

Aula 14

**Escoamento potencial (irrotacional):
regime permanente,
e incompressível**

Definição de Fluido Ideal

Um fluido ideal é **incompressível** e **irrotacional**. Apesar que escoamentos reais não são irrotacionais, há situações que em uma região do escoamento a viscosidade, e os efeitos de compressibilidade são desprezíveis. Nesta região pode-se aplicar a teoria do fluido ideal para uma estimativa das características do escoamento.

Por exemplo, a teoria do fluido ideal se aplica no escoamento externo à camada limite. Neste caso os efeitos viscosos (escoamento rotacional) ficam presentes somente na camada limite.

O assunto desta aula será o escoamento de um fluido ideal.

Potencial ϕ de Velocidades

✓ O fato do escoamento ser irrotacional permite que ele seja expresso por meio de uma função escalar ϕ tal que o gradiente de ϕ é gera o campo de velocidades: $\vec{V} = \nabla\phi$

✓ O sentido positivo de \mathbf{V} ocorre para valores de ϕ crescentes, i.e., se ϕ cresce $v > 0$.

$$\vec{V} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \vec{i}; \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} \vec{j} \quad (\text{cartesiano})$$

$$\vec{V} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \vec{r}; \quad \frac{\partial\phi}{r\partial\theta} \vec{\theta} \quad (\text{polar})$$

✓ Para conservar a **massa** é necessário que o Laplaciano $\phi = 0$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla^2\phi \equiv 0$$

✓ Se \mathbf{V} vem de uma função potencial ϕ então $\vec{\omega} \equiv \mathbf{0}$

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = \nabla \times (\nabla\phi) \equiv 0$$

Escoamento incompressível, fluido Newtoniano com μ constante

- ✓ A equação de transporte de quantidade de movimento:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\vec{V} \vec{V}) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho \vec{g}$$

- ✓ Aplicando as identidades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \nabla \cdot (\vec{V} \vec{V}) = \rho \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \rho \vec{V} \times \vec{\omega} \\ \mu \nabla^2 \vec{V} = \mu \nabla \left(\overbrace{\nabla \cdot \vec{V}}^0 \right) - \mu \nabla \times \vec{\omega} = -\mu \nabla \times \vec{\omega} \end{array} \right.$$

- ✓ Vamos encontrar que:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \underbrace{\nabla}_{\text{grad}} \left(\rho \frac{V^2}{2} + \rho g z + p \right) = \rho (\vec{V} \times \vec{\omega}) - \mu \nabla \times \vec{\omega}$$

Escoamento incompressível, fluido Newtoniano com μ constante

- ✓ O lado direito da equação só depende da vorticidade,

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \underbrace{\nabla}_{\text{grad}} \left(\rho \frac{V^2}{2} + \rho g z + p \right) = \rho (\vec{V} \times \vec{\omega}) - \mu \nabla \times \vec{\omega}$$

- ✓ Se o escoamento vier de uma função potencial ele é irrotacional, a equação de quantidade de movimento reduz para:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \underbrace{\nabla}_{\text{grad}} \left(\rho \frac{V^2}{2} + \rho g z + p \right) = \mathbf{0}$$

1. *Escoamento irrotacional faz com que $2\mu \nabla S = 0$ seja nulo apesar do fluido possuir viscosidade, mas a tensão viscosa não é nula, $T = 2\mu S \neq 0$.*
2. **Consequência:** *numa interface líq-líq ou gás-líq é importante considerar o valor da tensão para fechar o balanço forças na interface. Veja introdução ao Viscous Potential Flow no Apendice V.*

Equação Quant. Mov. → Bernoulli

- ✓ Se o escoamento é irrotacional, incompressível, e $\mu = 0$ a eq. Q. Mov. é simplificada e expressa em função do potencial ϕ

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla_{\text{grad}} \left(\rho \frac{V^2}{2} + \rho g z + p \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \rho g z + p \right) = 0$$

- ✓ Integrando entre quaisquer dois pontos do escoamento encontra-se:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \rho g z + p = C$$

onde C é uma constante a ser determinada.

