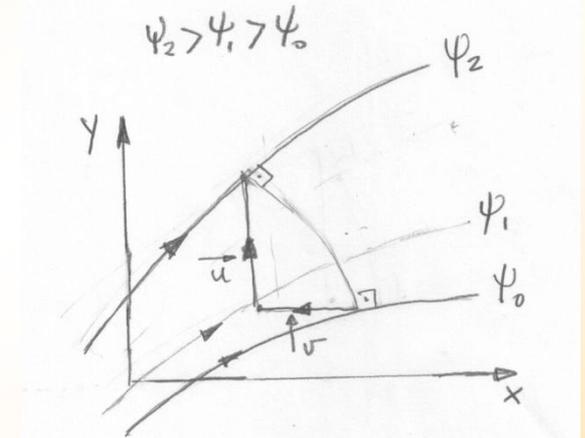


$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

Função Corrente: Propriedades

- ✓ **PROPRIEDADE 2** – A diferença $\psi_2 - \psi_0$ resulta na vazão Q entre as linhas de corrente.

- ✓ Duas linhas de corrente, ψ_2 e ψ_0 , definem **um tubo de corrente**, pois não há velocidade normal para linhas com ψ constante!



- ✓ A vazão Q entre ψ_2 e ψ_0 é calculada fazendo um caminho e $\psi_0 \rightarrow \psi_1 \rightarrow \psi_2$ de forma que criam superfícies ortogonais a x e y , assim:

$$Q_1 = \int v \cdot dA_y = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cdot (-dx) = \psi_1 - \psi_0$$

$$Q_2 = \int u \cdot dA_x = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left(+\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \cdot (+dy) = \psi_2 - \psi_1$$

- ✓ A vazão Q através de ψ_2 e ψ_0 : $Q = Q_1 + Q_2 = \psi_2 - \psi_0$

Por que Função Corrente?

- ✓ A função corrente sempre satisfaz a equação da massa.
- ✓ Se eu tiver um campo de velocidades expresso por uma função corrente eu não preciso resolver a equação da conservação da massa!
- ✓ Ela é útil em cálculos analíticos e numéricos aplicados em escoamentos por reduzir o número de variáveis independentes do escoamento.

Exemplo 5.7 (8ª ed.) - O campo de velocidade para o escoamento viscoso do Problema-Exemplo 5.7 (8ª ed) é $\vec{v} = U\left(\frac{y}{H}\right)\hat{i} + 0\hat{j}$.

- i. Determine a função de corrente para este escoamento.
- ii. Localize a linha de corrente que divide a vazão volumétrica total em duas partes iguais.

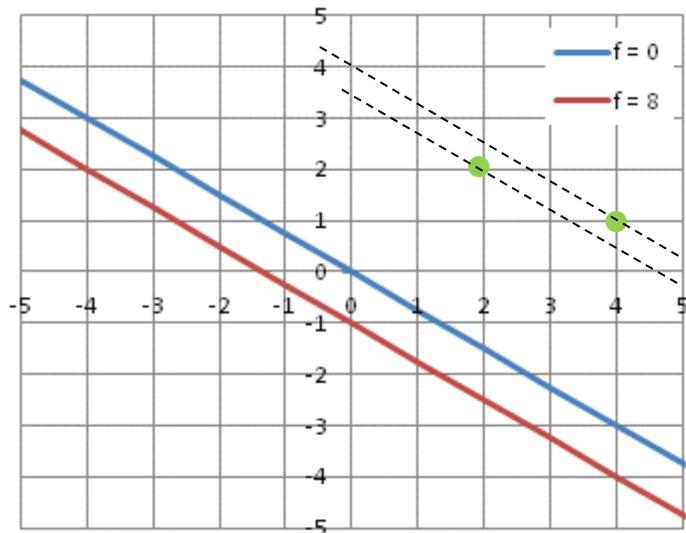
Resposta:

Função corrente: $\psi(y) = (U/2) (y^2/H)$

Vazão volumétrica: $Q = \psi(H) - \psi(0) = UH/2$

Coordenada y: $(U/2) (y^2/H) = UH/2 \rightarrow y = H \cdot (2)^{-1/2}$

***5.27** Um campo de escoamento incompressível sem atrito é especificado pela função de corrente $\psi = -6Ax - 8Ay$, onde $A = 1$ m/s, e x e y são coordenadas em metros. Esboce as linhas de corrente $\psi = 0$ e $\psi = 8$. Indique no esboço o sentido do vetor velocidade no ponto $(0, 0)$. Determine a magnitude da vazão em volume entre as linhas de corrente que passam pelos pontos $(2, 2)$ e $(4, 1)$.



Respostas:

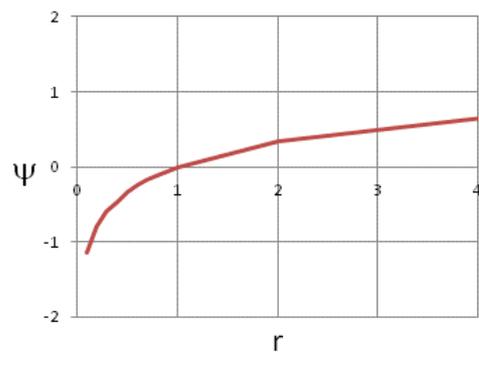
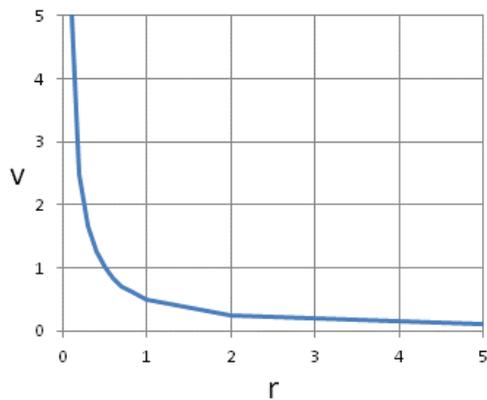
$$Q = \psi(2,2) - \psi(4,1) = 4 \text{ m}^3/\text{s}$$

Linhas de corrente:

$$y = (3/4).x \quad \text{para } \psi = 0$$

$$y = (3/4).x - 1 \quad \text{para } \psi = 8$$

Exemplo 5.6 (8ª ed.) - O Exemplo 5.6 mostrou que o campo de velocidade para um vórtice livre no plano $r\theta$ é $v_\theta = C/r$ e $v_r = 0$. Determine a função de corrente para este escoamento. Avalie a vazão em volume por unidade de profundidade entre $r_1 = 0,05$ m e $r_2 = 0,07$ m, se $C = 0,5$ m²/s. Esboce o perfil de velocidade ao longo de uma linha de θ constante. Confira a vazão calculada a partir da função de corrente, integrando o perfil de velocidade ao longo dessa linha.



Respostas:

$$v_\theta = -d\psi/dr = C/r \rightarrow \psi(r) = -C \cdot \ln(r)$$

Observe que para :

$$r = 1 \rightarrow \psi = 0$$

$$r < 1 \rightarrow \psi < 0 \text{ e}$$

$$r > 1 \rightarrow \psi > 0$$

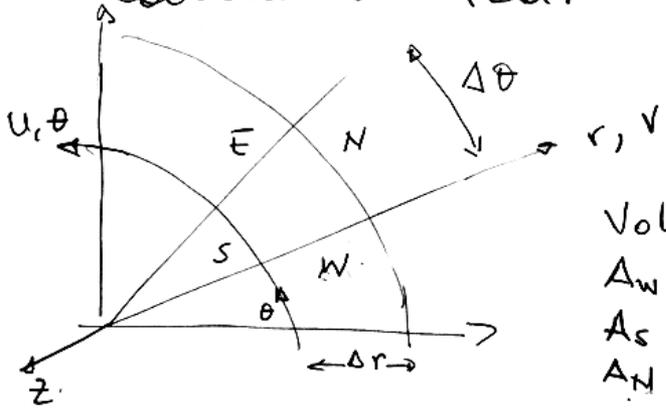
$$Q = \psi(r_1) - \psi(r_2) = +C \cdot \ln(r_2/r_1)$$

FIM

Apêndice I

- ✓ **Dedução da Eq. Massa em coordenadas cilíndrico-polar**

Coordena da Polar



$$\begin{aligned} \text{Volume} &= (r \Delta \theta \Delta r) \Delta z \\ A_w &= A_e = \Delta r \cdot 1 \\ A_s &= r \Delta \theta \cdot \Delta z \\ A_N &= (r + \Delta r) \Delta \theta \cdot \Delta z \end{aligned}$$

Mesmas $\bar{E}_z(1)$ e m/seg balanço de fluxos $\bar{E}_z(3)$

$$-(\rho u)_w A_w + (\rho u)_e A_e - (\rho v)_s A_s + (\rho v)_N A_N \quad (8)$$

Expandindo S Taylor:

$$(\rho u)_e = (\rho u)_w + \frac{d}{dr} (\rho u) (r \Delta \theta) \quad (9)$$

$$(\rho v)_N = (\rho v)_s + \frac{d}{dr} (\rho v) \Delta r \quad (10)$$

Fluxo na direção θ $w \rightarrow E$

$$+(\rho u)_w A_w + \left[(\rho u)_w + \frac{d}{dr} (\rho u) (r \Delta \theta) \right] A_e; \text{ mas } A_e = A_w = \Delta r \Delta z$$

$$= \frac{d(\rho u)}{dr} \underbrace{(r \Delta \theta)}_{d\theta} \Delta r \Delta z$$

4 Fluxo na direção \odot $\boxed{S \rightarrow N}$ há divergência de ar

$$-(\rho v)_s A_s + \left[(\rho v)_s + \frac{d(\rho v)}{dr} \Delta r \right] A_N =$$

$$-(\rho v)_s r \Delta \theta \Delta z$$

$$+ \left[(\rho v)_s + \frac{d(\rho v)}{dr} \Delta r \right] (r + \Delta r) \Delta \theta \Delta z =$$

$$- (\rho v)_s r \Delta \theta \Delta z$$

$$+ (\rho v)_s r \Delta \theta \Delta z + \frac{d(\rho v)}{dr} \Delta r r \Delta \theta \Delta z$$

$$+ \frac{(\rho v)_s \Delta r r \Delta \theta \Delta z}{r} + \frac{d(\rho v)}{dr} \Delta r^2 r \Delta \theta \Delta z =$$

$$\left[\frac{(\rho v)_s}{r} + \frac{d(\rho v)}{dr} \right] \Delta r r \Delta \theta \Delta z$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(r \rho v)}{dr} d\psi$$

junstando W-E e S-N

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{d(r \rho v)}{dr} + \frac{d(\rho u)}{r d\theta} \right) d\psi = 0$$

$\equiv 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

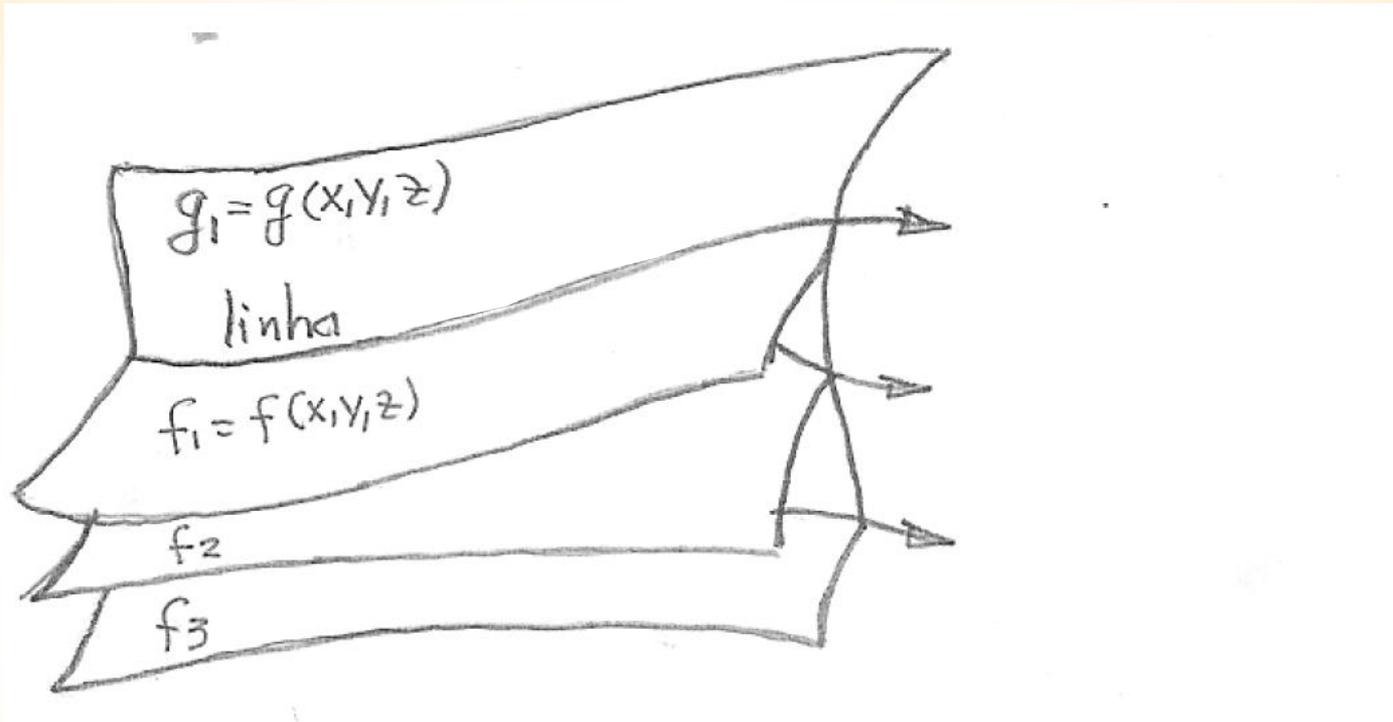
Apêndice II

Definição de Função Corrente

Função corrente: conceito matemático

a) uma linha no espaço

- ✓ Existem várias maneiras de se descrever uma curva no espaço.
- ✓ Para nossos propósitos, é conveniente definir uma curva através da intersecção de duas superfícies independentes, **f** e **g**:



Função corrente: conceito matemático

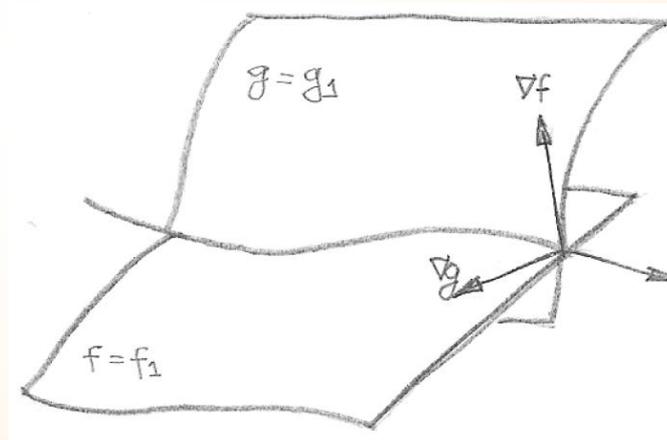
b) vetor H tangente à intersecção

✓ O vetor tangente a linha formada pela intersecção dos planos é:

✓ Associação:
$$\vec{H} = \lambda(x, y, z) \nabla f \times \nabla g$$

✓ **linha da intersecção** : vetor tangente $\nabla f \times \nabla g = \vec{V} \leftrightarrow$ linha de corrente: \vec{V} é um vetor tangente à linha de corrente

✓ Função λ é um fator de proporcionalidade e corresponde à densidade ρ .



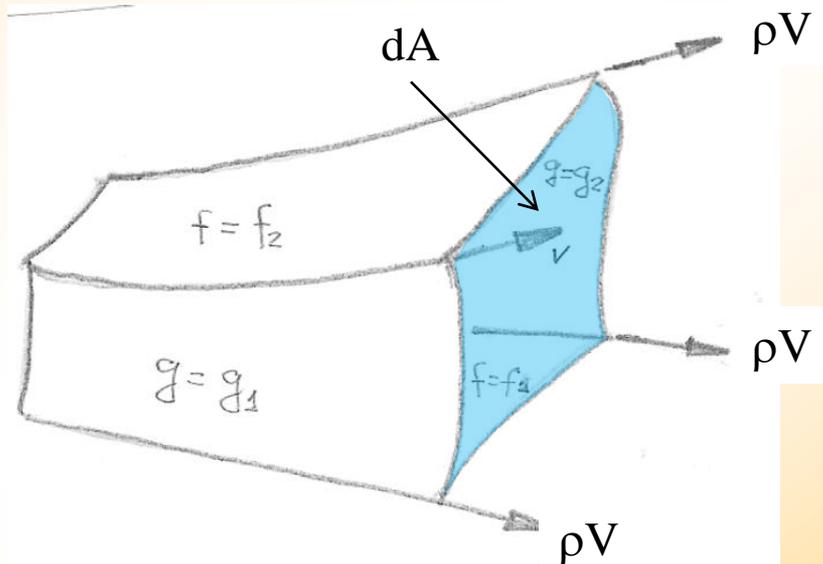
Função corrente: conceito matemático

c) vazão e tubo de corrente

- ✓ A vazão mássica através de um tubo de corrente constituído por duas superfícies f e g é expressa por:

$$\dot{m} = \int \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

- ✓ ou através da simples relação aos valores das funções f e g nestas superfícies.



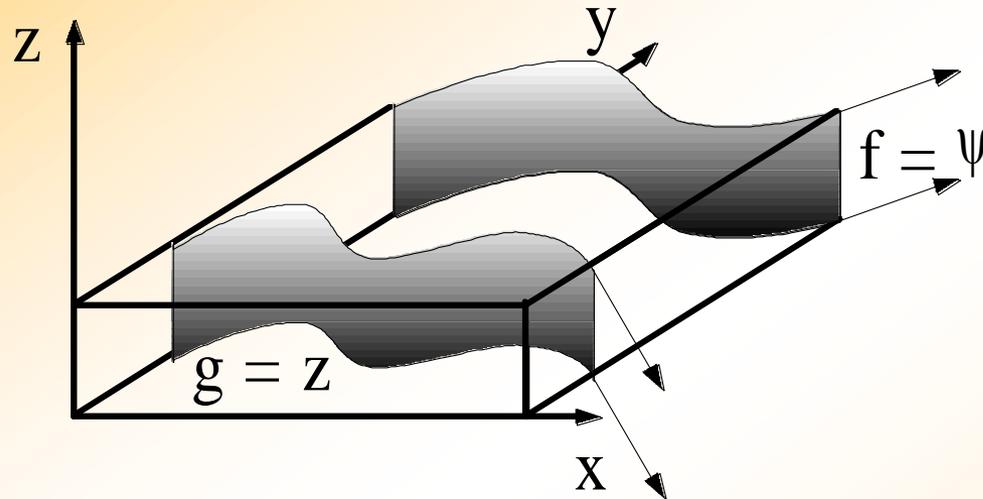
$$\dot{m} = \rho (f_1 - f_2) (g_1 - g_2)$$

Veja demonstração desta propriedade na pg 20 do doc no link assim como referências sobre o assunto

Função corrente ψ : conceito matemático

- ✓ Para escoamentos com simetria, é possível escolher a **função g** como um conjunto de planos definidos pela variável de simetria. Isto reduz o problema à determinação da superfície **f** denominada por função corrente, **$f = \psi$** .
- ✓ Escoamentos com aplicação direta são:
 - Escoamentos planos em coordenadas cartesianas ou polares e
 - Escoamentos axi-simétricos em coordenadas cilíndricas ou esféricas.
 - Há outros sistemas também mas não serão tratados aqui!

Função Corrente para Escoamento 2-D Incompressível: Coordenadas Cartesianas

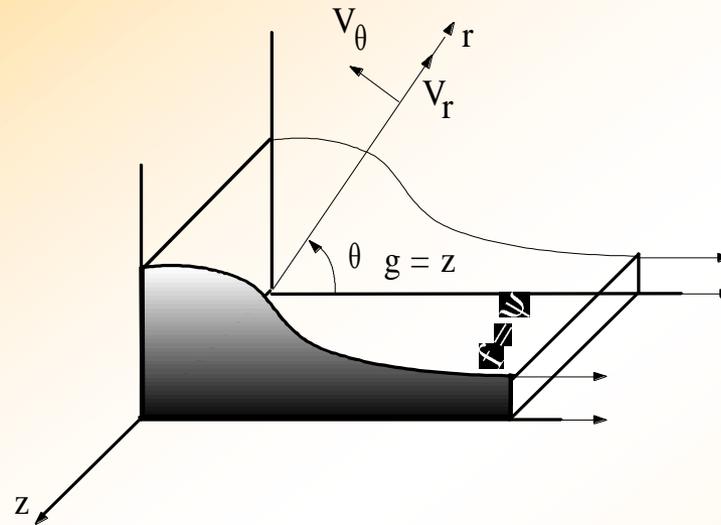


Superfícies: $f = \psi(x, y)$ $g = z$ $\nabla\psi = (\psi_x, \psi_y, 0)$ $\nabla g = (0, 0, 1)$

Velocidade:
$$\begin{cases} \vec{V} = \nabla f \times \nabla g; & u = u(x, y); & v = v(x, y); & w = 0 \\ u = \frac{\partial\psi}{\partial y}; & v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}; & w = 0 \end{cases}$$

Vazão: $g_1 = z_1 = 0$; $g_2 = z_2 = 1$; $Q = \psi_2 - \psi_1$

Função Corrente para Escoamento 2-D Incompressível: Coordenadas Polares

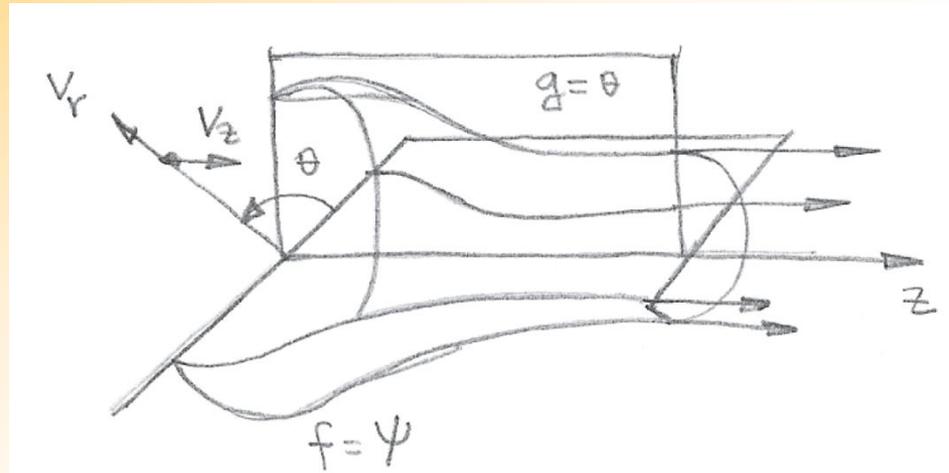


Superfícies: $f = \psi(r, \theta)$ $g = z$ $\nabla\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, 0 \right)$ $\nabla g = (0, 0, 1)$

Velocidade: $\left\{ \begin{array}{l} \vec{V} = \nabla f \times \nabla g ; v_r = v_r(r, \theta) ; v_\theta = v_\theta(r, \theta) ; v_z = 0 \\ u = \frac{\partial\psi}{r\partial\theta} ; v = -\frac{\partial\psi}{\partial r} ; w = 0 \end{array} \right.$

Vazão: $g_1 = z_1 = 0 ; g_2 = z_2 = 1 ; Q = \psi_2 - \psi_1$

Função Corrente para Escoamento Axi-simétrico Incompressível: Coordenadas Esféricas



Superfícies: $f = \psi(r, z)$ $g = \theta$ $\nabla\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial \theta}, \frac{\partial\psi}{\partial z} \right)$ $\nabla g = \left(0, \frac{1}{r}, 0 \right)$

Velocidade:
$$\begin{cases} \vec{V} = \nabla f \times \nabla g ; v_r = v_r(r, z) ; \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 ; v_z = v_z(r, z) \\ v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial z} ; \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 ; v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \end{cases}$$

Vazão: $g_1 = \varphi_1 = 0 ; g_2 = \varphi_2 = 2\pi ; Q = 2\pi(\psi_2 - \psi_1)$ ou

$Q = 2\pi\psi_2$ se $\psi_1 = 0$ é o eixo $\theta = 0$

5.10 Uma aproximação útil para a componente x da velocidade num escoamento laminar incompressível de camada limite é uma variação parabólica de $u = 0$ na superfície ($y = 0$) até a velocidade de corrente livre, U , na borda da camada limite ($y = \delta$). A equação do perfil é $u/U = 2(y/\delta) - (y/\delta)^2$, onde $\delta = cx^{1/2}$ e c é uma constante. Mostre que a expressão mais simples para a componente y da velocidade é

$$\frac{v}{U} = \frac{\delta}{x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right]$$

Trace um gráfico v/U em função de y/δ para determinar o local de maior valor de v/U . Avalie a razão onde $\delta = 5 \text{ mm}$ e $x = 0,5 \text{ m}$.