- ✓ **O campo de velocidades vem da solução da função potencial.**
- ✓ **O campo de pressão é determinado por Bernoulli:**

$$p = C - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \rho g z$$

- ✓ Isto é, as eqs. Massa e Q. Mov. são satisfeitas porém estão desacopladas. **Primeiro resolve ϕ depois encontra-se P .**

A função corrente e o Laplaciano de ψ

- ✓ Para escoamentos 2D e axi-simétricos a vorticidade se reduz a apenas uma componente, para um caso 2D grade cartesiana:

$$\vec{\omega} = \omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$
$$\omega_z = \nabla^2 \psi$$

- ✓ Então para um escoamento 2D e irrotacional ($\omega=0$) a função corrente é determinada satisfazendo a equação de Laplace:

$$\nabla^2 \psi = 0$$

- ✓ A função corrente ψ satisfaz a massa e o campo de velocidades de ψ é irrotacional tal qual a função potencial ϕ .

'The Nice Pair': $\nabla^2\phi = 0$ e $\nabla^2\psi = 0$

- ✓ Note que ϕ e ψ são soluções de Laplace que representam um escoamento incompressível, 2D, irrotacional e que satisfaz a massa!
- ✓ O campo de velocidades em coordenadas cartesianas ou polar é definido por:

$$\begin{aligned}u &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} & V_r &= \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{r\partial\theta} \\v &= \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} & V_\theta &= \frac{\partial\phi}{r\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r}\end{aligned}$$

- ✓ As equações acima são conhecidas por relações de Cauchy-Riemann.
- ✓ **Existe uma relação entre ϕ e ψ ? As linhas de ϕ e ψ constante tem uma relação em comum e um significado especial!**

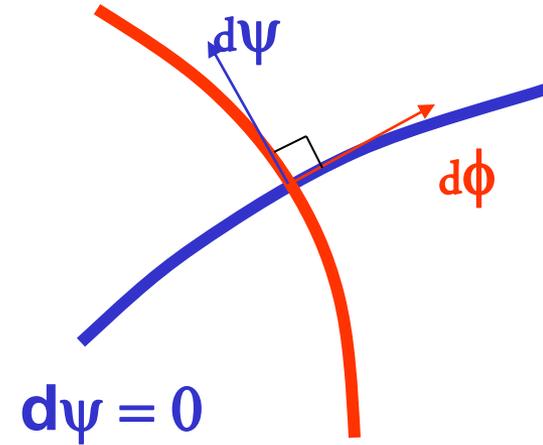
Ângulo entre as linhas de ϕ e ψ constante

- ✓ As variações de ϕ e Ψ podem ser expressas por: $d\phi = 0$

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy \equiv \nabla\phi \cdot d\vec{r}$$

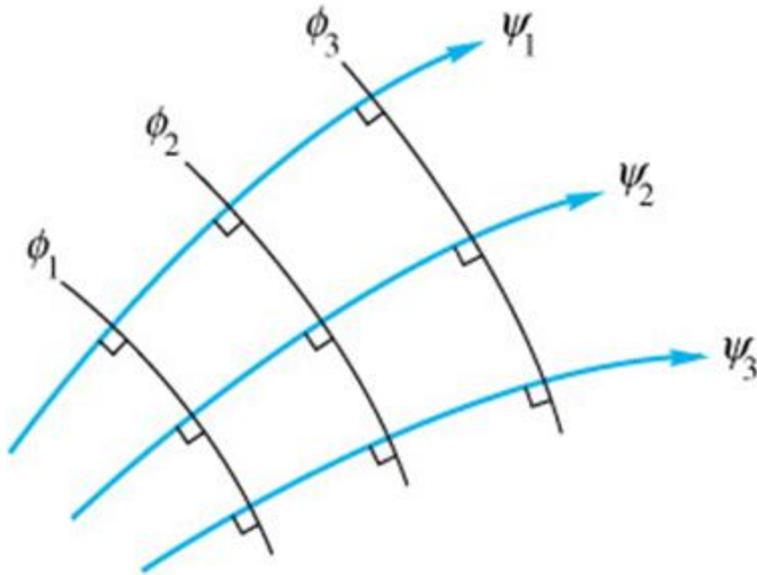
$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = (\vec{u}_i + \vec{v}_j) \cdot (-\vec{v}_i + \vec{u}_j) \equiv 0$$