Capítulo 5

Introdução à Análise Diferencial do Movimento do Fluido

Tópicos desta aula:

$D\phi/Dt$ → Derivada Material ou,
Derivada Substantiva ou,
Derivada Total

Métodos de Descrição

Referencial Lagrangeano:

- ✓ Acompanha elementos de massa identificáveis;
- ✓ Em mecânica dos fluidos, acompanhar o movimento de cada partícula, muitas vezes, torna-se impraticável.

Referencial Euleriano:

- ✓ Focaliza a atenção sobre as propriedades do escoamento num determinado ponto do espaço como função do tempo;
- ✓ As propriedades do campo do escoamento são descritas como funções das coordenadas espaciais e do tempo;

As leis físicas (massa, 2ª lei Newton, Energia) aplicam-se para **referencial Lagrangeano com elementos de massa identificáveis** (todo curso de dinâmica baseia-se neste princípio!).

No entanto, fluidos se deformam continuamente. Não é possível seguir cada partícula individualmente mas é possível determinar a aceleração seguindo uma partícula. Este é o tema desta aula!

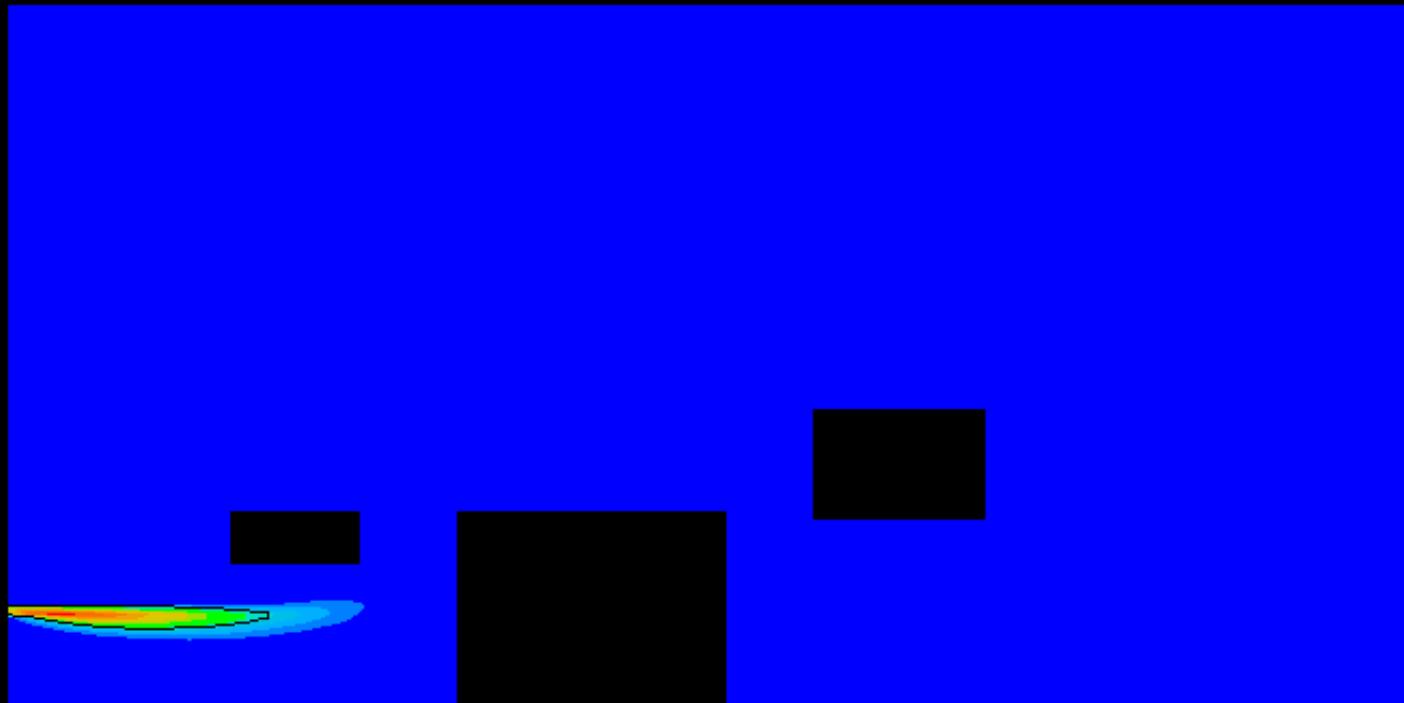
Lagrangeano x Euleriano

- ✓ A sequência mostra a concentração de CO_2 em ar com 1 segundo de injeção.
- ✓ Os resultados foram obtidos com o PHOENICS cfd.
- ✓ Tente acompanhar como o CO_2 se dispersa (Lagrangeano)
- ✓ Observe num ponto fixo no espaço como o CO_2 varia (Euleriano)

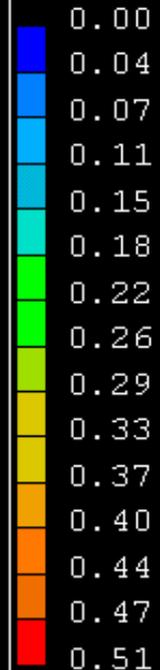
2 seg após injeção



PHOTON



FCO2



□□□□□□□□□□□□

Y



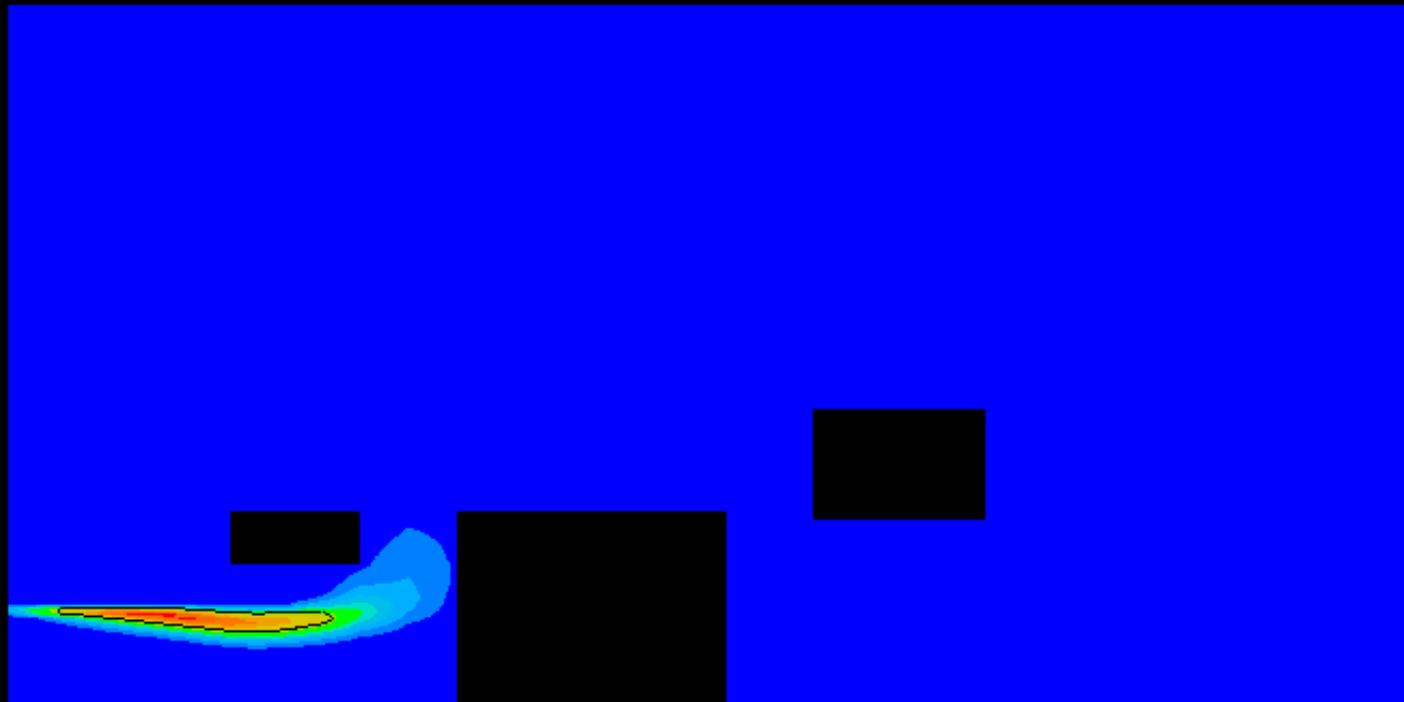
CO2 DISPERSION - dispersion 3

Fração de CO2 na mistura - intervalo de injeção: 1 segundo. Perfil de fração mássica de CO2 após 2 seg, indicando superfície com 15 % .

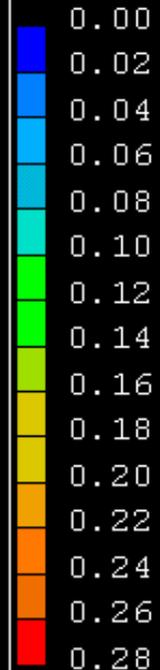
4 seg após injeção



PHOTON



FCO2



□□□□□□□□□□□□

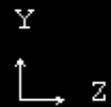
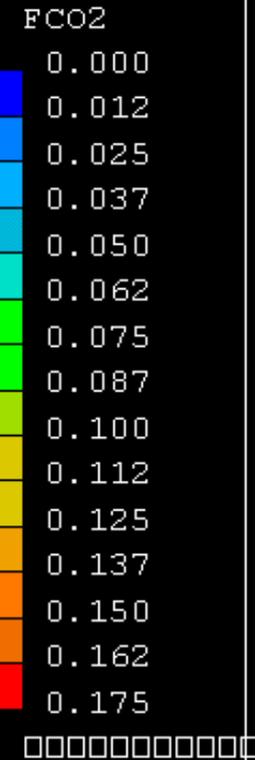
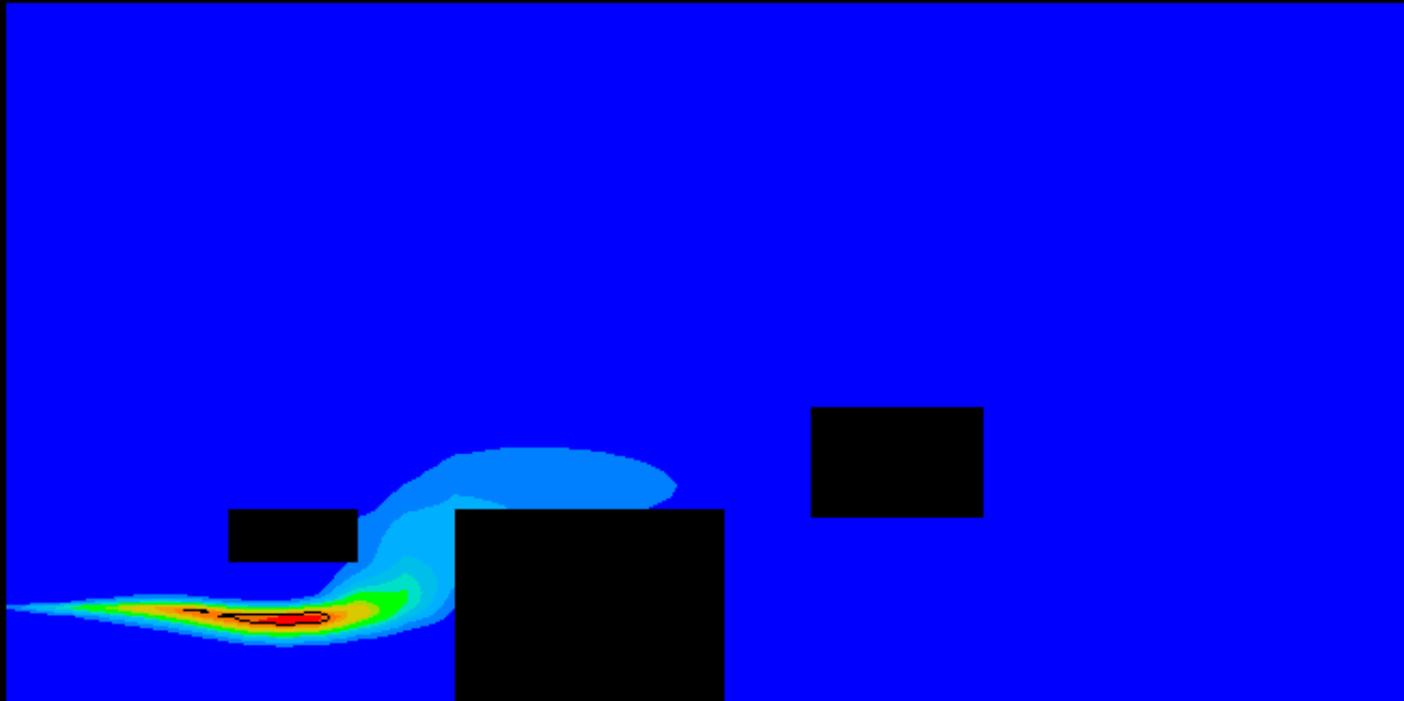
Y



CO2 DISPERSION - dispersion 3

Fração de CO2 na mistura - intervalo de injeção: 1 segundo. Perfil de fração mássica de CO2 após 4 seg, indicando superfície com 15 % .

6 seg após injeção



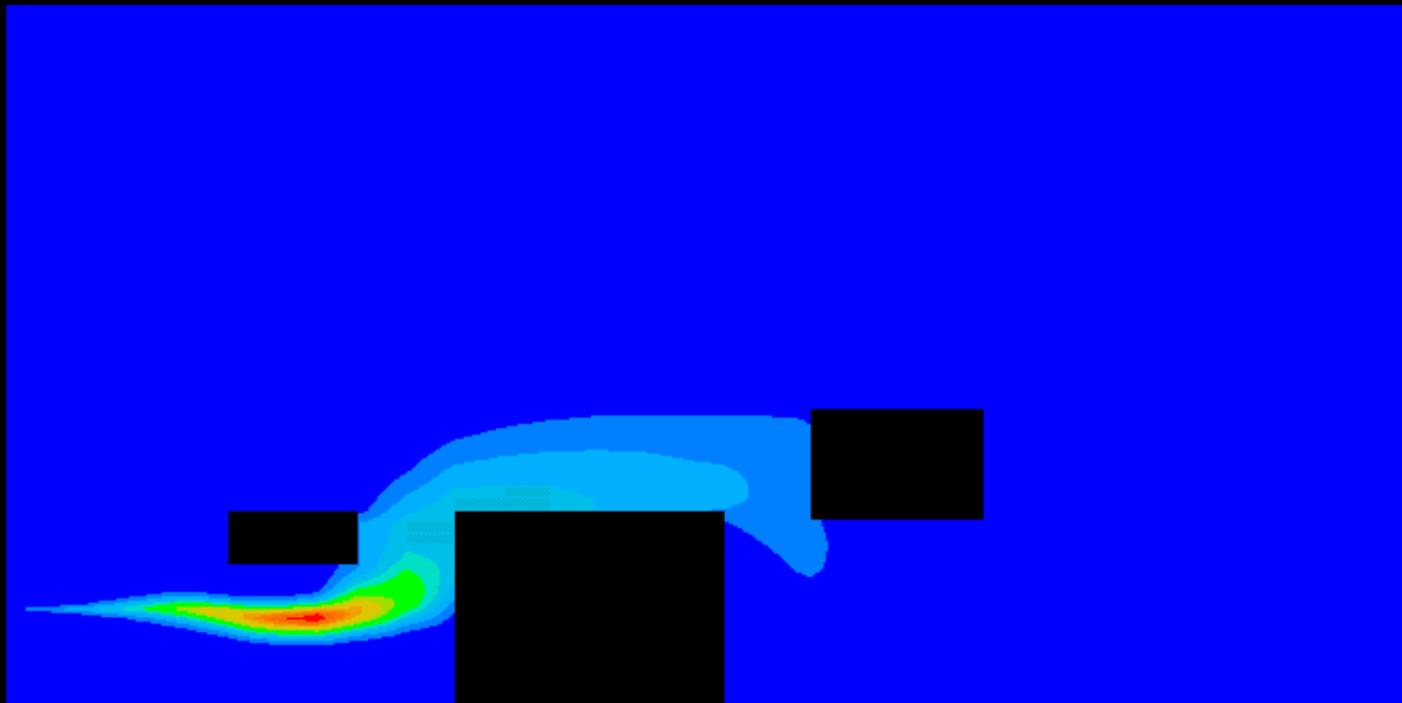
CO2 DISPERSION - dispersion 3

Fração de CO2 na mistura - intervalo de injeção: 1 segundo. Perfil de fração mássica de CO2 após 6 seg, indicando superfície com 15 % .

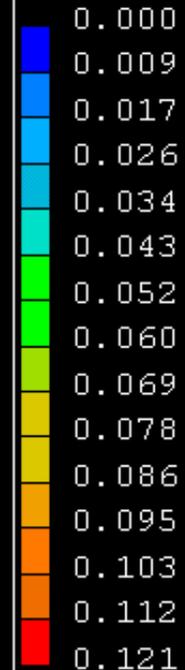
8 seg após injeção



PHOTON



FCO2



□□□□□□□□□□□□

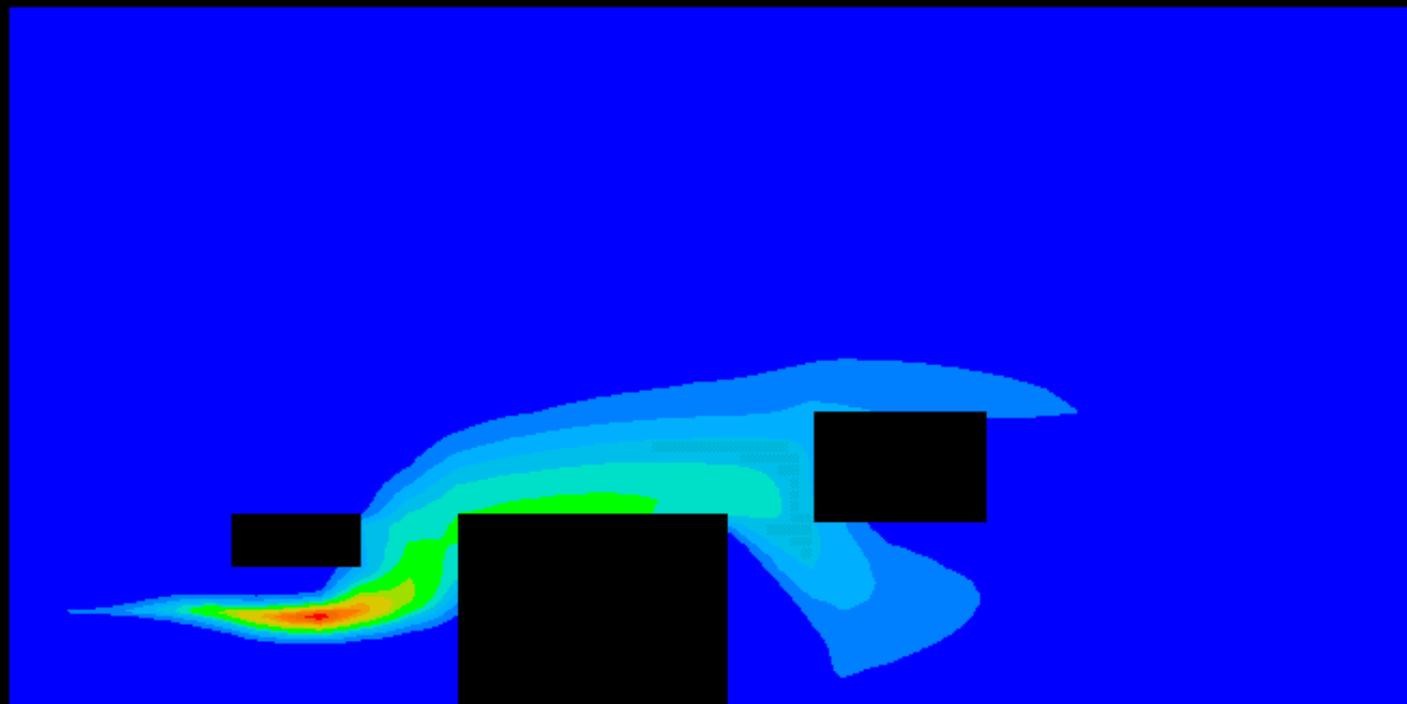
Y



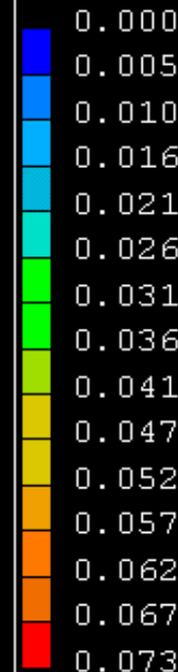
CO2 DISPERSION - dispersion 3

Fração de CO2 na mistura - intervalo de injeção: 1 segundo. Perfil de fração mássica de CO2 após 8 seg. Concentração diluída a valores menores que 15 %.

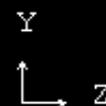
10 seg após injeção



FCO2



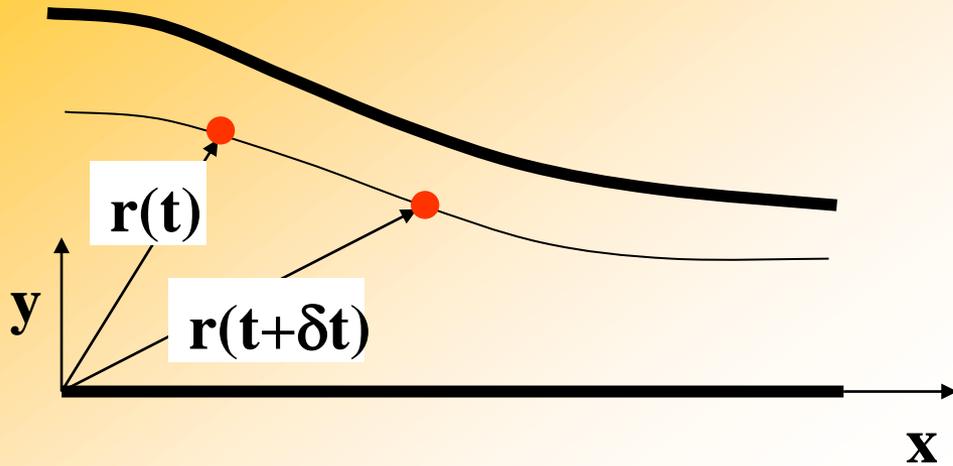
□□□□□□□□□□



CO2 DISPERSION - dispersion 3

Fração de CO2 na mistura - intervalo de injeção: 1 segundo. Perfil de fração mássica de CO2 após 10 seg. Concentração diluída a valores menores que 15 %.