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy \equiv \nabla\psi \cdot d\vec{r}$$



- ✓ O ângulo que as linhas de ϕ e Ψ constantes fazem entre si é determinado pelo **ângulo que os vetores normais** a estas curvas (os gradientes) fazem entre si.
- ✓ Como o produto escalar é nulo então as curvas ϕ e Ψ constantes são **ortogonais** entre si.

Ângulo entre as linhas de ϕ e ψ constante



1. As linhas de ϕ e Ψ constantes formam uma grade ortogonal.
2. Se ϕ for encontrado primeiro \mathbf{c} pode ser determinado ou vice-versa!
3. Os conjuntos de linhas ϕ e Ψ são soluções da equação de Laplace.

- Nas linhas de Ψ constante não há velocidade normal a elas pela própria definição de função corrente, (sempre tangente ao vetor velocidade).

- Portanto, Ψ constante representa uma linha de corrente e também pode **representar a fronteira de uma superfície sólida** pois nela não há velocidade normal.

Cauchy Riemann

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \mathbf{V}_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta}$$
$$\mathbf{v} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \mathbf{V}_\theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Eq. massa

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{V}} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{cartesiano})$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{V}} \equiv \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{polar})$$

Laplaciano ϕ

$$\nabla^2 \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{cartesiano})$$

$$\nabla^2 \phi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{polar})$$

Laplaciano ψ

$$\nabla^2 \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{cartesiano})$$

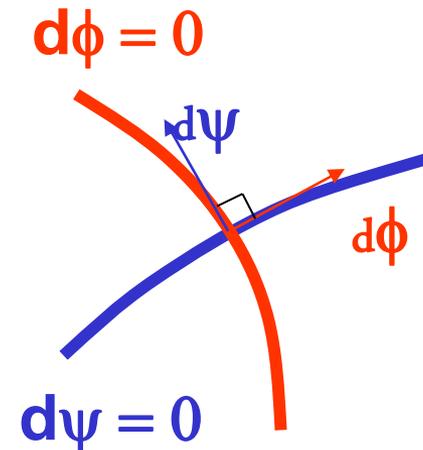
$$\nabla^2 \psi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{polar})$$

Ortogonalidade

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \equiv \nabla \phi \cdot d\vec{r}$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \equiv \nabla \psi \cdot d\vec{r}$$

$$\nabla \phi \cdot \nabla \psi = (-u\vec{i} - v\vec{j}) \cdot (-v\vec{i} + u\vec{j}) \equiv 0$$