**Referencial Lagrangeano:
segue a partícula de fluido**



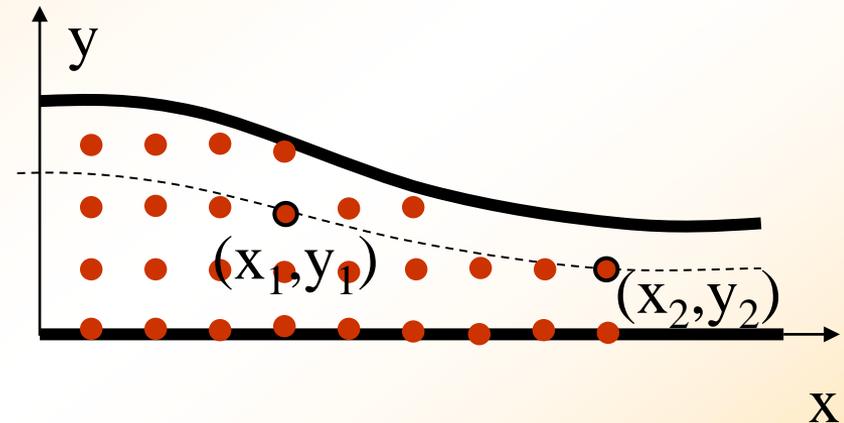
Velocidade e Aceleração para um referencial Lagrangeano:

$$u = \frac{dx}{dt} \quad a_x = \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v = \frac{dy}{dt} \quad a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Mas, como seguir uma partícula no fluido?

**Referencial Euleriano:
fixo no espaço, define o campo de velocidades.**



Velocidade para um referencial Euleriano:

$$u_1 = u_1(x_1, y_1, t) \quad u_2 = u_2(x_2, y_2, t)$$

$$v_1 = v_1(x_1, y_1, t) \quad v_2 = v_2(x_2, y_2, t)$$

Como definir uma aceleração??

Lagrangiano x Euleriano

- ✓ Todas as leis físicas são definidas para **um referencial Lagrangeano**: conservação massa, quantidade de movimento, energia etc
- ✓ Elas aplicam-se a corpos que possuem uma massa (identidade) fixa.
- ✓ Como tratar os fluidos que possuem a propriedade de se deformarem continuamente sob ação de uma tensão?
- ✓ Re-escrever as leis a partir de um referencial Euleriano que define os campos a partir da sua posição no espaço e no tempo.
- ✓ Algo semelhante foi realizado em EM461 onde a taxa de variação do sistema foi expressa por medidas a partir de um Volume de Controle.
- ✓ Em EM561 pode-se determinar a aceleração seguindo uma partícula a partir de um referencial Euleriano usando a **Derivada Substantiva!**

Um Experimento MENTAL... (Tente Imaginar)

Imagine um rio onde há o despejo de um contaminante. A concentração diminui a medida que é transportada pela correnteza. Você deve fazer uma medida da poluição. Para isto você dispõe de: um bote a motor e um medidor da concentração C do contaminante.

Você realizou três tipos de medidas, cada uma com um resultado diferente! Tente explicar porque:

- 1) Com o bote parado no rio (jogou ancora) você mediu uma concentração;
- 2) Com o motor do bote ligado você se deslocou normal a correnteza a velocidade V_b e mediu outra concentração;
- 3) Com o motor do bote desligado, você deixou o bote ir com a correnteza e mediu um valor diferente dos dois primeiros.

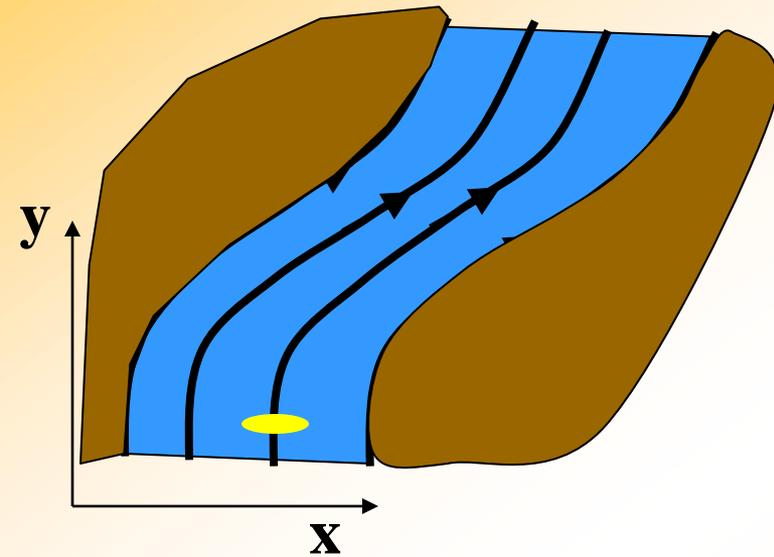
Barco Estacionário, $V_b = 0$

A variação da concentração c é função do tempo e do espaço:

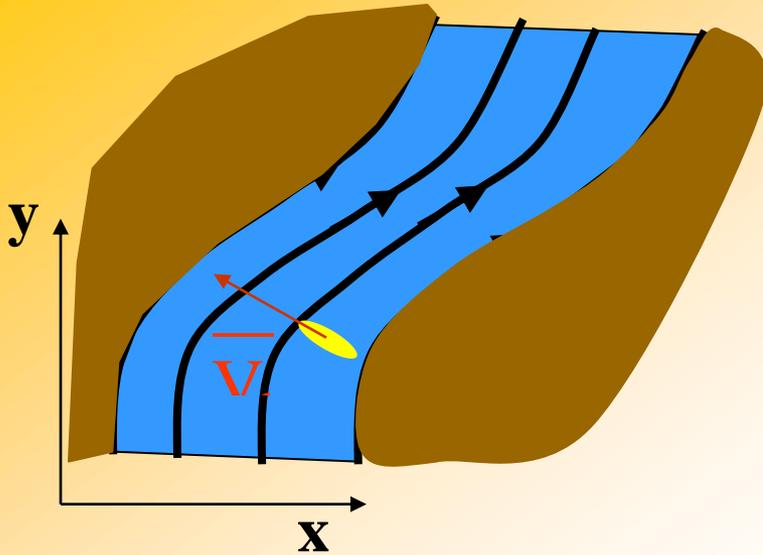
$$dc = \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial c}{\partial y} dy$$

Se o barco está estacionário, o sensor de poluição medirá uma concentração C que passa pelo ponto de medida e que varia com o tempo apenas:

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t}$$



Barco Movimentando com $V_b \neq 0$



A variação da concentração c é função do tempo e do espaço:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial c}{\partial y} dy$$

Se o barco está se movimentando com V_b então dx , dy e dt não são independentes mas estão relacionados por V_b :

$$dx = u_b \cdot dt \quad e \quad dy = v_b \cdot dt$$

A taxa temporal de c é determinada por:

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dt} \rightarrow \frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + u_b \cdot \frac{\partial c}{\partial x} + v_b \cdot \frac{\partial c}{\partial y}$$

Barco Movimentando com a correnteza $V_b = V$

Se o bote desloca junto com a correnteza então:

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial c}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial c}{\partial \mathbf{y}}$$

Desta maneira o medidor de concentração irá medir a variação de 'c' SEGUINDO a trajetória de uma partícula carregada pela correnteza (CONCEITO LAGRANGEANO!!!)

Derivada Total, Material ou Substancial, $D\phi/Dt$

- Denomina-se por **derivada total, material ou substantiva** a taxa temporal de variação de um escalar, ou vetor, **SEGUINDO** uma partícula de fluido.
- A taxa de variação é coincidente com aquela determinada por um referencial LAGRANGEANO porém ela é medida a partir de um referencial EULERIANO.
- ϕ é uma variável genérica, sua derivada substancial:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial t}}_{\text{termo transiente}} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial y}}_{\text{termo convectivo/adveectivo}} \equiv \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\mathbf{V}} \cdot \nabla\phi}_{\text{notacao vetorial}}$$

- **Importante:** $D\phi/Dt$ é uma propriedade **Lagrangeana** (seguindo uma partícula) obtida por meio de informação **Euleriana** (do campo de velocidades e da propriedade ϕ)

Nota sobre convecção e advecção

• Frequentemente os termos **convecção** e **advecção** são empregados como sinônimos do transporte de uma propriedade pelo campo de velocidades, por exemplo: q. movimento, energia ou concentração.

$$\underbrace{u \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}}_{\text{termo convectivo/adectivo bidimensional}}$$

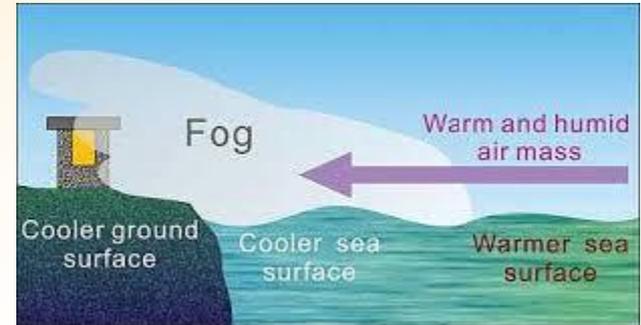
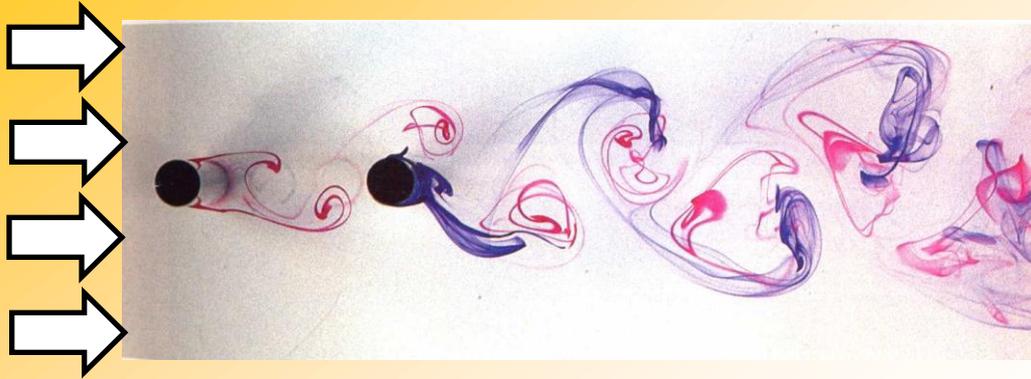
• Estes termos podem ser diferenciados pelas definições:

✓ **Convectivo** - representa o mecanismo de transporte (movimento) de um fluido em resposta a adição ou remoção de calor;

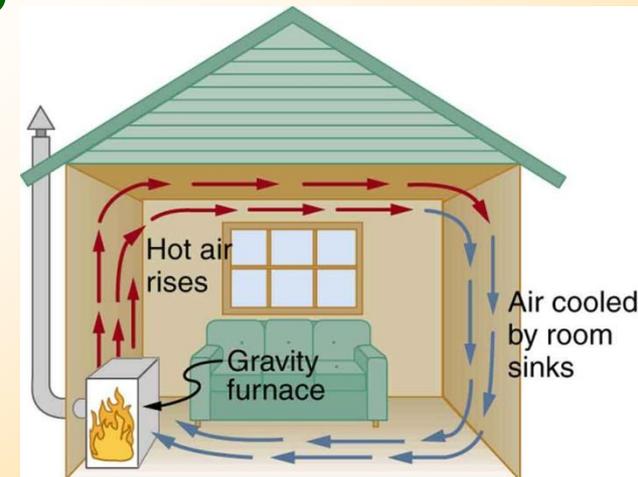
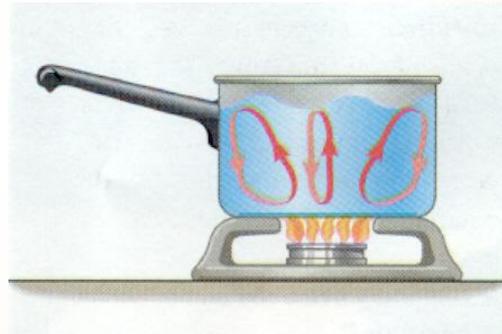
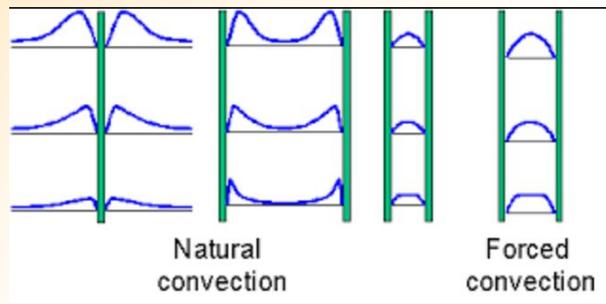
✓ **Adectivo** - representa o mecanismo de transporte (movimento) de algum material dissolvido ou em suspensão em um fluido.

✓ As definições dadas não são um consenso na literatura. Usualmente são usadas como se fossem sinônimos.

Exemplos advecção



Exemplos convecção



- As definições dadas no slide anterior não são um consenso na literatura. Na prática elas são usadas como se fossem sinônimos.

Derivada Total de um Escalar

- O escalar pode ser concentração espécie química, temperatura, energia interna, entalpia, entropia, etc.
- A taxa de variação temporal seguindo uma partícula para um sistema de coordenadas Cartesianas é dada por:

ϕ	Transiente $\partial/\partial t$	Convectivo $(\vec{V} \cdot \nabla) \phi$
T	$\partial T / \partial t$	$u \cdot (\partial T / \partial x) + v \cdot (\partial T / \partial y)$
c	$\partial c / \partial t$	$u \cdot (\partial c / \partial x) + v \cdot (\partial c / \partial y)$
u	$\partial u / \partial t$	$u \cdot (\partial u / \partial x) + v \cdot (\partial u / \partial y)$
h	$\partial h / \partial t$	$u \cdot (\partial h / \partial x) + v \cdot (\partial h / \partial y)$

Derivada Total do Vetor Velocidade, $D\vec{V}/Dt$

- A derivada total do vetor velocidade é **aceleração** da partícula medida de um referencial Lagrangeano. :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$$

- Para um escoamento 2D o vetor $D\vec{V}/Dt$ possui duas componentes:

ϕ	transiente	convectivo
u	$\partial u / \partial t$	$u \cdot (\partial u / \partial x) + v \cdot (\partial u / \partial y)$
v	$\partial v / \partial t$	$u \cdot (\partial v / \partial x) + v \cdot (\partial v / \partial y)$

Aceleração de uma partícula de fluido num campo de velocidade

✓ Sistema de coordenadas Cartesiano

$$a_{x_p} = \frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$a_{y_p} = \frac{Dv}{Dt} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$a_{z_p} = \frac{Dw}{Dt} = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

✓ Sistema de coordenadas Cilíndrico Polar

$$a_{r_p} = V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_r}{\partial t}$$

$$a_{\theta_p} = V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{\partial V_\theta}{\partial t}$$

$$a_{z_p} = V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial t}$$

Para que serve mesmo o cálculo da derivada Total?

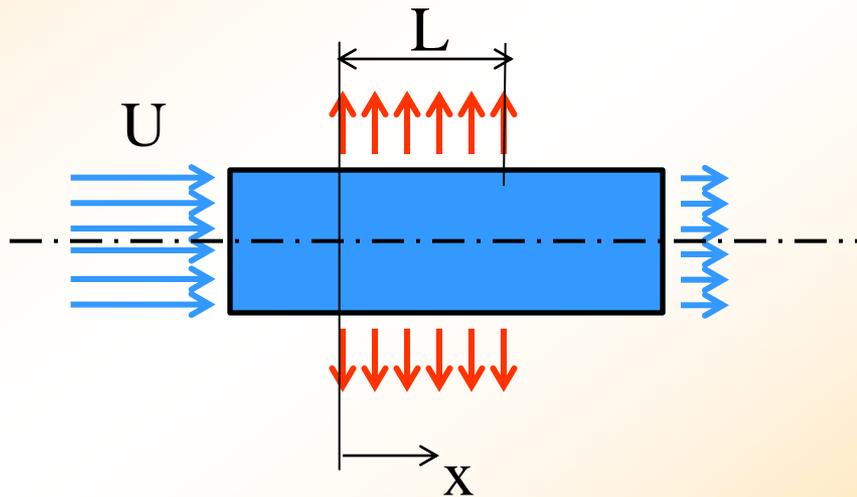
- ✓ Lembre que todas as leis físicas foram feitas para sistemas.
- ✓ A derivada total fornece a taxa de variação do sistema:

$$\left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{\text{sistema}} \equiv \left. \frac{D\phi}{Dt} \right|_{\text{V.C. inf initezimal}} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla\phi$$

- ✓ Como nossa próxima etapa é chegar a forma diferencial da Eq. Quantidade de Movimento, estamos a um passo dela, já determinamos a aceleração da partícula por exemplo!
- ✓ Deve ser lembrado que a forma integral desta relação foi apresentada no cap. 4 como sendo o Teorema de Transporte de Reynolds:

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{\text{sistema}} \equiv \frac{D}{Dt} \left[\int_{\text{V.C.}} \rho\beta dV \right] = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{V.C.}} \rho\beta dV + \int_{\text{SC}} \rho\beta (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA$$

5.40 Um líquido incompressível com viscosidade desprezível escoa em regime permanente ao longo de um tubo horizontal de diâmetro constante. Em uma seção porosa de comprimento $L = 0,3$ m, o líquido é removido a uma taxa constante por unidade de comprimento, de forma que a velocidade axial uniforme no tubo é $u(x) = U(1 - x/2L)$, onde $U = 5$ m/s. Desenvolva uma expressão para a aceleração de uma partícula do fluido ao longo da linha de centro da seção porosa.



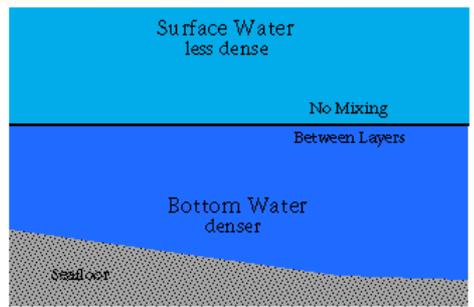
✓ **Exercício** - Mostre que a equação da conservação da massa pode ser escrita por:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

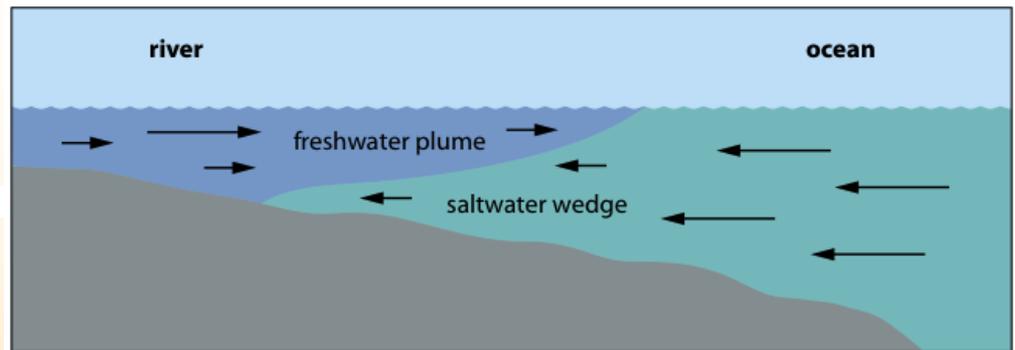
✓ Para um fluido compressível, dê um significado $\nabla \cdot V$,

Considere um **líquido incompressível**, porém com variação de densidade devido à estratificação (*por exemplo variação de salinidade na água do mar devido a radiação solar*), quanto valem os termos $D\rho/Dt$ e $\text{div}(V)$

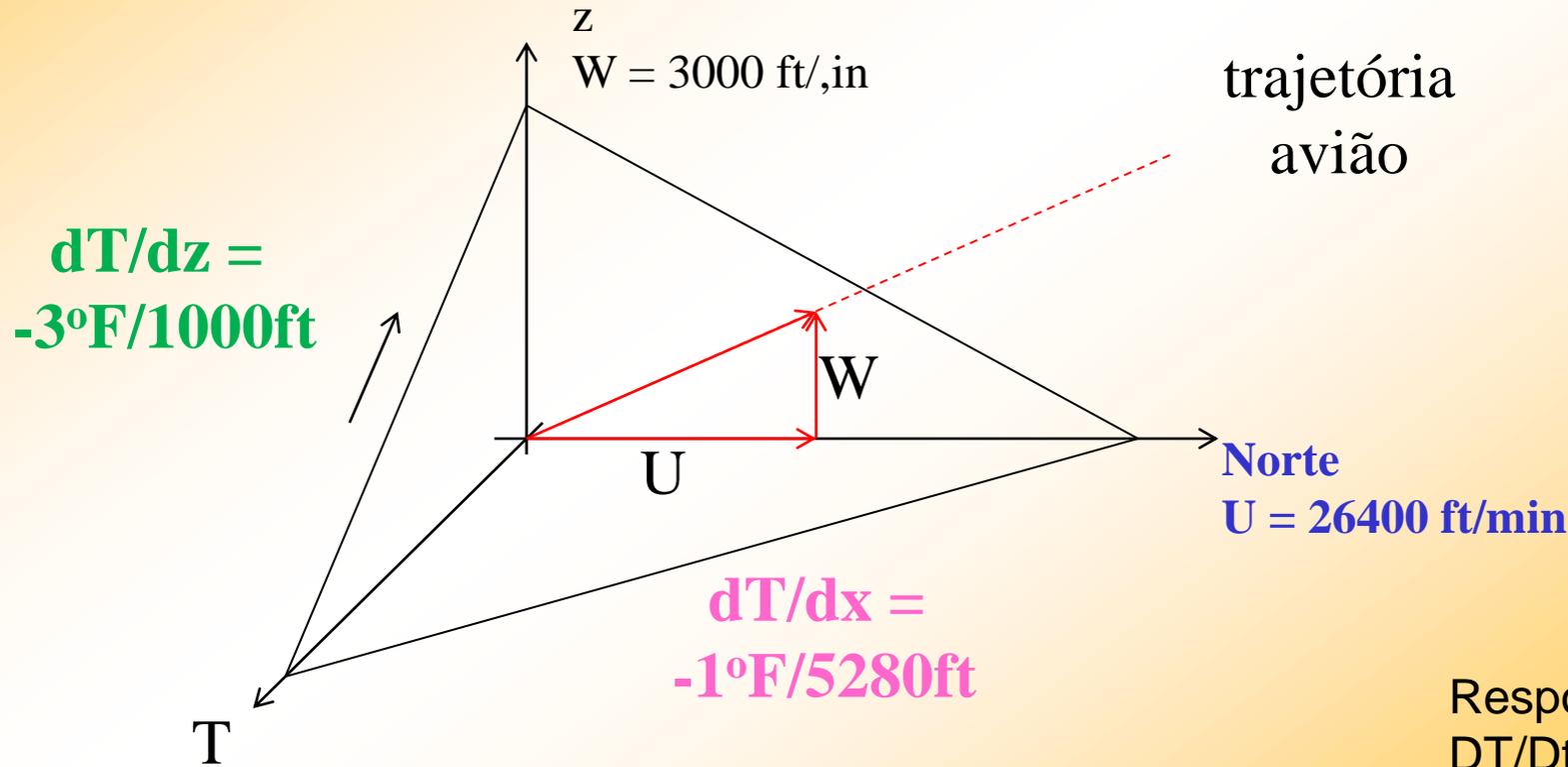
- (i) ao longo de uma linha de corrente? $D\rho/Dt \neq 0$ e $\text{div}(V) \neq 0$
- (ii) ao longo de uma linha de concentração c^{te} ? $D\rho/Dt = \text{div}(V)=0$



Stratification - No mixing between water layers



5.45 - Um avião voa no rumo **Norte a 300 mph** em relação ao solo. A sua razão de subida é de 3000 pés/min. O gradiente vertical de temperatura é de **3°F por 1000 pés de altitude**. A temperatura do solo varia com a posição devido a chegada de uma frente fria caindo na razão de **1°F por milha**. Calcule a taxa de variação da temperatura por um registrador a bordo da aeronave.