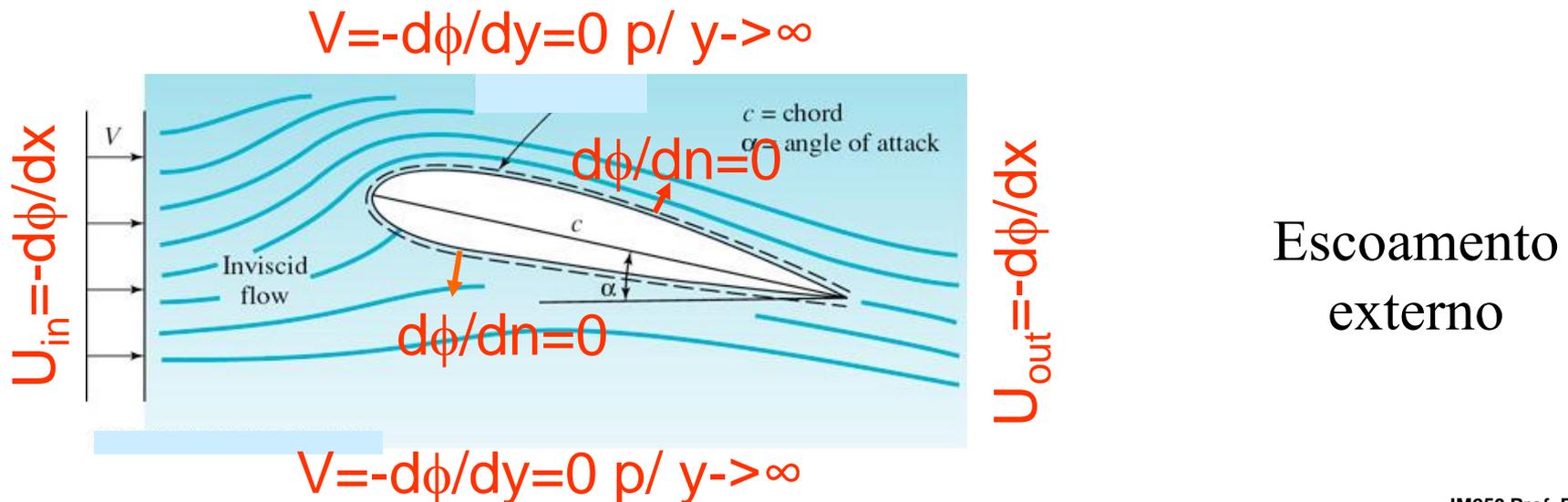
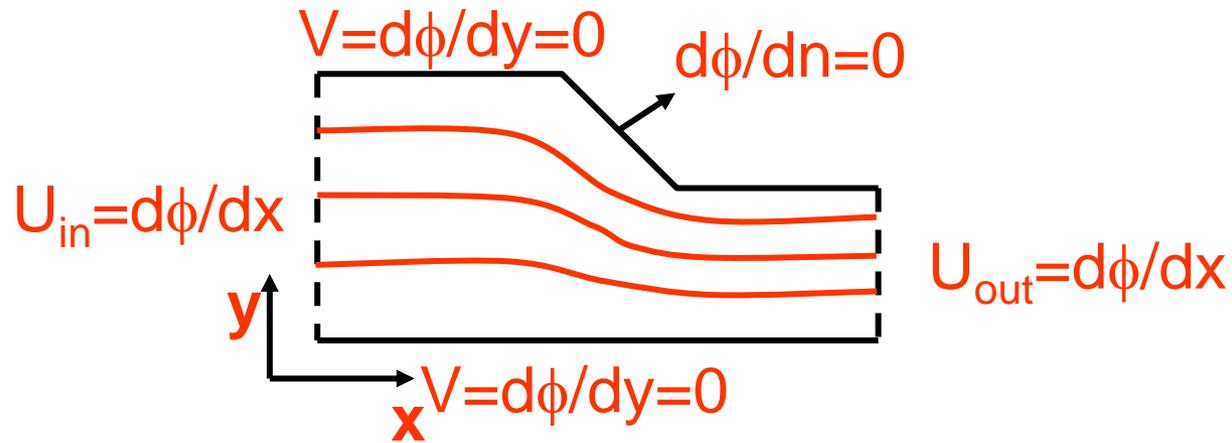


Propriedades da equação de Laplace

Propriedades eq. Laplace, $\nabla^2\phi$ - contorno

A equação de Laplace é uma **equação elíptica** e **requer informação em todo contorno do domínio**.

Escoamento interno



Escoamento externo

Propriedades eq. Laplace, $\nabla^2\phi$ - tempo

✓ O tempo não entra na equação de Laplace. Isto significa que qualquer variação em t que surge no contorno também aparece no interior do campo no mesmo instante.