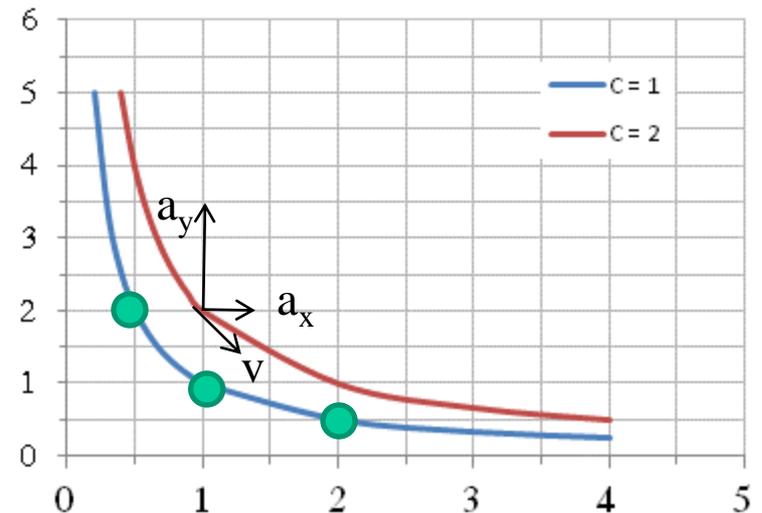


Resposta:
 $DT/Dt = - 14^\circ\text{F}/\text{min}$

5.49 Um campo de velocidade permanente bidimensional é dado por $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$, onde $A = 1 \text{ s}^{-1}$. Mostre que as linhas de corrente para esse escoamento são hipérbolas retangulares, $xy = C$. Obtenha uma expressão geral para a aceleração de uma partícula fluida nesse campo de velocidade. Calcule a aceleração das partículas fluidas nos pontos $(x, y) = (1/2, 2)$, $(1, 1)$ e $(2, 1/2)$, onde x e y são medidos em metros. Trace as linhas de corrente que correspondem a $C = 1$ e 2 e mostre os vetores aceleração no esboço das linhas de corrente.

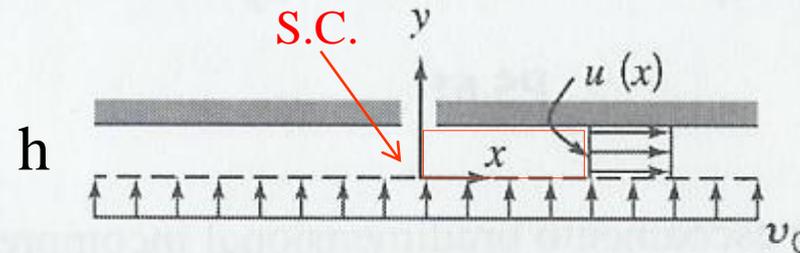
Respostas:

$$a_x = A^2x \quad \text{e} \quad a_y = A^2y$$

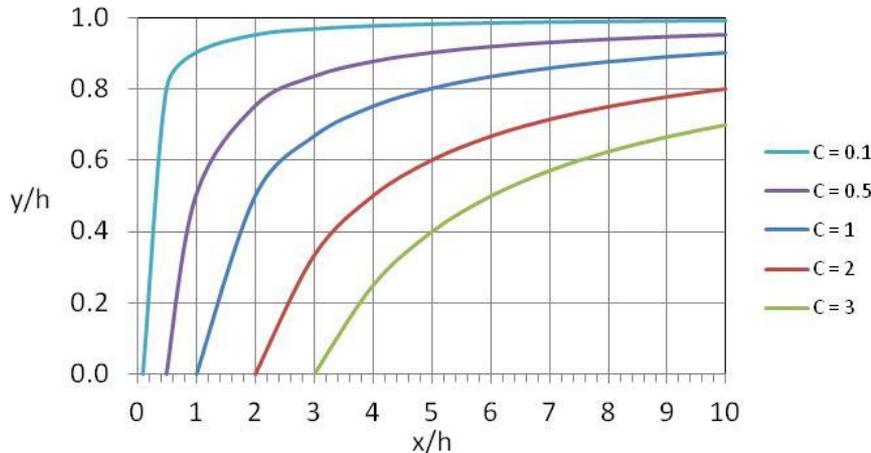


5.57 O ar escoia na fresta estreita, de altura h , entre duas placas paralelas muito próximas, através de uma superfície porosa, conforme mostrado. Use um volume de controle com superfície externa localizada na posição x ,

1. Mostre que a velocidade uniforme na direção x é $u = v_0 x/h$
2. Determine uma expressão para velocidade na direção y
3. Avalie a aceleração de uma partícula fluida na fresta



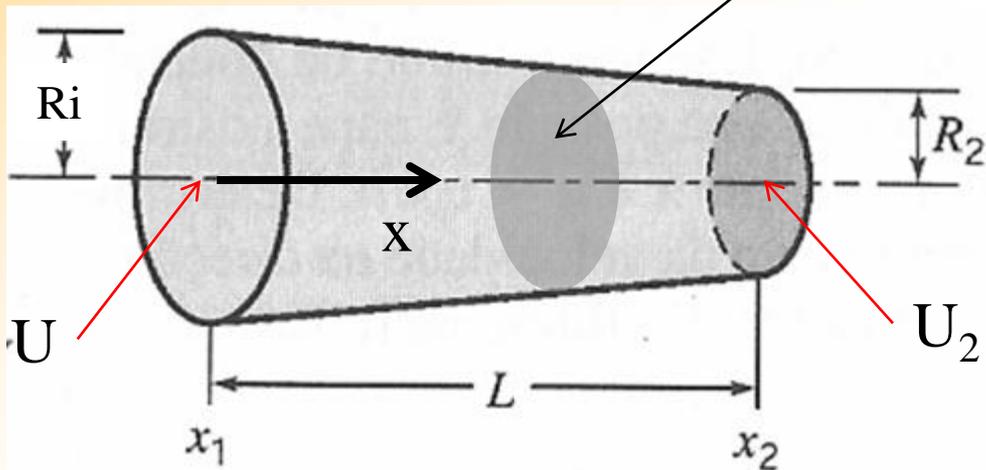
Linhas de corrente



- Resp.: (1) $u(x) = v_0(x/h)$
 (2) $v(y) = v_0(1-y/h)$
 (3) $a_x = [(v_0)^2/h].(x/h)$
 (3) $a_y = [(v_0)^2/h].(1-y/h)$

Considere o escoamento unidimensional incompressível através do duto circular mostrado. A velocidade na seção ① é dada por $\mathbf{U}_i = U_0 + U_1 \sin \omega t$, onde $U_0 = 20 \text{ m/s}$, $U_1 = 2 \text{ m/s}$ e $\omega = 0,3 \text{ rad/s}$. As dimensões do duto são $L = 1 \text{ m}$, $R_i = 0,2 \text{ m}$ e $R_2 = 0,1 \text{ m}$. Determine a aceleração da partícula na saída do duto. Trace um gráfico dos resultados como uma função do tempo para um ciclo completo.

plano $x, R, V(x)$



$$R(x) = R_i - \frac{\Delta R}{L}x \quad \text{onde} \quad \Delta R = (R_i - R_2)$$

$$\text{Resp.: } \frac{DU_2}{Dt} = U_1 \left(\frac{R_i}{R_2} \right)^2 \omega \cdot \cos \omega t - 2 \frac{(U_0 + U_1 \sin \omega t)^2}{R_2} \left(\frac{R_i}{R_2} \right)^4 \left(\frac{\Delta R}{L} \right)$$

ou na forma :

$$= \frac{U_0^2}{R_2} \left(\frac{R_i}{R_2} \right)^2 \left[\left(\frac{U_1}{U_0} \right) \left(\frac{\omega R_2}{U_0} \right) \cos \omega t - 2 \left(1 + \left(\frac{U_1}{U_0} \right) \sin \omega t \right)^2 \left(\frac{R_i}{R_2} \right)^2 \left(\frac{\Delta R}{L} \right) \right]$$

FIM

Capítulo 5

Introdução à Análise Diferencial do Movimento do Fluido

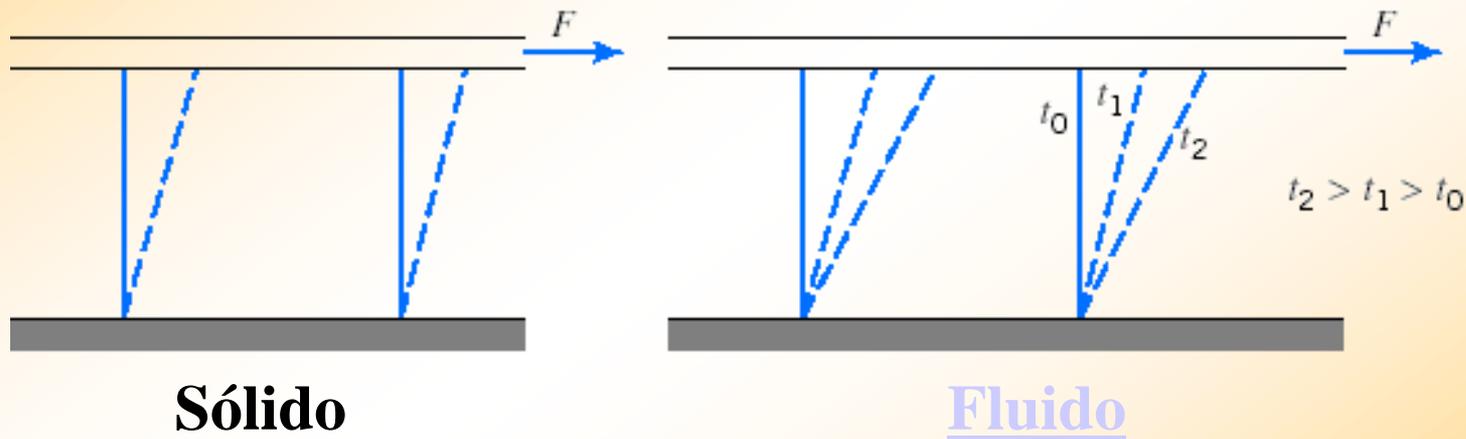
Tópicos desta aula:

- i. Tensor Deformação e Rotação, S e R ;
- ii. Tensão Viscosa, τ
- iii. Vetor Vorticidade, ω , e Teorema Stokes

Definição de Fluido e Taxa de Deformação

Quando uma tensão de cisalhamento é aplicado:

- ✓ O Fluido se deforma continuamente
- ✓ O Sólido se deforma, mas não continuamente



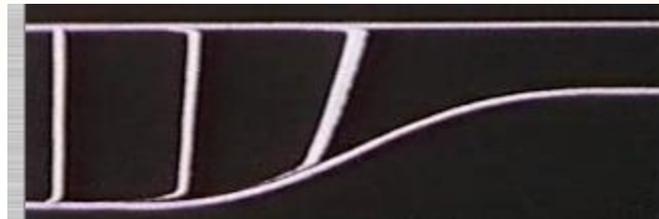
- ✓ O Fluido pode apresentar nas fases: líquido, vapor ou gás.
- ✓ Os próximos slides irão analisar a deformação do fluido

Deformação de um Elemento Fluido

- ✓ A medida que o fluido flui as partículas de fluido são transportadas para novas posições e estão sujeitas a deformação.
- ✓ A velocidade do fluido é definida por um campo Euleriano:

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) \quad (\text{ref. Euleriano - campo de velocidades})$$

- ✓ Existe uma relação entre \mathbf{V} e a **taxa de deformação do fluido**.
- ✓ A taxa de deformação depende do **movimento relativo** de um ponto em relação a sua vizinhança

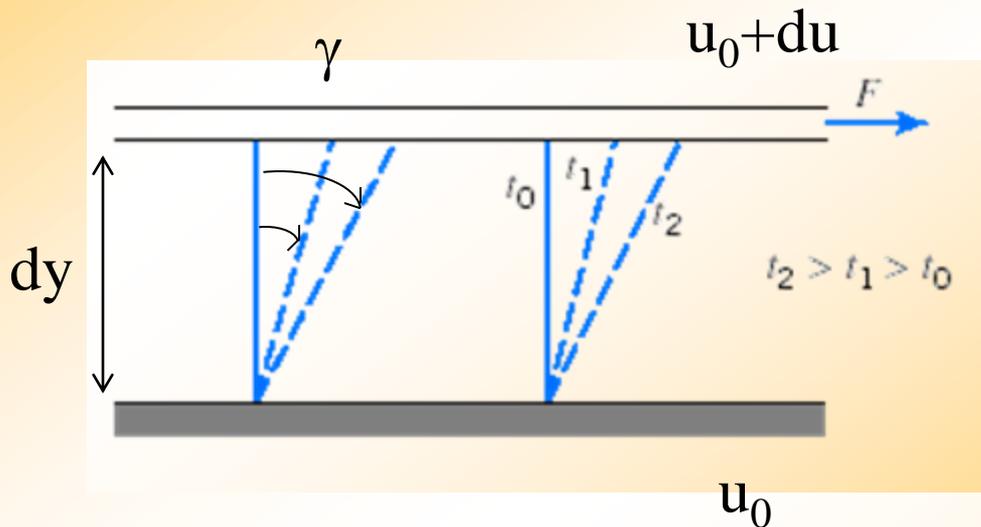


Exemplo: Timelines (partículas geradas no mesmo instante) em diferentes intervalos de tempo mostrando a velocidade relativa entre elas num canal convergente. Assista filme [‘*timelines*’](#).

Estado simples de deformação

(o que vc viu em Mec Flu I)

Placas paralelas com espaçamento dy deslocam-se com velocidade relativa du . Calcular a taxa de deformação angular, $d\gamma/dt$



$$\gamma = \frac{[(u_0 + du) - u_0] \cdot dt}{dy} = \left(\frac{du}{dy} \right) \cdot dt$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{du}{dy} \quad \left(\frac{1}{\text{seg}} \right)$$

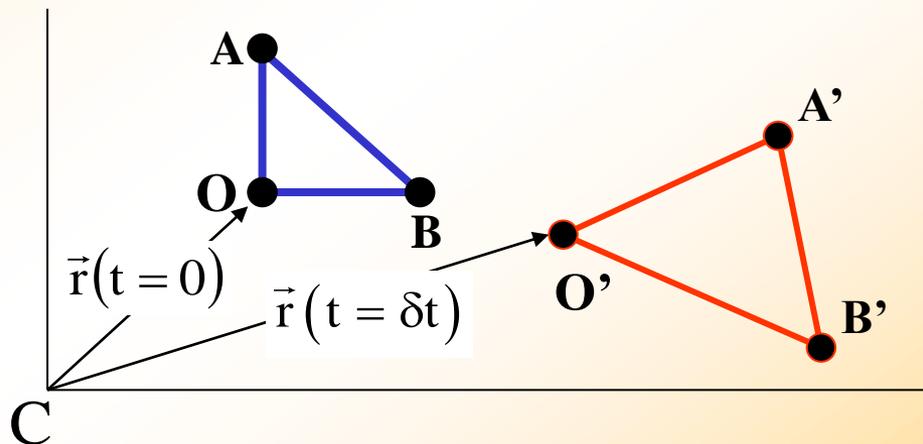
- ✓ A taxa de deformação de γ é expressa por uma derivada do campo de velocidades e possui dimensão (1/seg).
- ✓ Como generalizar a taxa de deformação se ocorrer deformações nas três direções simultaneamente?

Natureza da Taxa de Deformação

- ✓ Taxa de deformação é um conceito relativo, quer dizer, ela representa a taxa de um dado ponto relativo à sua vizinhança;
- ✓ Ela pode variar ponto a ponto no escoamento;
- ✓ O conceito uni-dimensional pode ser generalizado para um estado tri-dimensional;
- ✓ Tal como a tensão, a taxa de deformação de um ponto fluido possui natureza tensorial; $D_{xy} = du/dy$
- ✓ Para determiná-la é necessário o conhecimento do campo de velocidades e suas derivadas...

Deformação de um Elemento Fluido

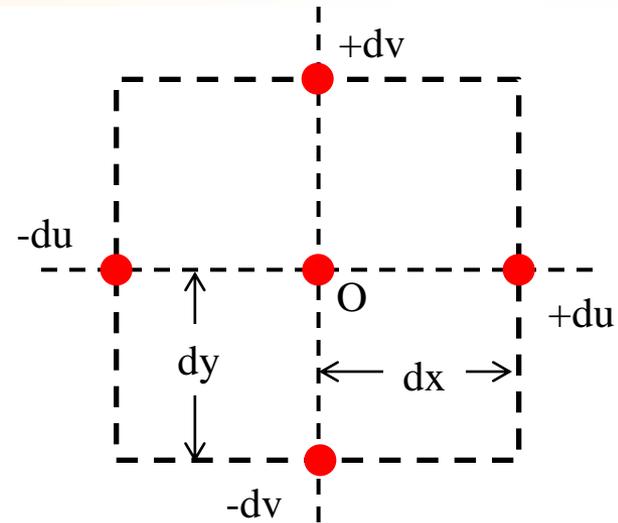
- ✓ A taxa de deformação depende do **movimento relativo** de um ponto em relação a sua vizinhança, ou seja da **diferença de velocidade** entre ele e seus vizinhos.
- ✓ Num caso 2D onde há duas direções principais. No instante $t = 0$ temos o triângulo AOB, após $t = \delta t$ vamos observar o deslocamento relativo AOB devido às diferentes velocidades que atuam em AOB.



- ✓ O movimento relativo de AOB para A'O'B' ou sua taxa de deformação pode ser decomposta em três movimentos básicos : **deformação angular, deformação linear e rotação.**

Deformação de um Elemento Fluido

- ✓ No ponto **O** as componentes de velocidade são u_O, v_O, w_O ;
- ✓ Um referencial em **O** irá observar os pontos distantes dx e dy de **O** com velocidades relativas iguais a du e dv ;
- ✓ A velocidade na vizinhança de **O** é determinada por uma expansão em série de Taylor (primeira ordem) ao redor de **O**:



$$u_O + du = u_O + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$v_O + dv = v_O + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$w_O + dw = w_O + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

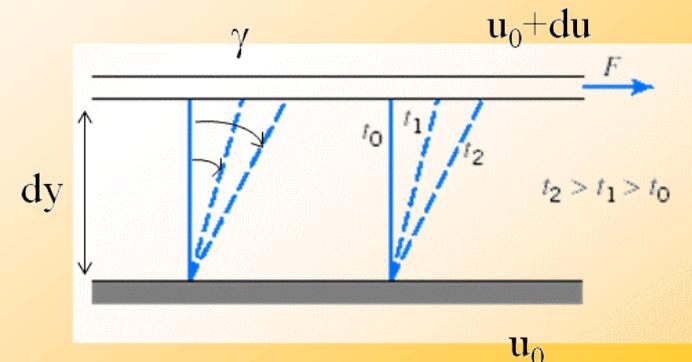
Deformação de um Elemento Fluido

- ✓ A variação da velocidade de O para vizinhança é expressa por uma matriz com 9 derivadas parciais do campo de velocidades local:

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

- ✓ Cada derivada parcial representa uma **taxa de deformação** do fluido (1/seg) associada a um plano e uma direção onde ela ocorre, portanto a **taxa de deformação possui natureza tensorial**.

- ✓ **Exemplo:** $d\gamma_{xy}/dt = du/dy$ é uma taxa de deformação que ocorre num plano cuja normal é paralela ao eixo z e cuja direção é x. **No entanto ela segue o índice da tensão que ela gera, por isso γ_{xy} .**



Tensor Deformação

- ✓ Em notação indicial, o tensor deformação, D_{ij} , é definido por

$$\mathbf{D}_{i,j} = \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_j} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} \\ \mathbf{D}_{31} & \mathbf{D}_{32} & \mathbf{D}_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{z}} \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} \end{bmatrix}$$

- ✓ Em notação vetorial ele se origina do transposto do gradiente do vetor velocidade!

$$\mathbf{D} = \left[\text{grad } \vec{V} \right]^T \quad \text{ou} \quad \mathbf{D} = \nabla \vec{V}^T$$

Decomposição do Tensor Deformação do Fluido e Associação a Estados de Deformação Fundamentais:

- i. Alongamento,
- ii. Deformação,
- iii. Rotação e
- iv. Deslocamento

Partição Tensor Deformação

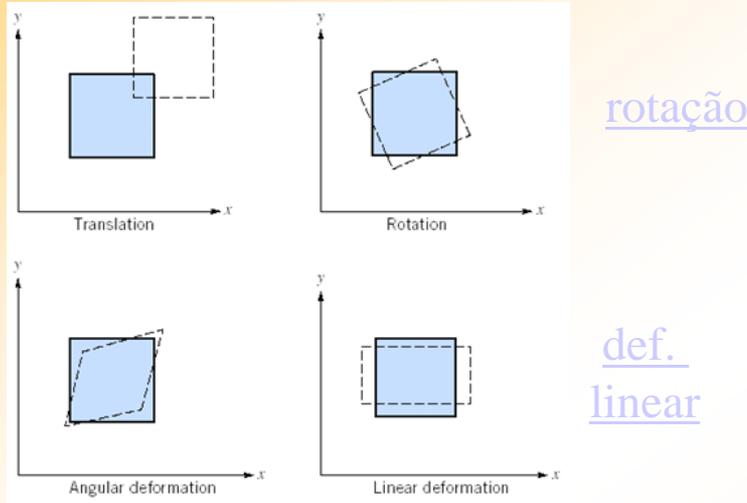
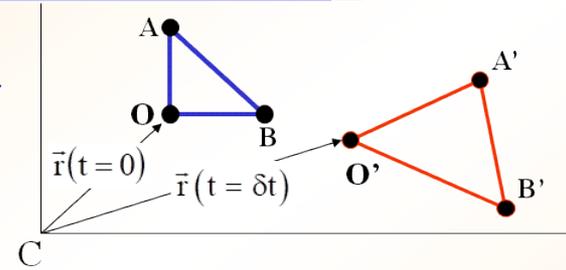
- ✓ O tensor $D_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$ é decomposto em uma parte **Simétrica** e outra **anti-Simétrica**:

$$D_{i,j} \equiv \underbrace{\frac{1}{2} (D_{i,j} + D_{j,i})}_{\substack{\text{Tensor Simétrico} \\ S_{i,j}}} + \underbrace{\frac{1}{2} (D_{i,j} - D_{j,i})}_{\substack{\text{Tensor Anti-Simétrico} \\ R_{i,j}}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\text{TENSOR SIMÉTRICO}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}}_{\text{TENSOR ANTI-SIMÉTRICO}}$$

Cinemática NCFMM “Deformation of Continua media”

- A relação $OAB \leftrightarrow O'A'B'$ é expressa pela soma de 4 movimentos básicos : **translação, rotação, deformação angular e deformação linear**

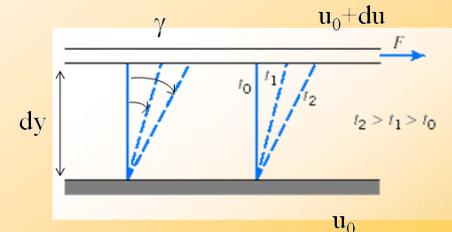


O próximo passo é identificar cada movimento isoladamente para depois entender a relação $OAB \leftrightarrow O'A'B'$ em função dos quatro tipos de movimento!

Podemos antecipar que p/ haver tensão é necessário que haja uma taxa de deformação.

- Para **translação pura** não há deformação, ângulos dos vértices se preservam;
- Para **rotação pura** os ângulos dos vértices se preservam, não há deformação;
- Somente **deformação angular e deformação linear** produzem tensão.

EM 461



$$\tau_{x,y} = \mu \dot{\gamma}_{xy} = \mu \frac{du}{dy}$$

(1) Dilatação linear na direção x

Um segmento ADBC, sujeito a uma extensão ‘pura’, no tempo $t=0$ deforma-se e no instante $t = \delta t$, ele encontra-se em A'D'B'C'. A extensão ocorre para os segmentos $AC \rightarrow A'C'$ e $DB \rightarrow D'B'$.

O deslocamento relativo:

$$\frac{\overline{A'C'} - \overline{AC}}{\overline{AC}} = \frac{(\partial u / \partial x) dx dt}{dx} = (\partial u / \partial x) dt$$

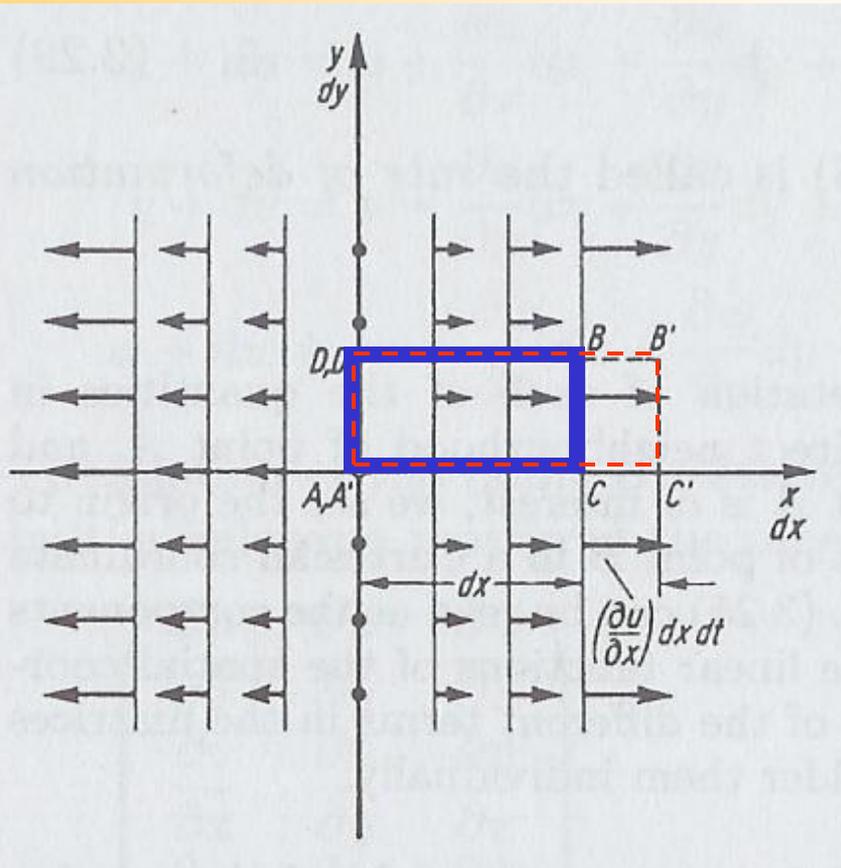
A taxa de deformação linear na direção x é:

$$S_{xx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\overline{A'C'} - \overline{AC}}{\overline{AC}} \right) = (\partial u / \partial x)$$

As componentes nas outras direções são:

$$S_{yy} = (\partial v / \partial y)$$

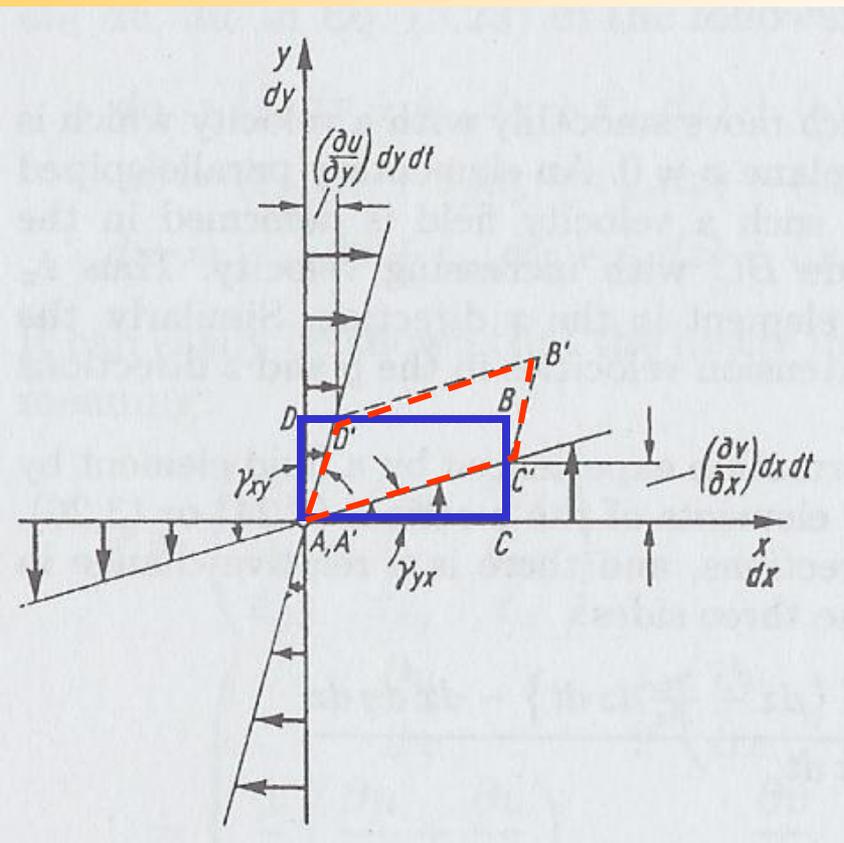
$$S_{zz} = (\partial w / \partial z)$$



Os elementos S_{xx} , S_{yy} , e S_{zz} formam a diagonal do tensor deformação

(2) Deformação angular no plano xy

Um segmento ADBC, sujeito a uma deformação angular ‘pura’ no tempo $t = 0$ deforma-se no instante $t = \delta t$, em A'D'B'C'. O ângulo original do vértice A deforma-se nos ângulos γ_{xy} e γ_{yx}



A deformação angular e a taxa:

$$\gamma_{xy} \cong \frac{\overline{DD'}}{\overline{AD}} = \frac{(\partial u / \partial y) dy dt}{dy} \rightarrow \frac{d(\gamma_{xy})}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{yx} \cong \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} = \frac{(\partial v / \partial x) dx dt}{dx} \rightarrow \frac{d(\gamma_{yx})}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

A taxa def. angular é definida como a média destes dois movimentos:

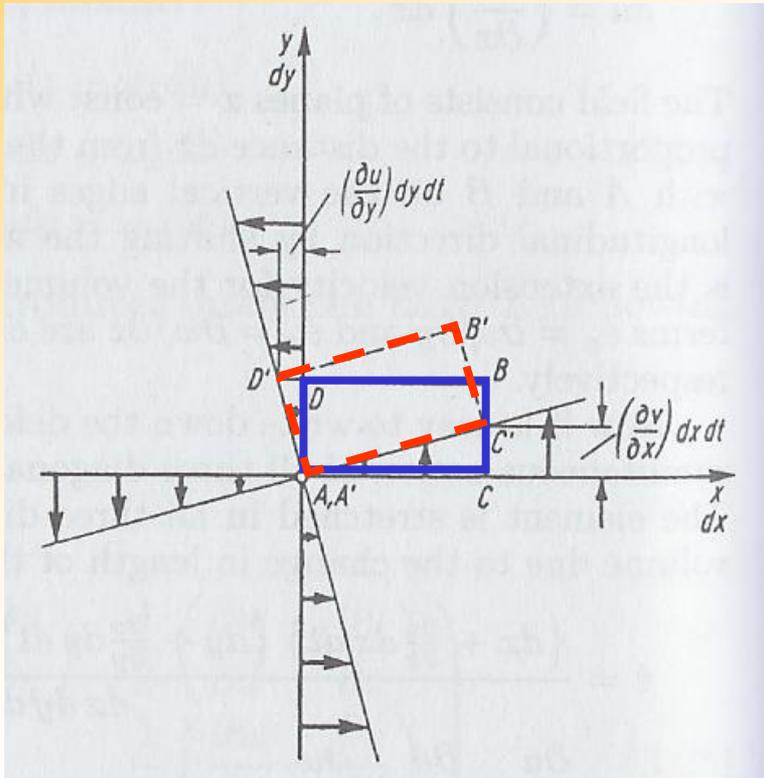
$$S_{xy} = S_{yx} = \frac{1}{2} \left[\frac{d(\gamma_{xy})}{dt} + \frac{d(\gamma_{yx})}{dt} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Os elementos fora da diagonal são

simétrico, portanto o tensor deformação é simétrico!

(3) Rotação no plano xy

Um segmento ADBC, sujeito a uma rotação ‘pura’ no tempo $t = 0$, gira sobre o vértice A e no instante $t = \delta t$, ele encontra-se em A'D'B'C'. O ângulo original do vértice A é preservado! Neste movimento **não há deformação** dos vértices mas há rotação.



Se o ângulo de A é preservado então:

$$\gamma_{xy} \cong \frac{\overline{DD'}}{AD} = \frac{\overline{CC'}}{AC} \cong \gamma_{yx}$$

$$\gamma_{xy} \cong \frac{\overline{DD'}}{AD} = \frac{(\partial u / \partial y) dy dt}{dy} \rightarrow \frac{d(\gamma_{xy})}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{yx} \cong \frac{\overline{CC'}}{AC} = \frac{(\partial v / \partial x) dx dt}{dx} \rightarrow \frac{d(\gamma_{yx})}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

A taxa de rotação é definida como a média destes dois movimentos:

$$R_{xy} = -R_{yx} = \frac{1}{2} \left[\frac{d(\gamma_{xy})}{dt} + \frac{d(\gamma_{yx})}{dt} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Tensor Deformação

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\mathbf{S} = \text{TENSOR SIMÉTRICO}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R} = \text{TENSOR ANTI-SIMÉTRICO}}$$

$$S_{ij} = S_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

onde $\varepsilon = 0$ se dois índices forem iguais, $\varepsilon = +1$ se $ijk = 1,2,3; 2,3,1; 3,1,2$ e $\varepsilon = -1$ se $ijk = 3,2,1; 2,1,3; 1,3,2$.

1. A diagonal de **S** está associada a dilatação linear do elemento.
2. Os elementos fora da diagonal de **S** estão associados a deformação angular.
3. Os elementos do tensor anti-simétrico **R** estão associados a rotação do elemento fluido, eles não causam deformação mas somente rotação dos elementos.

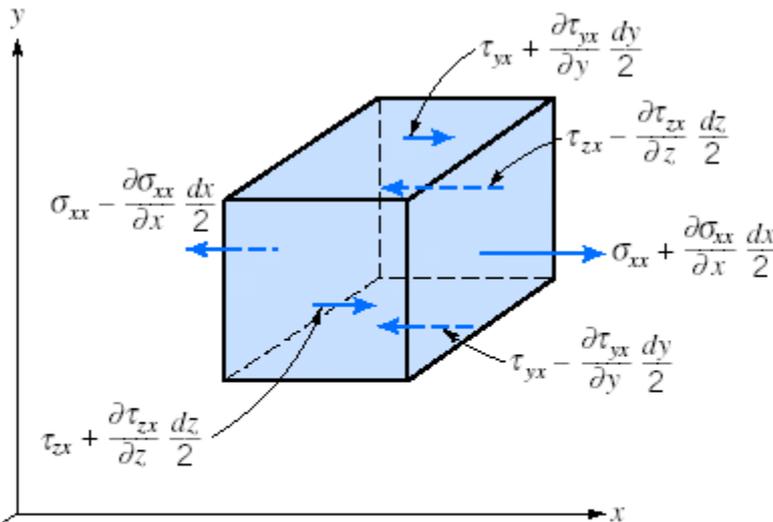
Equação constitutiva para estabelecer a relação entre tensão e taxa de deformação para um fluido Newtoniano.

Equações constitutivas para tensão/deformação não estão fundamentadas em leis de conservação mas no comportamento do fluido. Por isso podem variar de fluido para fluido.

Tensão Hidrostática, P , e Tensor Desvio de Tensão T' (origem viscosa)

- ✓ As forças de superfície são: **pressão** (isotrópica age normal às faces) e as **tensões de origem viscosa** devido a deformação do fluido.
- ✓ O tensor de tensões $T_{i,j}$ é composto pela Pressão e pelo tensor desvio de tensões, $T'_{i,j}$.

$$T_{i,j} = -P\delta_{i,j} + T'_{i,j}$$



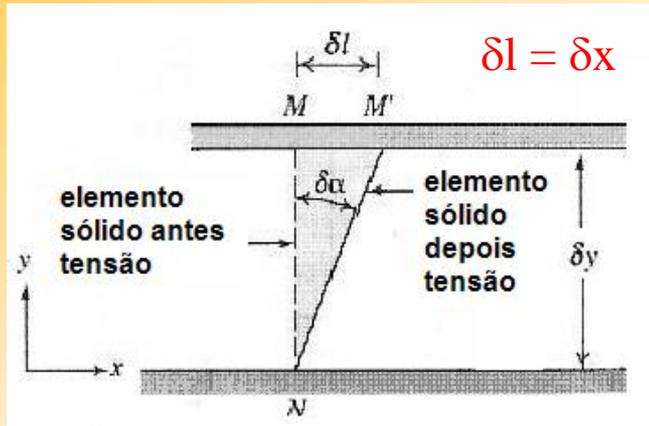
Comentário: No estudo de *fluido em movimento de corpo rígido* (Cap 3, EM461) o tensor de tensões considerado foi apenas \mathbf{P} uma vez que $T'_{i,j}$ era nulo pq não havia movimento relativo entre as partículas!

Propriedades do Tensor Desvio das Tensões, \mathbf{T}'

- ✓ O tensor desvio das tensões existe somente se houver movimento relativo entre as partículas de fluido.
- ✓ \mathbf{T}'_{ij} possui tensões normais e cisalhantes,
- ✓ Pode-se mostrar que \mathbf{T}'_{ij} é simétrico ([link](#), pg 12). Os elementos fora da diagonal são idênticos, $\mathbf{T}'_{ij} = \mathbf{T}'_{ji}$
- ✓ Se \mathbf{T}'_{ij} é simétrico ele deve ser proporcional a parte simétrica do tensor de deformação \mathbf{D} , neste caso ao tensor \mathbf{S}_{ij} (deformação angular e deformação linear), $\mathbf{T}' = \mathbf{T}'(\mathbf{S})$
- ✓ O tensor de rotação, $\mathbf{R}_{i,j}$ é anti-simétrico e portanto não contribui para \mathbf{T}'_{ij} .

Similaridades Sólido/Fluido – EM461

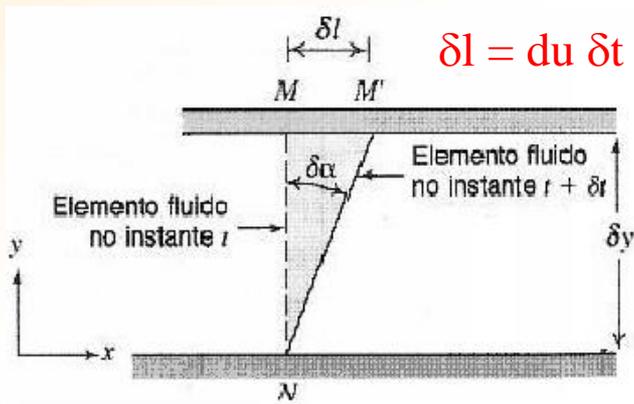
- ✓ Uma tensão aplicada a um corpo sólido causa uma deformação Claude Navier (1785-1836) ([link](#))



$$\tau = G \frac{dx}{dy}$$

Coeficiente Lamé (N/m²) **Deformação**

- ✓ Fluido se deforma continuamente quando sujeito a uma tensão. Foi proposto, por similaridade ao sólidos, que a tensão é proporcional a taxa de deformação.



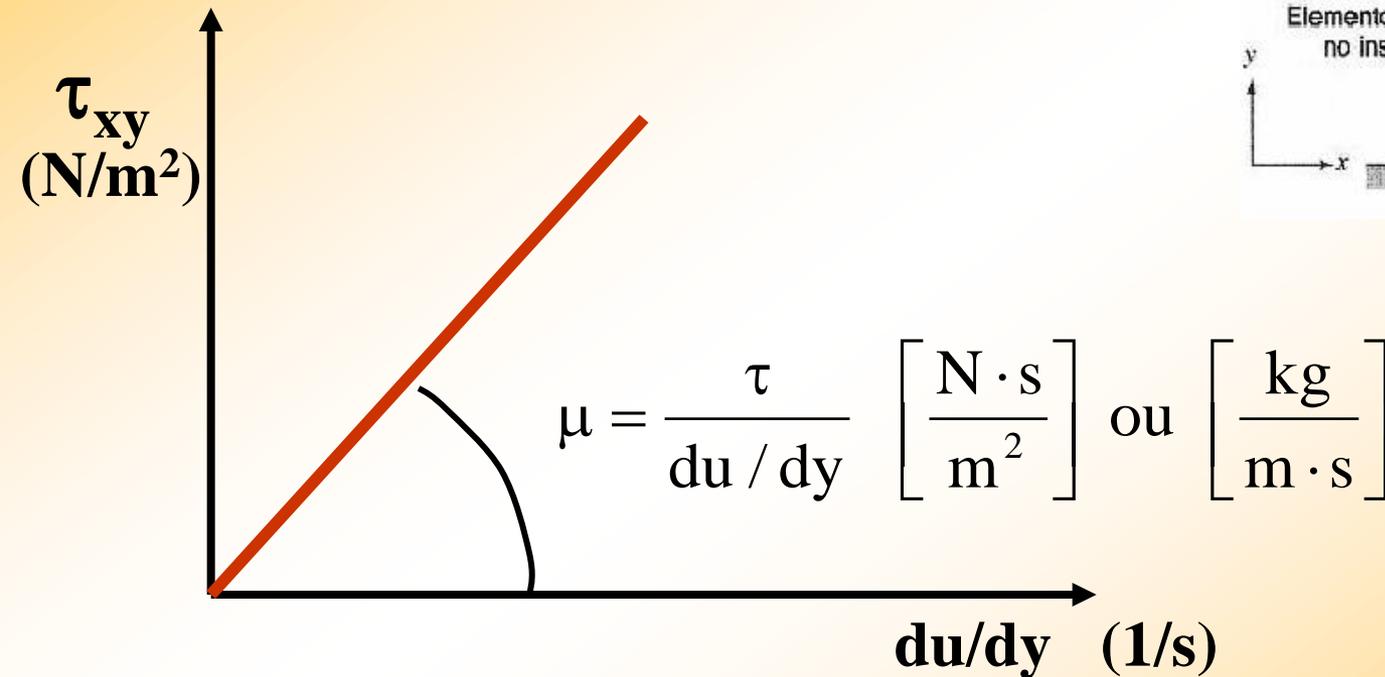
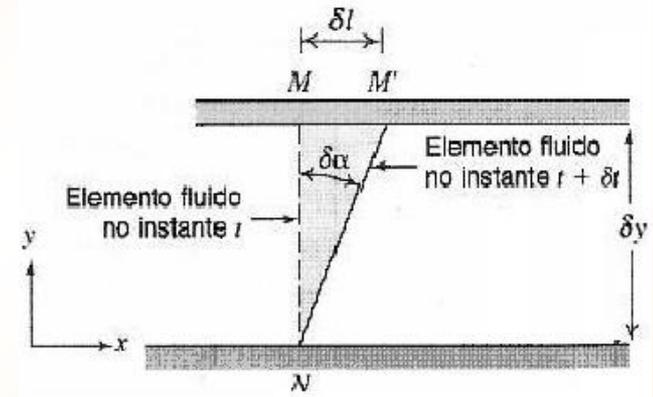
$$\delta\alpha = \frac{du\delta t}{\delta y} \rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \frac{du}{dy}$$

$$\tau = \mu \frac{d\alpha}{dt} \equiv \mu \frac{du}{dy}$$

viscosidade (N.s/m²) **Taxa Deformação**

Viscosidade Dinâmica [Pa/s] – EM461

- ✓ Fluidos Newtonianos (água, todos os gases e maioria dos líquidos) são aqueles que apresentam uma **relação linear entre a tensão e a taxa de deformação**.



- A viscosidade μ é uma propriedade do fluido e tem natureza escalar.

Extensão para escoamentos 3D, Fluidos Newtonianos Incompressível

- ✓ Para fluidos Newtonianos com um único estado de deformação foi visto que:

$$\tau = \mu \, du / dy$$

- ✓ Para um fluido com propriedades constantes e incompressível pode-se estender o modelo 1d para um estado de deformação 3D.
- ✓ **O tensor desvio de tensões é simétrico, portanto ele deve ser proporcional ao tensor simétrico \mathbf{S} das deformações linear e angular:**

$$\mathbf{T}_{i,j} = 2\mu\mathbf{S}_{i,j} \quad \rightarrow \quad \mathbf{S}_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Tensor de Tensões, sistema Cartesiano

- ✓ O tensor de tensões é simétrico, possui apenas seis termos distintos.
- ✓ Para coordenadas cartesianas, Fluido Newtoniano e escoamento incompressível suas componentes são:

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{S}$$

<p>Tensão Normal Deformação Linear</p>	<p>Tensão Cisalhante Deformação Angular</p>
$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$ $\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$ $\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$	$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$

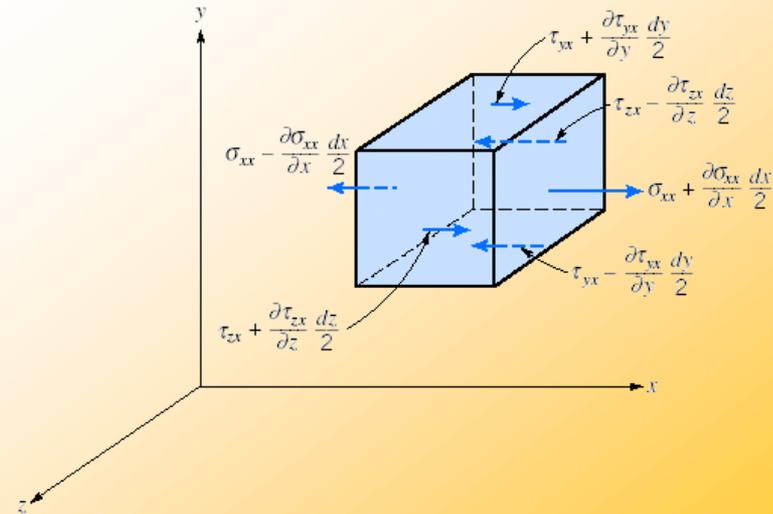


Fig. 5.9 Stresses in the x direction on an element of fluid.

Relação tensão/taxa deformação

Cartesianas

$$\tau_{xx} = +\mu \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} \right] + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\tau_{yy} = +\mu \left[2 \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\tau_{zz} = +\mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = +\mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = +\mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right]$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = +\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right]$$

Cilíndrico-Polar

$$\tau_{rr} = +\mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\tau_{\theta\theta} = +\mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \right] + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\tau_{zz} = +\mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = +\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = +\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right]$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = +\mu \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]$$

Equação Constitutiva para Fluido Newtoniano, forma vetorial

✓ Para fluidos **Newtonianos e compressíveis** o tensor de tensões tem um termo acrescido (*demonstração em [de Eqs constitutivas da Apostila](#)*)

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} - \underbrace{\frac{2\mu}{3} \nabla \cdot \vec{V}}_{T'} \mathbf{I} + 2\mu\mathbf{S} \quad \text{ou} \quad \mathbf{T} = -\left[P + \frac{2\mu}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right] \mathbf{I} + 2\mu\mathbf{S}$$

✓ onde \mathbf{I} é o tensor identidade $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

✓ Neste curso as aplicações da eq. de N-S serão para fluidos incompressíveis ou compressíveis em baixas velocidades tal que o tensor de tensões simplifica para:

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{S}$$

Porque Tensão e Deformação são Linearmente Dependentes?

- ✓ A relação $\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{S}$ é um modelo! Portanto não há razão alguma que na natureza os fluidos devam seguir este modelo.
- ✓ Entretanto, os gases seguem este modelo;
- ✓ Água, óleos em geral e uma grande maioria de líquidos podem ser bem representados por este modelo;
- ✓ Há líquidos que não são representados pela relação linear. Por exemplo: tintas, fluidos biológicos, emulsões em geral.
- ✓ Esta classe de fluidos é denominada por fluidos não-Newtonianos.

A Rotação dos Elementos de Fluido

Vetor Vorticidade, $\omega = \nabla \times \mathbf{V}$

Sistema de coordenadas cartesiano: (x,y,z) , (u,v,w)

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{\mathbf{V}} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}}$$

Sistema de coordenadas cilíndrico-polar: (r,θ,z) , (v,u,w)

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{\mathbf{V}} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_{\theta})}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{k}}$$

A vorticidade possui papel central no estudo de escoamentos com ausência de viscosidade (Euler e Bernoulli, cap. 6).

Escoamentos onde ω é **nulo** são chamados de **escoamentos irrotacionais**.

Relação entre ω e R_{ij}

Comparando as definições de ω e $R_{i,j}$ constata-se que:

$$\vec{\omega} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$$R_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

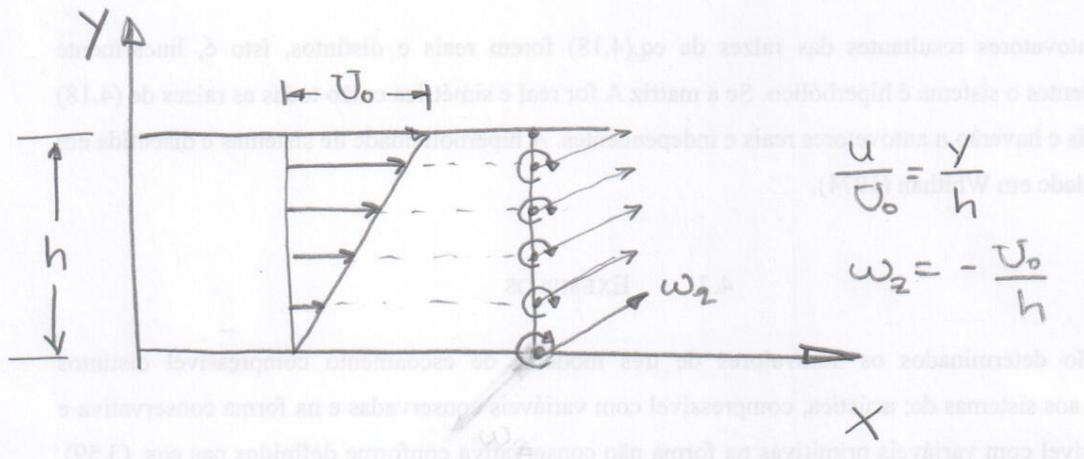
$$R_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \omega_z & +\frac{1}{2} \omega_y \\ +\frac{1}{2} \omega_z & 0 & -\frac{1}{2} \omega_x \\ -\frac{1}{2} \omega_y & +\frac{1}{2} \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

- ✓ A vorticidade ω é duas vezes a taxa de rotação média do elemento de fluido
- ✓ A vorticidade está relacionada com a rotação do elemento de fluido;
- ✓ As parcelas de ω pertencem a um plano ortogonal a ω , por exemplo: ω_z é definido por u , v , x e y num plano ortogonal a ω_z ;
- ✓ O tensor $R_{i,j}$ pode ser definido pelo vetor vorticidade como:

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_k$$

Vorticidade: fenômeno local

Representação de ω_z (escoamento Couette plano xy):



- Campo de velocidade linear no plano (xy);
- Campo de vorticidade vetor constante na direção $z < 0$;

Note que na parede a velocidade é zero (não deslizamento) mas o fluido pode ter rotação na parede!

O fenômeno de rotação não é necessariamente associado a uma característica global do escoamento mas associada ao ponto, ou à coordenada (x,y) .

Vorticidade: fenômeno local

Exemplo: calcule a vorticidade para os campos de velocidade conhecidos por: rotação de corpo rígido e vórtice livre

$$V_r = 0$$

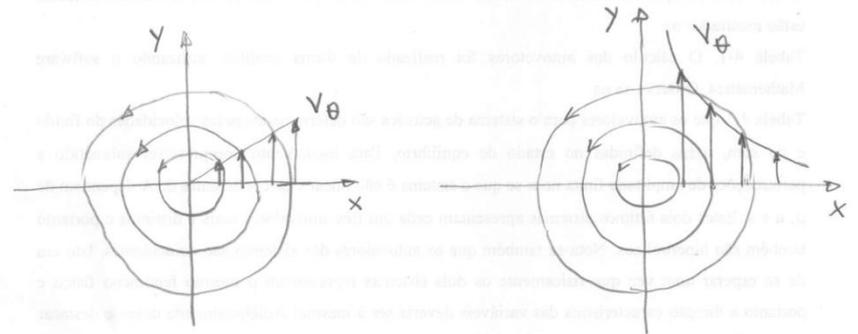
$$V_r = 0$$

$$V_\theta = \Omega r$$

$$V_\theta = k/r$$

Sem componente radial as linhas de corrente só podem ser círculos concêntricos

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(V_r)}{r\partial\theta} \rightarrow \begin{cases} 2\Omega & \text{corpo rígido} \\ 0 & \text{vórtice livre} \end{cases}$$



i. **Movimento corpo rígido:** não há deformação, ângulo vértices preservados, e estado rotação pura;

ii. **Movimento vórtice livre:** não há rotação, ângulo vértices não preservados e estado de deformação angular pura.

IMPORTANTE: vorticidade ou rotação do elemento é um fenômeno local. Linhas de corrente com curvatura não garantem que o fluido tenha rotação!

Circulação e o Teorema de Stokes

- ✓ A circulação Γ numa curva fechada C é definida como sendo o produto escalar do vetor velocidade V no contorno com o elemento de arco ds tangente à curva:

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

- ✓ O teorema de Stokes demonstra que a circulação expressa o produto entre a vorticidade média e a área circunscrita pela curva C .

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} \equiv \oiint_A (\nabla \times \vec{V}) \cdot d\vec{A} \rightarrow \Gamma = \bar{\omega} \cdot A$$

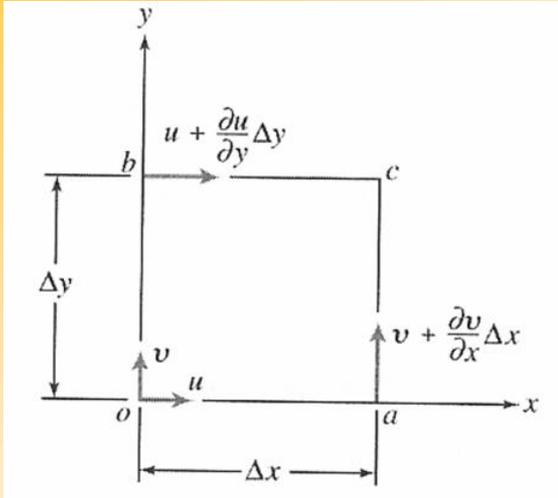
Teorema de Stokes: Demonstração

- ✓ A circulação Γ numa curva fechada C de dimensões dx, dy é:

$$\Delta\Gamma = udx + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right) dy - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \right) dx - vdy$$

- ✓ ou

$$\Delta\Gamma = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$



- ✓ $\Delta\Gamma$ é então o produto da vorticidade pelo elemento de área $dx dy$.
- ✓ A circulação Γ expressa o produto da **vorticidade média** na área A circunscrita pela curva C :

$$\int_A \Delta\Gamma = \int_A \omega_z \Delta x \Delta y \Rightarrow \Gamma = \overline{\omega_z} A$$

EXERCÍCIOS

Vorticidade e Teorema de Stokes

5.65 Um escoamento é representado pelo campo de velocidade $\vec{V} = 10x\hat{i} - 10y\hat{j} + 30\hat{k}$. Determine se o campo é (a) um possível escoamento incompressível e (b) irrotacional.

Dados: vorticidade e equação conservação massa:

$$\vec{\omega} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k}$$

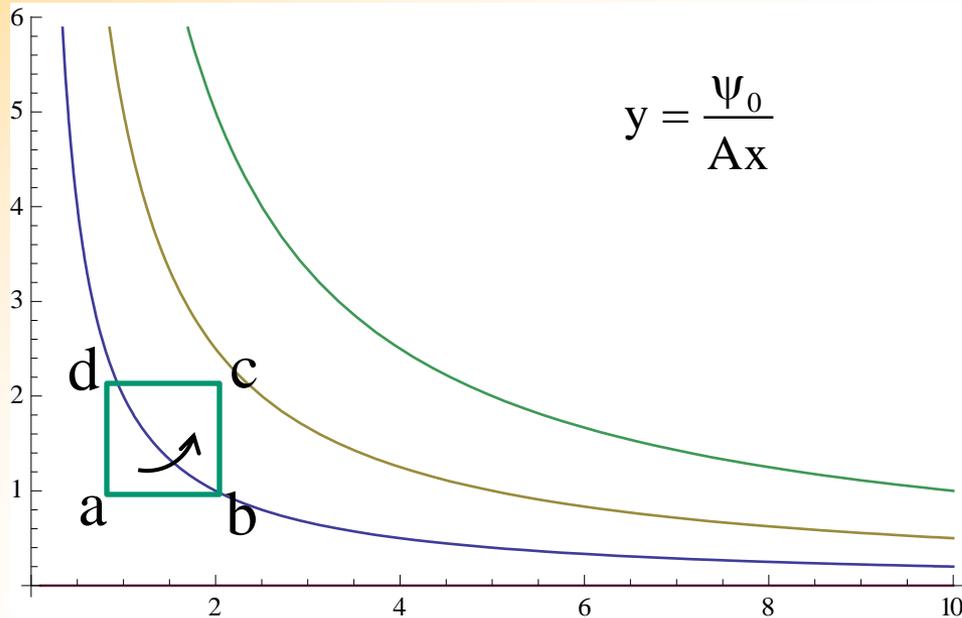
$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Resp.:

(a) Escoamento incompressível

(b) Escoamento irrotacional

5.68 Considere o campo de velocidade para escoamento numa “esquina” retangular, $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$, com $A = 0,3 \text{ s}^{-1}$, como no Problema-Exemplo 5.8. Avalie a circulação no quadrado unitário do Problema-Exemplo 5.8. Avalie também a função corrente e a vorticidade.



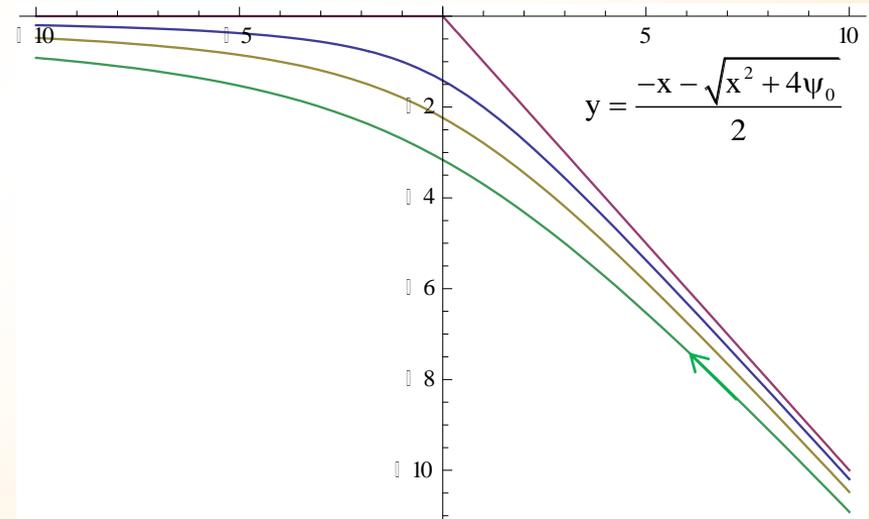
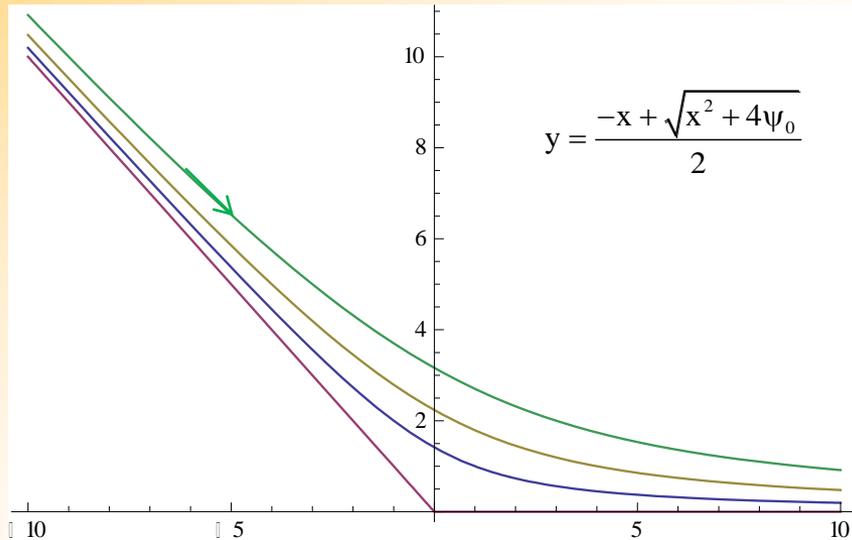
$$\Gamma = \oint \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

Escoamento na vizinhança de um ponto de estagnação 2D

Resp.:

- (a) Circulação $\Gamma = 0$, veja solução no Ap. I
- (b) $\psi = Axy$
- (c) Vorticidade nula!

*5.74 Considere o campo de escoamento representado pela função de corrente $\psi = Axy + Ay^2$, onde $A = 1 \text{ s}^{-1}$. Mostre que essa função representa um possível campo de escoamento incompressível. Avalie a rotação do escoamento. Trace um gráfico contendo algumas linhas de corrente no meio plano superior.



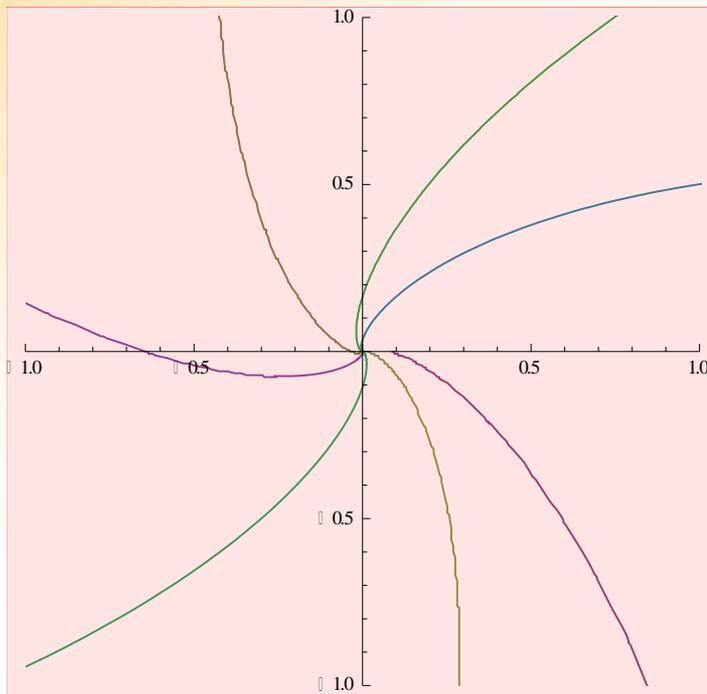
Resp.:

- Escoamento incompressível
- Escoamento rotacional, $\omega = -2$
- Escoamento 2D sobre uma parede com mudança de inclinação

*5.78 O campo de velocidade perto do núcleo de um furacão pode ser aproximado por

$$\vec{V} = -\frac{q}{2\pi r} \hat{e}_r + \frac{K}{2\pi r} \hat{e}_\theta$$

Trata-se de um campo de escoamento irrotacional? Obtenha a função de corrente para este escoamento.



Vorticidade cilindrico-polar

$$\vec{\omega} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \hat{k}$$

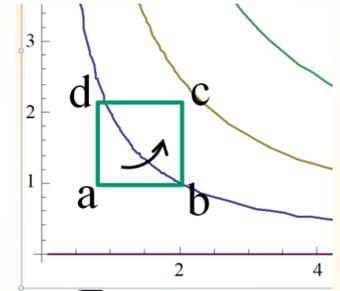
Resp.:

- (a) Escoamento irrotacional
- (b) $\psi = -q\theta/(2\pi) - k \ln r / (2\pi)$

FIM

Apêndice I – Solução Ex. 5.68

Avalie a circulação Γ no circuito a-b-c-d onde 'ds' é o vetor tangente a curva percorrido no sentido anti-horário e V é o vetor velocidade definido nos segmentos a-b, b-c, c-d e d-a.



$$\Gamma = \int_{d \rightarrow a} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{a \rightarrow b} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{b \rightarrow c} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{c \rightarrow d} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

1ª opção de solução -

Substituindo os valores de V e ds :

$$\Gamma = \int_2^1 \underbrace{(-A)}_v y dy + \int_1^2 \underbrace{(+A)}_u x dx + \int_1^2 \underbrace{(-A)}_v y dy + \int_2^1 \underbrace{(+A)}_u x dx$$

Observe os limites de integração $2 \rightarrow 1$ ou $1 \rightarrow 2$ definem o sinal de dy
Agrupando os seguimentos $\{d \rightarrow a$ e $b \rightarrow c\}$ e $\{a \rightarrow b$ e $c \rightarrow d\}$

$$\Gamma = \left\{ \int_2^1 (-A) y dy + \int_1^2 (-A) y dy \right\} + \left\{ \int_1^2 (+A) x dx + \int_2^1 (+A) x dx \right\}$$

Invertendo os limites de integração:

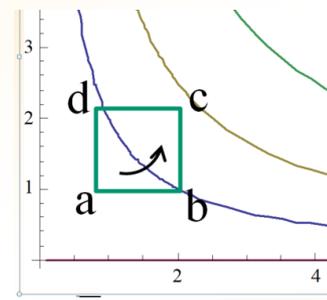
$$\Gamma = + \underbrace{\int_1^2 Ay dy - \int_1^2 Ay dy}_{\equiv 0} + \underbrace{\int_1^2 Axdx - \int_1^2 Axdx}_{\equiv 0} \equiv 0$$

continua →

2ª opção de solução – Usa definição produto escalar.

Observe que:

- d → a componente v e ds estão na mesma direção, logo $v \cdot ds > 0$
- b → c componente v e ds estão sentido contrários, logo $v \cdot ds < 0$
- a → b componente u e ds estão na mesma direção, logo $u \cdot ds > 0$
- c → d componente u e ds estão sentido contrários, logo $u \cdot ds < 0$



A circulação é expressa abaixo pelo módulo $|v \cdot ds|$; o sinal a frente da integral corresponde aos produtos escalares definidos acima

$$\Gamma = + \int_{d \rightarrow a} |\vec{v} \cdot d\vec{s}| + \int_{a \rightarrow b} |\vec{v} \cdot d\vec{s}| - \int_{b \rightarrow c} |\vec{v} \cdot d\vec{s}| - \int_{c \rightarrow d} |\vec{v} \cdot d\vec{s}|$$

Agrupando os seguimentos $\{d \rightarrow a \text{ e } b \rightarrow c\}$ e $\{a \rightarrow b \text{ e } c \rightarrow d\}$

$$\Gamma = \left\{ \int_2^1 |(-A) y dy| + \int_1^2 |(-A) y dy| \right\} + \left\{ \int_1^2 |(+A) x dx| + \int_2^1 |(+A) x dx| \right\}$$

Invertendo os limites de integração:

$$\Gamma = \underbrace{- \int_1^2 |-A y dy| + \int_1^2 |-A y dy|}_{\equiv 0} + \underbrace{\int_1^2 |A x dx| - \int_1^2 |A x dx|}_{\equiv 0} \equiv 0$$

Capítulo 5

Introdução à Análise Diferencial do Movimento do Fluido

**Tópicos desta aula:
Equação de Navier-Stokes;
Exemplos aplicação**

Cap. 5 - Equações de Navier-Stokes

- As **equações de Navier-Stokes** são equações diferenciais parciais que descrevem o escoamento de fluidos cuja solução permite determinar os campos de velocidade e de pressão num escoamento.
- Estas equações foram denominadas após **Claude-Louis Navier (1785-1836)** e **George Gabriel Stokes (1819-1903)** que desenvolverem um conjunto de equações que descreveriam o movimento dos fluidos tais como líquidos e gases.
- Estas equações estabelecem que mudanças no momento e na velocidade de uma partícula fluída resultam das mudanças na pressão e na forças viscosas (similar ao atrito) atuando no fluido.
(*extraído wikipedia português*)

Navier – formulou teoria elasticidade, definiu módulo de elasticidade, engenheiro civil;

Stokes – matemático, por similaridade com sólidos propõe um estado de tensão 3D para fluidos.

Equações de Navier-Stokes

As **equações de Navier Stokes** são, em última análise, uma expressão da 2ª lei de Newton: a variação da quantidade de movimento de uma partícula fluido deve-se a ação das forças externas aqui consideradas como forças de superfícies (pressão e atrito) e forças de campo (força peso).

A sequencia de slides transforma os termos da equação de Quantidade de Movimento, expressa na forma integral (usada em Volumes de Controle) para forma diferencial para chegar na equação Equação de Navier Stokes, N-S.

Equação Quantidade de Movimento

2ª Lei de Newton

$$\frac{d}{dt} \int_{\text{sistema}} \rho \vec{V} dV = \int \mathbf{T} \cdot \vec{n} dA + \int \rho \vec{g} dV$$

(1) (2) (3)

A taxa de variação no tempo da quantidade de movimento seguindo um sistema é igual a somatória das forças de superfície e de campo atuando no sistema.

Os próximos passos são:

- i. Termo (1): Usar o T.T.R e escrever a variação da q. mov em termos do V.C.; expressar a integral de área dos fluxos de q. mov. em integral de volume (Teorema de Gauss);
- ii. Termo (2): Expressar a integral de área da tensão em uma integral de volume (Teorema de Gauss);
- iii. Termo (3): já está na forma de uma integral de volume;

A variação de Q. Movimento (Termo 1)

A variação de Q. Mov. do sistema é expressa em propriedades medidas do Vol. de Controle usando o Teorema de Transporte de Reynolds e a regra de Leibniz (veja procedimento na eq. da massa).

$$\frac{d}{dt} \int_{\text{sistema}} \rho \vec{V} d\forall = \frac{d}{dt} \int_{\text{V.C.}} \rho \vec{V} d\forall + \int_{\text{S.C}} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \mathbf{n}) \cdot dA$$

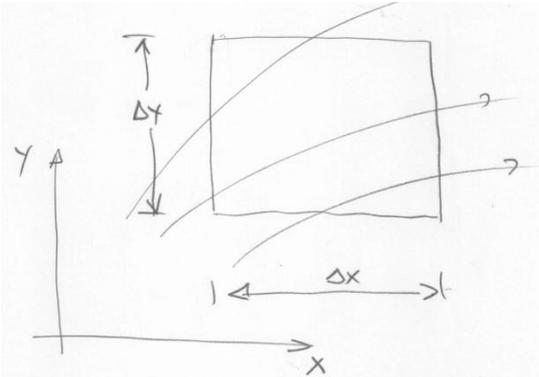
onde V é a velocidade do fluido.

Por simplicidade será considerado: um escoamento no plano (x,y) com componentes de velocidade (u,v)

Representação Fluxos de Quantidade de Movimento (Termo 1)

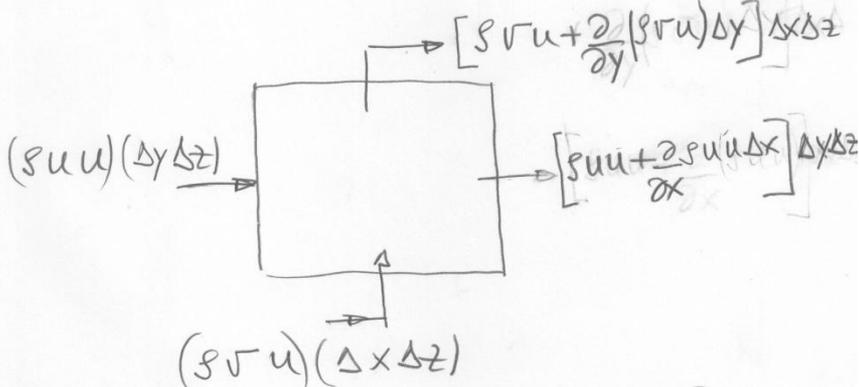
$$\int_{S.C} \vec{V} \cdot \rho \cdot \underbrace{(\vec{V} \cdot \mathbf{n})}_{dm} \cdot dA$$

V.C. e linhas de corrente



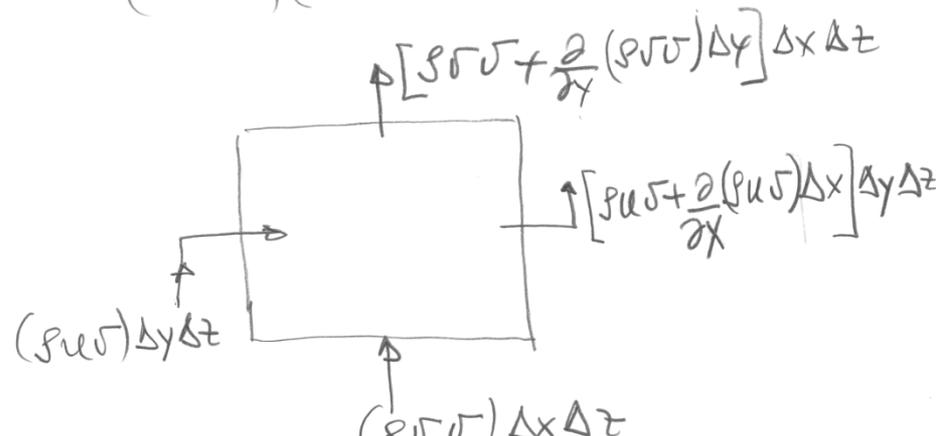
Fluxos Q. Mov direção x

$$\int_{S.C} u \cdot \rho \cdot \underbrace{(\vec{V} \cdot \mathbf{n})}_{dm} \cdot dA$$



Fluxos Q. Mov direção y

$$\int_{S.C} v \cdot \rho \cdot \underbrace{(\vec{V} \cdot \mathbf{n})}_{dm} \cdot dA$$



A variação de Q. Movimento (Termo 1)

A integral de superfície é transformada numa integral vol. T. Gauss:

direção x

$$\int_{\text{s.c.}} \rho u (\vec{V} \cdot \vec{n}) \cdot dA = \int_A \left\{ \left[\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z + \left[\frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} \Delta y \right] \Delta x \Delta z \right\} = \int_{\forall} \left[\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} \right] d\forall$$

direção y

$$\int_{\text{s.c.}} \rho v (\vec{V} \cdot \vec{n}) \cdot dA = \int_A \left\{ \left[\frac{\partial(\rho v u)}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z + \left[\frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} \Delta y \right] \Delta x \Delta z \right\} = \int_{\forall} \left[\frac{\partial(\rho v u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} \right] d\forall$$

A variação de Q. Movimento (Termo 1)

Abrindo os termos das derivadas

direção x

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} &\equiv \frac{\partial(\rho)(u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)(u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)(u)}{\partial y} \equiv \\ &\left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right)}_{\text{Eq. massa} = 0} = \rho \frac{Du}{Dt} \end{aligned}$$

direção y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} &\equiv \frac{\partial(\rho)(v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)(v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)(v)}{\partial y} \equiv \\ &\left(\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right)}_{\text{Eq. massa} = 0} = \rho \frac{Dv}{Dt} \end{aligned}$$

Retornando ao
termo de Q. Mov:

$$\frac{d}{dt} \int_{\text{sistema}} \rho \vec{V} dV = \int_{\text{V.C.}} \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} dV$$

A taxa de Q. Mov do sistema é igual a integral do produto da massa com a aceleração seguindo as partículas dentro do V. C.

Forças de Superfície agindo numa partícula de fluido (Termo 2)

- ✓ As forças de superfície são a pressão (isotrópica age somente normal as faces) e as tensões de origem viscosa devido a deformação do fluido (o tensor desvio de tensões):

$$\mathbf{T}_{i,j} = -P\delta_{i,j} + \tau_{i,j}$$

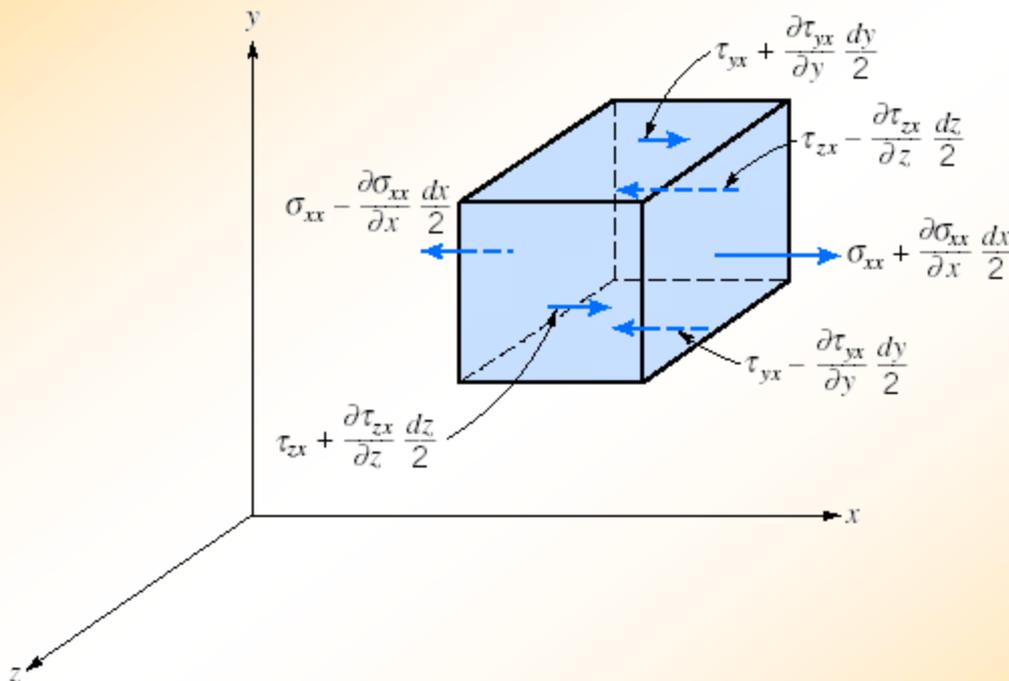
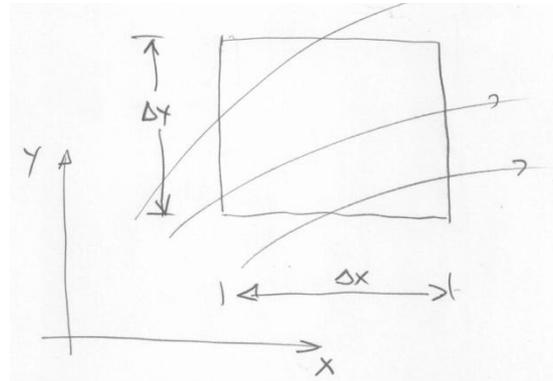


Fig. 5.9 Stresses in the x direction on an element of fluid.

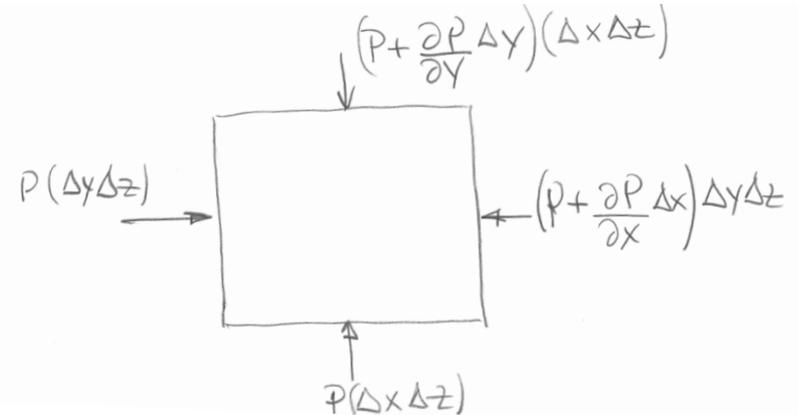
Representação Tensões (Termo 2)

$$\int \mathbf{T} \cdot \vec{n} dA = -\int \mathbf{P} \cdot \vec{n} dA + \int \mathbf{T}' \cdot \vec{n} dA$$

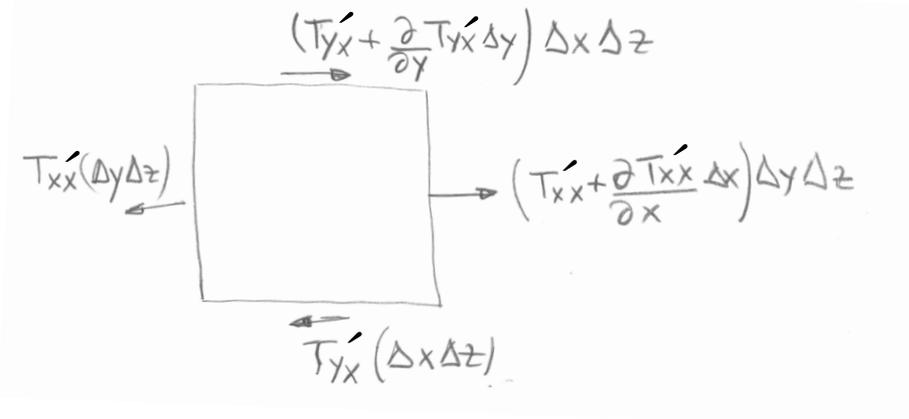
V.C. e linhas de corrente



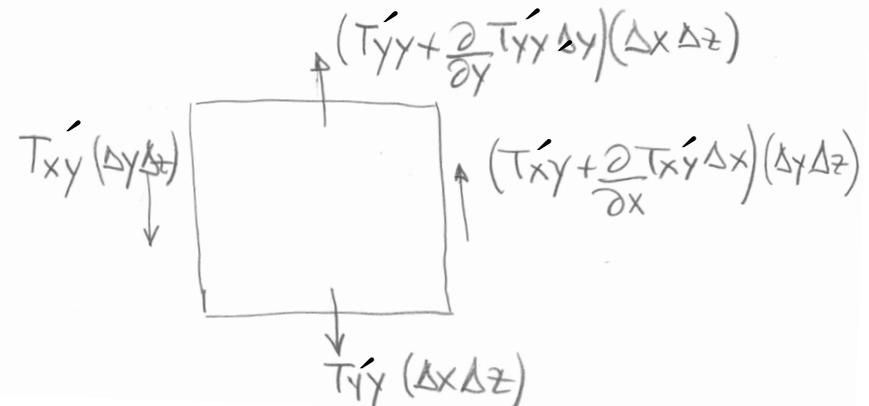
Pressão direções x e y



Tensão viscosa direção x



Tensão viscosa direção y



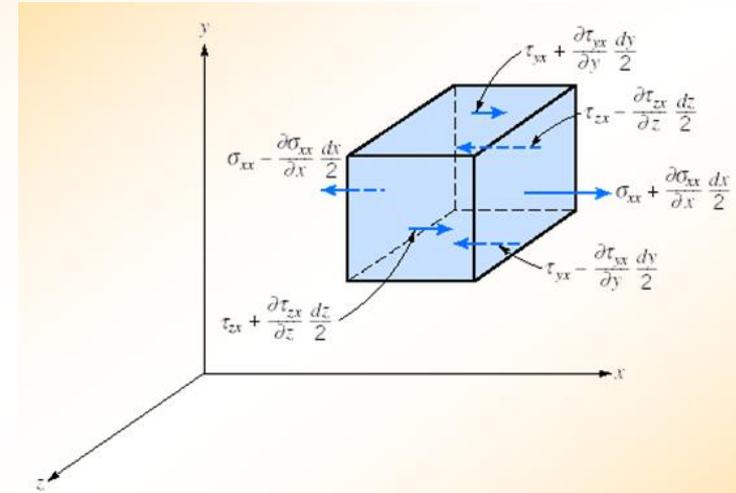
Forças de Superfície: T. GAUSS (Termo 2)

✓ As forças de superfície são:

$$\int_S \mathbf{T} \cdot \vec{n} dA = - \int_S P \cdot \vec{n} dA + \int_S \boldsymbol{\tau} \cdot \vec{n} dA$$

✓ A aplicação do Teorema de Gauss:

$$\int_S \mathbf{T} \cdot \vec{n} dA = \int_V \begin{bmatrix} -\frac{\partial P}{\partial x} \hat{i} \\ -\frac{\partial P}{\partial y} \hat{j} \end{bmatrix} dV + \int_V \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \hat{i} \\ \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \hat{j} \end{bmatrix} dV$$



✓ Na forma de operadores diferenciais estes termos são representados por:

$$\int_S \mathbf{T} \cdot \vec{n} dA = - \int_V \nabla P \cdot dV + \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot dV$$

Montando Q. Mov por integrais de volume

✓ A 2ª lei de Newton,
$$\frac{d}{dt} \int_{\text{sistema}} \rho \vec{V} dV = \int \mathbf{T} \cdot \vec{n} dA + \int \rho \vec{g} dV$$

✓ A 2ª lei de Newton, após aplicação do **T.T. R.** e **T. Gauss** passa a ser:
$$\int \left[\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} + \nabla P - \nabla \cdot \tau - \rho \vec{g} \right] dV = 0$$

✓ Para que a equação integral seja sempre satisfeita é necessário que o seu integrando seja nulo, ou seja:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \tau + \rho \vec{g}$$

✓ A equação acima é a 2ª lei de Newton para um balanço de forças num elemento de fluido (material que se deforma continuamente).

Eq. da quantidade de movimento do fluido ou 2ª lei de Newton em termos da tensão 3D

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \tau + \rho \vec{g}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right] + \rho g_x \\ \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right] + \rho g_y \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right] + \rho g_z \end{aligned}$$

- ✓ A equação acima descreve com precisão o balanço de forças para um fluido compressível entretanto ela é **inútil**.
- ✓ É necessário definir uma dependência de τ com o campo de velocidades para que se possa tentar resolvê-la.
- ✓ Surge a necessidade de definir uma **equação constitutiva** para o fluido que irá relacionar τ com o campo de velocidades!

Eq. constitutiva fluido Newtoniano e Incompressível

✓ Para um fluido incompressível ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$) Newtoniano (tensão linearmente proporcional a taxa de deformação) o tensor de tensões do fluido é dado por uma componente da pressão hidrostática e outra linearmente proporcional a taxa de deformação:

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{S}$$

$$-P\mathbf{I} = -\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \text{ e } \tau = 2\mu\mathbf{S} \rightarrow \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

✓ Devido a escolha da equação constitutiva, a Eq. Q. Movimento está restrita para escoamentos incompressível.

Aplicação eq. constitutiva em $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ e $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$

- ✓ O $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ é um vetor, por simplicidade vamos considerar sua componente x

$$\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)$$

se μ for constante

$$= \mu \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

$$= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \underbrace{\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{\nabla \cdot \mathbf{V} = 0}$$

$$\int_s \mathbf{T} \cdot \vec{n} dA = \int_v \begin{bmatrix} -\frac{\partial P}{\partial x} \hat{i} \\ -\frac{\partial P}{\partial y} \hat{j} \end{bmatrix} dV + \int_v \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \hat{i} \\ \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \hat{j} \end{bmatrix} dV$$

- ✓ As componentes de $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ em termos da velocidade passam a ser:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \nabla^2 \vec{V}$$

Equação de Navier-Stokes 3D

A eq. Q. Movimento p/ um fluido **incompressível** c/ **viscosidade constante** é a ‘versão’ mais simples da equação de N-S e será a usada neste curso.

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho \vec{g} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right] \text{ ou } \left[\frac{\text{kg}}{\text{s.m}^2} \right]$$

✓ Por se tratar de Q. Mov. ela possui 3 componentes, uma para cada direção:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Equações da Massa, Quantidade de Movimento e Navier-Stokes

Para solução dos campos de pressão e de velocidades num escoamento isotérmico e incompressível é necessário a **solução simultânea da equação da massa e da Eq. N-S.**

O Apêndice I mostra, na forma de tabelas, as equações em coordenadas cartesianas e cilíndrico-polar:

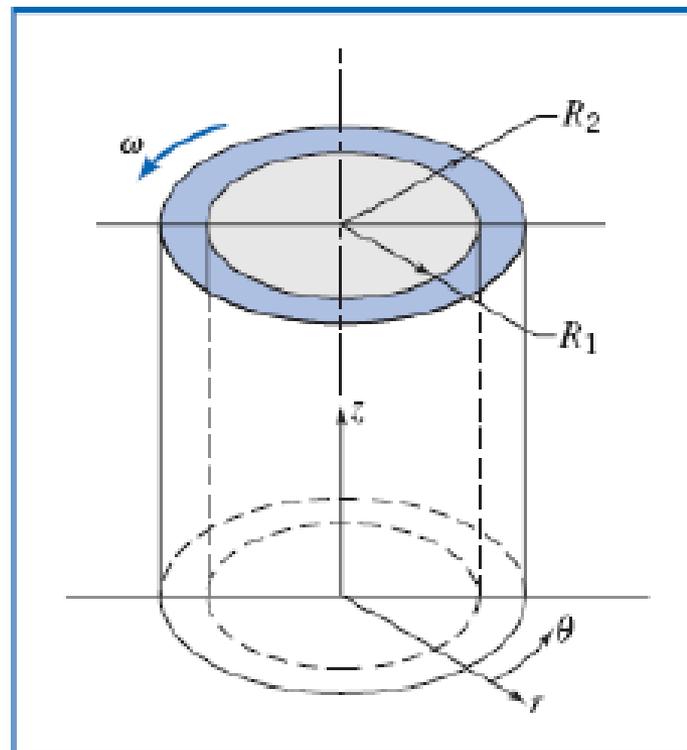
1. Eq. Massa
2. Relações Tensão x Deformação
3. Eq. Quantidade de Movimento em termos de τ
4. Eq. Navier-Stokes

Elas foram extraídas do livro ‘Fenômenos de Transporte’ Bird, Stewart and Lightfoot LTC (2002).

Dados: Escoamento viscométrico laminar de um líquido no espaço anular entre dois cilindros verticais concêntricos. O cilindro interno é estacionário e o externo gira com velocidade constante.

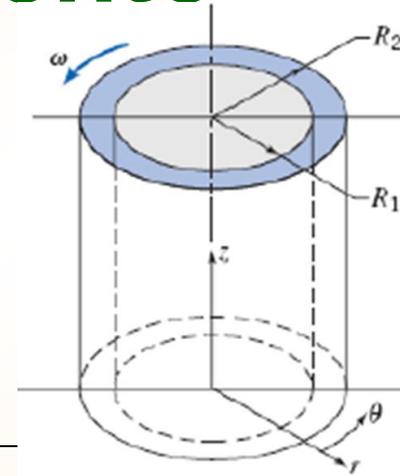
Determinar:

- As equações da continuidade e de Navier-Stokes simplificadas para modelar este campo de escoamento.
- O perfil de velocidades na folga anular.
- A distribuição de tensões de cisalhamento na folga anular.
- A tensão de cisalhamento na superfície do cilindro interno.
- Comparação com uma aproximação “planar” para tensão de cisalhamento constante na folga estreita entre os cilindros.
- A razão entre os raios dos cilindros para a qual a aproximação planar prediz a tensão de cisalhamento com incerteza máxima de 1% em relação ao valor correto.



Hipóteses para o escoamento

1. Escoamento incompressível e ρ e μ constantes;
2. Regime permanente, vel. do cilindro externo é constante.
3. Linhas de **corrente concêntricas**, $v_\theta = f(r)$
4. Velocidade radial, $v_r = 0$
5. Escoamento axi-simétrico; $\partial v_\theta / \partial \theta = 0$;
6. Não há escoamento direção axial, $v_z = 0$ ou $\partial v_z / \partial z = 0$;



Aplicando as hipóteses, as eqs. da massa e de N-S reduzem para;

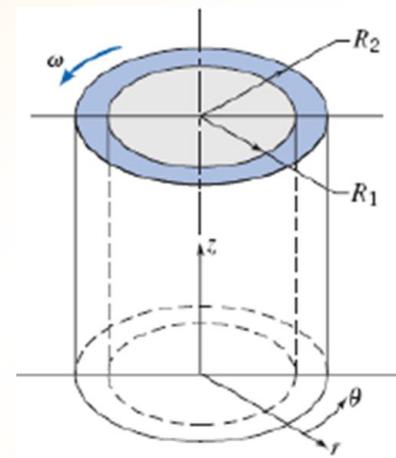
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g_r$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Solução



Aplicando as hipóteses, a eq. N-S reduz para:

Eq. Massa → é sempre satisfeita se $v_\theta = f(r)$ e $v_r = v_z = 0$

Eq. Q.Mov (r) → $\rho \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial P}{\partial r}$ P radial é dada pela F. Centrífuga

Eq. Q.Mov (θ) → $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) = 0$ como v_θ depende de 'r'

Eq. Q.Mov (z) → $-\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} = 0$ em z, P. é hidrostática!

Cálculo do perfil de v_θ :

$$\text{C.C. } \begin{cases} r = R_2 \Rightarrow v_\theta(R_2) = \omega \cdot R_2 \\ r = R_1 \Rightarrow v_\theta(R_1) = \omega \cdot R_1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) = 0 \longrightarrow v_\theta(r) = C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} C_1 = +2\omega / \left[1 - (R_1/R_2)^2 \right] \\ C_2 = -\omega R_1^2 / \left[1 - (R_1/R_2)^2 \right] \end{cases}$$

Cálculo do perfil de v_θ (aproximação planar, EM461)

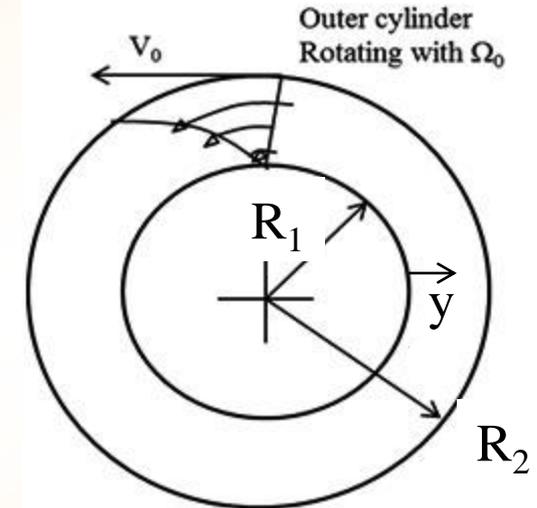
$$v_\theta(r) = (\omega \cdot R_2) \frac{y}{\Delta R}; \quad \begin{cases} R_1 \leq y \leq R_2 \\ \Delta R = (R_2 - R_1) \text{ e } R_1 \end{cases}$$

Solução

v_θ forma adimensional :

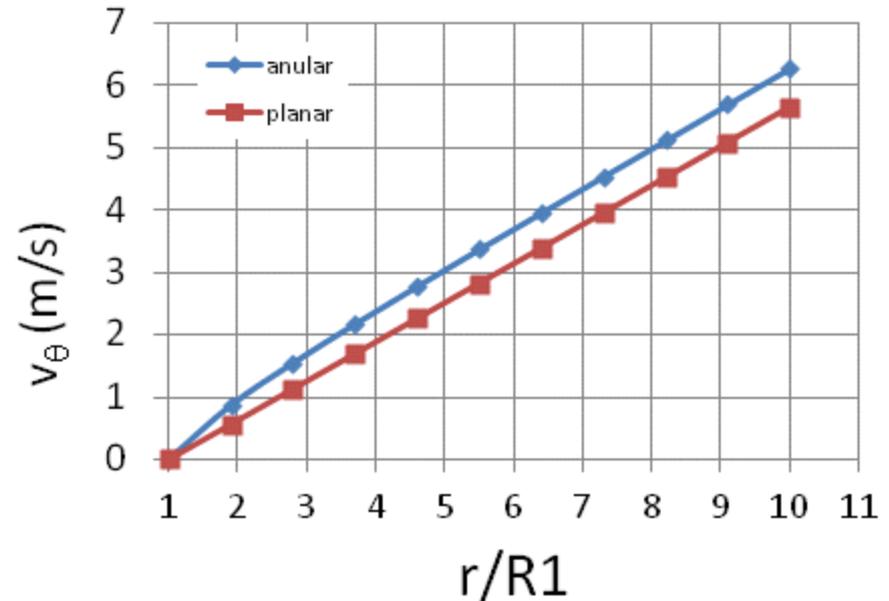
$$\text{anular} \Rightarrow \frac{v_\theta(r)}{\omega R_1} = \frac{r/R_1 - \frac{1}{r/R_1}}{1 - (R_1/R_2)^2}$$

$$\text{planar} \Rightarrow \frac{v_\theta(r)}{\omega R_1} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \left(\frac{y}{\Delta R} \right); 0 \leq y \leq \Delta R$$



Exemplo numérico

ρ	1000	kg/m ³
ν	1,00E-06	m ² /s
R_1	0,1	m
R_2	1	m
Ω	6,28	rad/s
RPM	60	---
ΔR	0,9	m



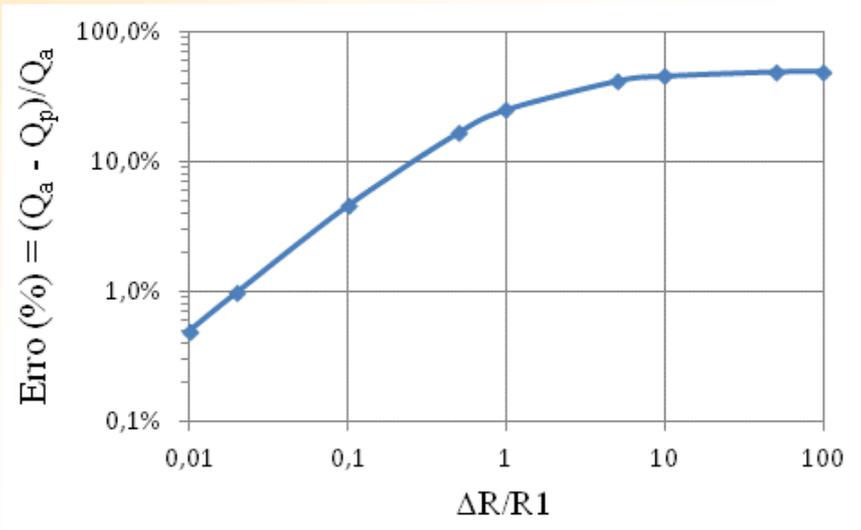
Comparação Q anular x planar

✓ Cálculo da vazão volumétrica é dado por:

$$Q = \int_{R_1}^{R_2} v_{\theta}(r) dr \Rightarrow \begin{cases} \text{anular} \rightarrow Q = \frac{\omega \cdot R_1^2}{2} \left[2\varepsilon^2 \cdot \frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon(2+\varepsilon)} \right] \\ \text{planar} \rightarrow Q = \frac{\omega \cdot R_1^2}{2} [\varepsilon(1+\varepsilon)] \end{cases} \quad \text{onde } \varepsilon = \frac{\Delta R}{R_1}$$

✓ O erro relativo é definido por:

$$\text{Erro}(\%) = \frac{Q_{\text{anular}} - Q_{\text{planar}}}{Q_{\text{anular}}} = 2 \cdot \frac{(1+\varepsilon)}{(2+\varepsilon)}$$



- i. O erro relativo diminui a medida que $\Delta R/R_1$ aproxima-se de zero!
- ii. Ou seja, a aproximação planar é boa quando $\Delta R \ll R_1$.
- iii. A medida que $\Delta R/R_1$ cresce, o erro aproxima-se assintoticamente de 50% .

Pergunta:

- ✓ **Afirmção:** a solução adimensional é a mesma para (R_1, R_2) de $(0,01; 0,02)$ m e para $(1;2)$ m.

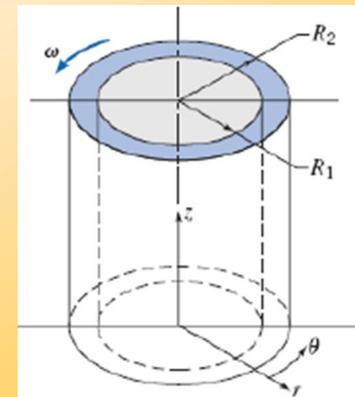
$$\text{anular} \Rightarrow \frac{v_\theta(r)}{\omega R_1} = \frac{r/R_1 - \frac{1}{r/R_1}}{1 - (R_1/R_2)^2}$$

$$\text{planar} \Rightarrow \frac{v_\theta(r)}{\omega R_1} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \left(\frac{y}{\Delta R} \right)$$

- ✓ Porém, o perfil de velocidades acima é fisicamente correto somente para o 1º par, **porque?**

Dica: vamos lembrar as premissas consideradas para chegar na solução de v_θ .

1. Escoamento incompressível e ρ e μ constantes;
2. Regime permanente, vel. do cilindro externo é constante.
3. Linhas de **corrente concêntricas**, $v_\theta = f(r)$
4. Velocidade radial, $v_r = 0$
5. Escoamento axi-simétrico; $\partial v_\theta / \partial \theta = 0$;
6. Não há escoamento direção axial, $v_z = 0$ ou $\partial v_z / \partial z = 0$;



Resposta

Os termos advectivos são não-lineares e capazes de amplificar pequenas perturbações no escoamento. Isto cria instabilidades no escoamento.

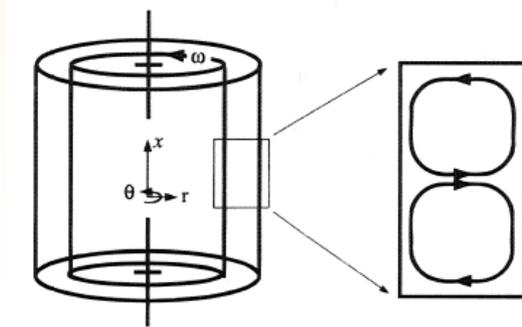
$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

✓ Para este tipo de escoamento o início das instabilidades ocorre para $Ta > 1700$ sendo que $Ta = \Omega^2 R_1 (R_2 - R_1)^3 / \nu^2$.

✓ As instabilidades introduzem dependência do tempo e criam um campo de velocidades tri-dimensional. Este fenômeno é conhecido como instabilidade de Taylor-Couette.



[veja filme you tube](#)

1° - 0',10''

2° - 0',29''

3° - 0',46''

✓ O aumento da velocidade irá conduzir eventualmente a um regime completamente turbulento. Este exemplo ilustra o quão desafiador e ao mesmo tempo bonito o estudo nesta área!

Comentários I

- ✓ No exemplo dado, o par para (R_1, R_2) de $(0,01; 0,02)m$ resulta em $Ta = 628$ enquanto que para $(1;2)m$ resulta em $Ta = 6283185$.
- ✓ Para o primeiro par a solução analítica bate coincide com o resultado físico.
- ✓ Porém, a solução analítica do 2º par diverge perfil de velocidades real porque as **hipóteses utilizadas estão incorretas!**

- ✓ O surgimento de instabilidades, ou mesmo turbulência, faz com que o escoamento passe a ser transiente e tri-dimensional! Não há solução analítica para este tipo de escoamento, somente através de métodos numéricos e modelagem.

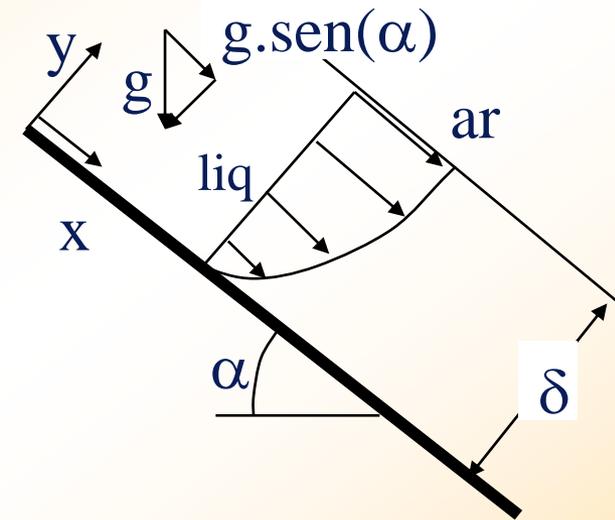
- ✓ **A Eq. de N-S está correta!** Ela aplica para regime laminar e turbulento. Porém devido ao caráter transiente e tridimensional da turbulência não é possível obter solução analítica para N-S.
- ✓ O regime laminar oferece mais oportunidades de simplificar as equação de N-S e obter uma solução analítica.

Escoamento Livre num Plano Inclinado



Hipóteses para o escoamento

1. Regime permanente, $\partial/\partial t = 0$.
2. Escoamento desenvolvido; vel. não varia na direção x, $\partial v_x/\partial x = 0$;
3. Não direção z, $v_z = 0$ e $\partial/\partial z = 0$;
4. ρ e μ constantes; incompressível;



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

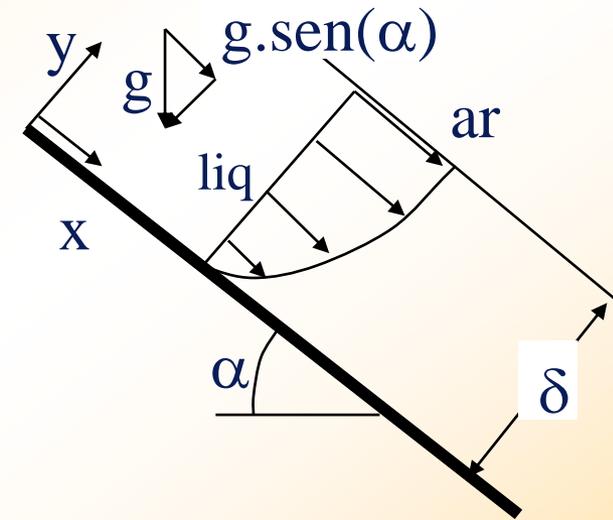
Hipóteses para o escoamento

Aplicando as hipóteses, as eqs. da massa e de N-S reduzem para;

$$\text{Eq. Massa} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\text{Eq. Q.Mov (x)} \rightarrow \rho \cdot g \cdot \text{sen}(\theta) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{Eq. Q.Mov (y)} \rightarrow -\rho \cdot g \cdot \text{cos}(\theta) - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

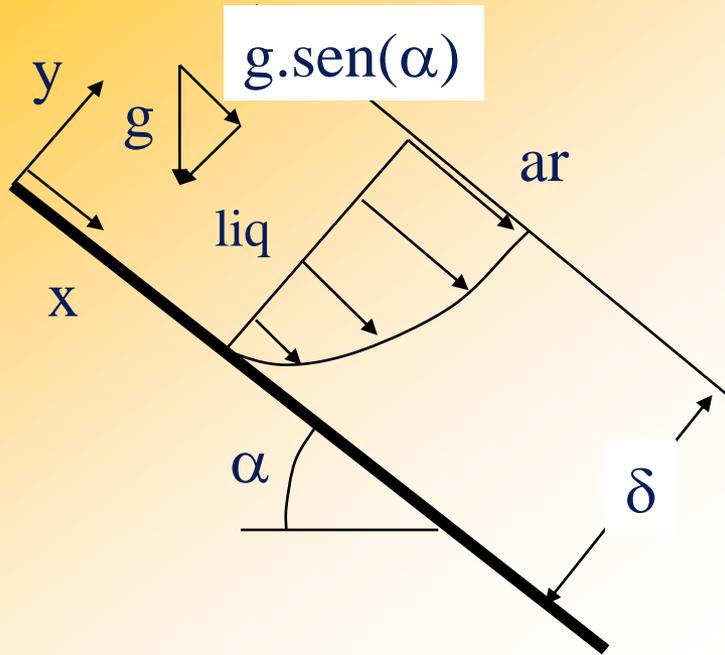


Veja no apêndice II uma dedução da Eq. Q. Mov (x) partindo de um V.C. infinitesimal.

- ✓ Da eq. da massa sai que $v = 0$ em todo o domínio;
- ✓ Da eq. Q. Mov. y sai o gradiente de pressão na direção y;
- ✓ O perfil de velocidades sai da solução da equação Q. Mov. na direção x

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = -\rho \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha)$$

Condições de Contorno



Condições de contorno:

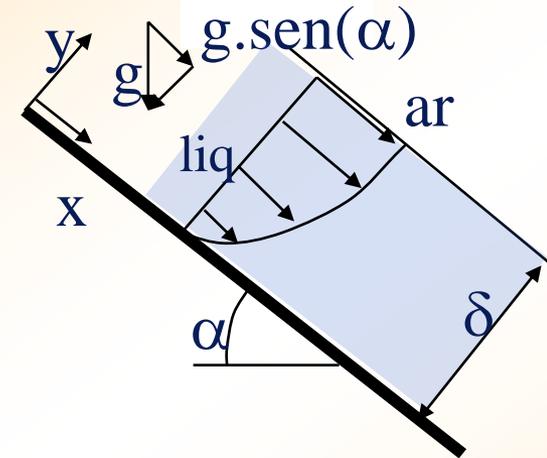
1. $u(y = 0) = 0$ não deslizamento;
2. Na interface líquido/ar há uma igualdade de tensões:

$$\mu_L \left. \frac{du}{dy} \right|_L \equiv \mu_A \left. \frac{du}{dy} \right|_A$$

Como $\mu_A \ll \mu_L$, então podemos aproximar para o lado do líquido, na interface ($y = \delta$) que $du/dy = 0$ (2ª c.c.)

$$\frac{[du/dy]_L}{[du/dy]_A} = \frac{\mu_A}{\mu_L} \cong 0.02 \Rightarrow [du/dy]_L \cong 0$$

Filme de Líquido num Plano Inclinado



1. Perfil de velocidades

$$u(y) = -\frac{\rho g \text{sen}(\alpha)}{2\mu} \delta^2 \left[\left(\frac{y}{\delta} \right)^2 - 2 \left(\frac{y}{\delta} \right) \right];$$

2. Velocidade máxima

$$y = \delta \rightarrow u_{\text{max}} = \frac{\rho g \text{sen}(\alpha)}{2\mu} \delta^2;$$

3. Velocidade média

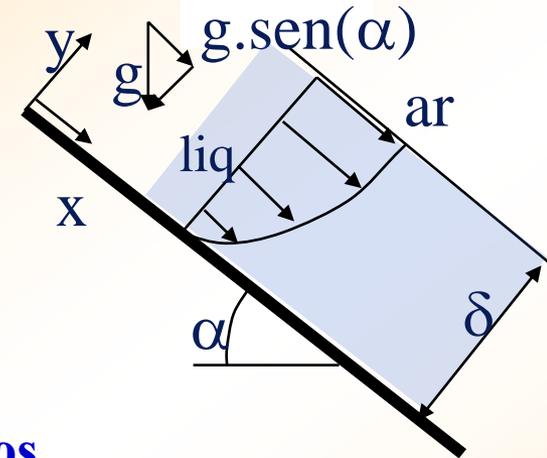
$$\bar{u} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} u(y) dy = \frac{\rho g \text{sen}(\alpha)}{3\mu} \delta^2 \rightarrow u_{\text{max}} = \frac{3}{2} \bar{u}$$

4. Vazão por unidade de largura (m³/s/m)

$$Q = \bar{u} \cdot \delta = \frac{\rho g \text{sen}(\alpha)}{3\mu} \delta^3$$

$$\text{Regime Turbulento } \text{Re} = \frac{\bar{u} \delta}{\nu} > 400$$

Estimativa vazão volumétrica num plano inclinado



Dados

Inclinação: $\alpha = 0,1$ grau ($0,0017453$ rad) ou queda de $1,74$ cm para cada 10 metros!

Largura canal: $0,5$ m

Altura do filme : $\delta = 1$ mm ($0,001$ m)

Densidade: $\rho = 1000$ kg/m³

Viscosidade: $\mu = 0,001$ N.s/m²

Resultados

Velocidade média: $U = 0,326$ m/s

Vazão: $Q = 9,8$ Litros/min

Re: 326 (laminar) e $Re < 400$

Nota: *Escoamento nos aquedutos Romanos ocorrem em regime turbulento. A transição laminar/turbulento ocorre para Re maiores que $Re = 400$.*

FIM

Apêndice I

Equação da massa, da quantidade de movimento e equações constitutivas no sistema cartesiano e cilíndrico polar na forma de tabelas

Informações adicionais acesse o link:

<http://www.fem.unicamp.br/~im250/SITE%20IM250/AULAS/Aula-5%20&%206-EQ.%20DIFERENCIAL/Tabela%20Eq%20NS.pdf>

Equação da Massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Coordenadas Cartesianas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

Coordenadas Cilíndrico-Polar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

Eq. Q. Movimento

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \tau + \rho \vec{g}$$

Coordenadas Cartesianas

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right] + \rho g_x$$
$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right] + \rho g_y$$
$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right] + \rho g_z$$

Coordenadas Cilíndrico-Polar

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zr} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right] + \rho g_r$$
$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{z\theta} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right] + \rho g_\theta$$
$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right] + \rho g_z$$

Relação tensão/taxa deformação

Cartesianas

$$\tau_{xx} = +\mu \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} \right] + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\tau_{yy} = +\mu \left[2 \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\tau_{zz} = +\mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = +\mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = +\mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right]$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = +\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right]$$

Cilíndrico-Polar

$$\tau_{rr} = +\mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\tau_{\theta\theta} = +\mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \right] + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\tau_{zz} = +\mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = +\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = +\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right]$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = +\mu \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]$$

Eq. N-S, fluido Newtoniano e ρ e μ constantes, (versão usada no curso)

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho \vec{g}$$

Coordenadas Cartesianas

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Coordenadas Cilíndrico-Polar

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g_r$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Apêndice II

Pode-se chegar a forma da equação diferencial da quantidade de movimento na direção x,

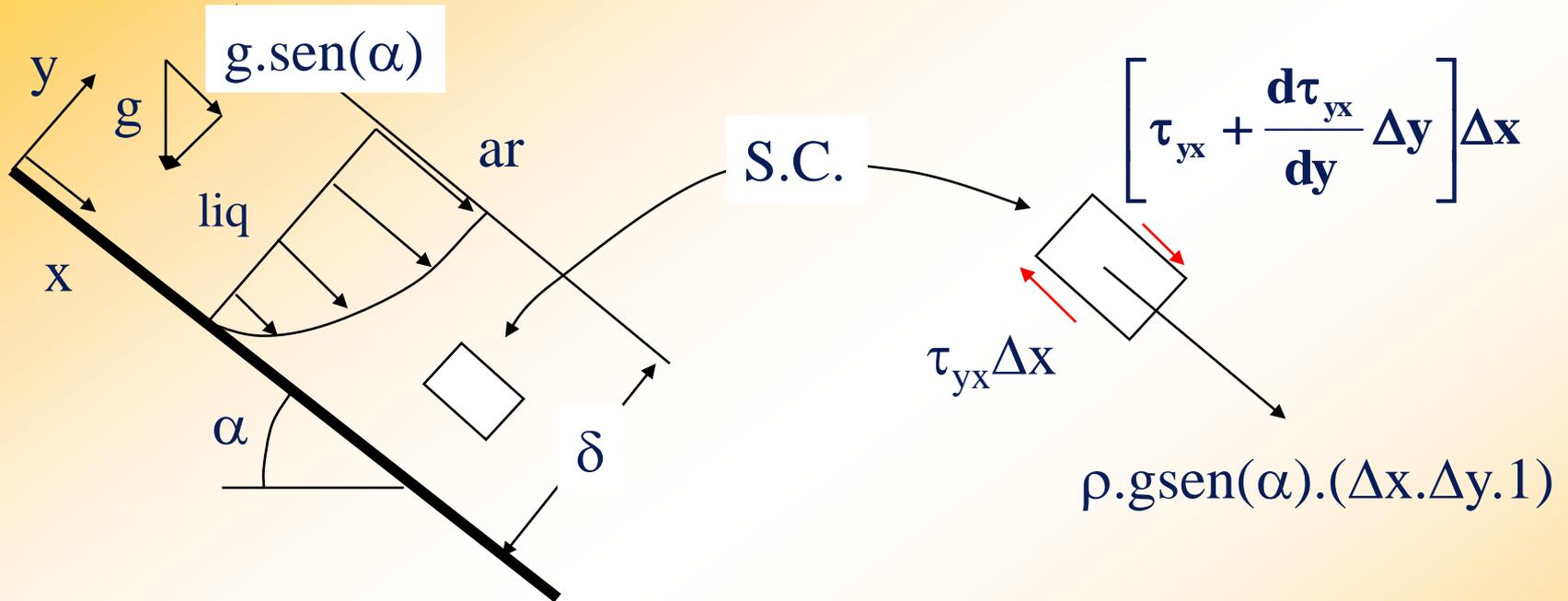
$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = -\rho \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha)$$

partindo de um balanço de forças de um V.C. infinitesimal .

É instrutivo ao aluno checar estes passos pois dará segurança no uso das equações de N-S. Os próximos slides mostram a dedução

.

Balanço Integral de Forças num V.C. : para filme de líquido escoando num plano inclinado



- ✓ Em termos do balanço de forças no volume de controle infinitesimal também se chega a:

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} + \rho g \text{Sen} \alpha = 0$$

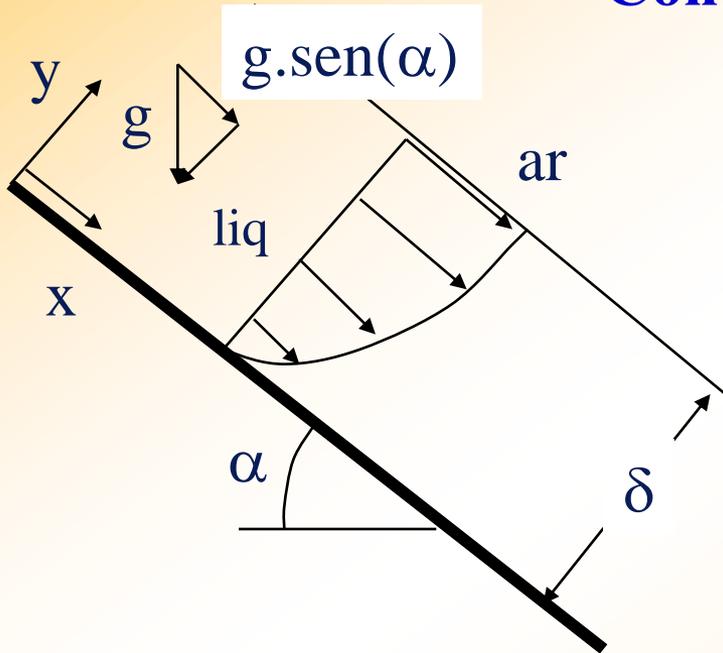
- ✓ A força peso é equilibrada pela resistência causada pela tensão de cisalhamento.

Filme de Líquido

✓ Substituindo a tensão pela equação constitutiva em termos da velocidade, chegamos a E.D.O. do balanço de q. movimento para o filme de líquido inclinado:

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} + \rho g \text{Sen}\alpha = 0 \rightarrow \mu \frac{d^2u}{dy^2} = -\rho g \text{sen}(\alpha)$$

Condições de contorno:



1. $u(y=0) = 0$ não deslizamento
2. $du/dy(y=d) = 0$ na interface líquido/ar a tensão de cisalhamento com o ar é muito pequena daí que $du/dy = 0$. Note que na interface:

$$\mu_L \left. \frac{du}{dy} \right|_L \equiv \mu_A \left. \frac{du}{dy} \right|_A \Rightarrow \frac{[du/dy]_L}{[du/dy]_A} = \frac{\mu_A}{\mu_L} \cong 0.02 \Rightarrow [du/dy]_L \cong 0$$