✓ Por exemplo, considere uma solução de Laplace:

$$\phi(r, t) = K \cdot \text{Ln}(r) \cdot f(t)$$

✓ Verifique que ela sempre satisfaz o Laplaciano independente de f(t):

$$\nabla^2\phi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0 \quad (\text{polar})$$

✓ ϕ varia instantaneamente em todo campo devido a f(t). A eq. de Laplace propaga uma perturbação no contorno com velocidade infinita.

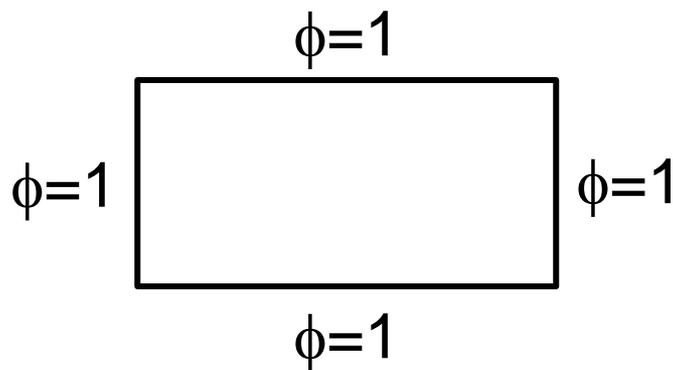
✓ Esta velocidade não é fisicamente consistente para fenômenos transientes que propaga com velocidade finita!

✓ Esta incompatibilidade resulta da hipótese de incompressível, $\rho = c^{te}$.
Veja exercício nº.1 da LE#4.

Propriedades eq. Laplace, $\nabla^2\phi$ - máx ou min

✓ O máximo ou o mínimo de ϕ acontece no contorno.

✓ Se no contorno $\phi = \text{constante}$ não há máximo nem mínimo, então a solução é $\phi = \text{constante}$. Por exemplo, se $\phi = 1$ em todo o contorno, então no interior do domínio também será $\phi = 1$



Propriedades eq. Laplace, $\nabla^2\phi$ - superposição

A eq. de Laplace é linear e o **princípio da superposição** é válido:

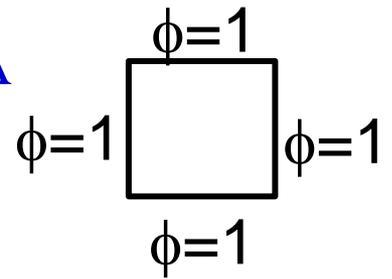
‘A soma de soluções individuais juntamente com a soma das condições de contorno também serão soluções de Laplace.’

ou

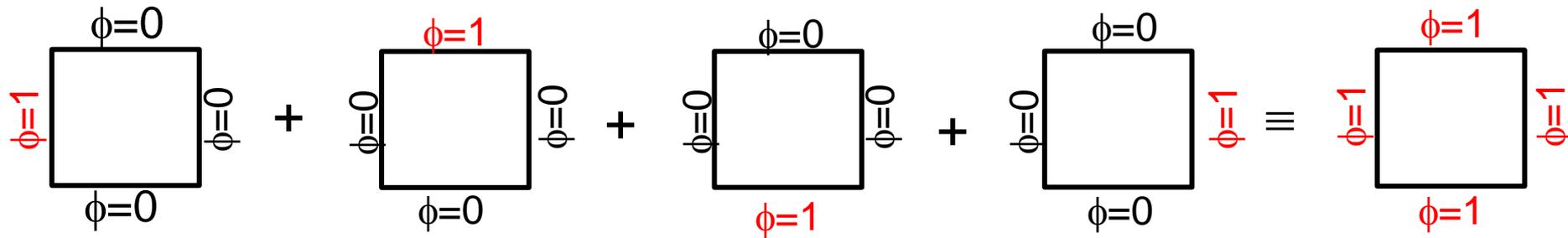
‘ ϕ e ψ satisfazem as equações $\nabla^2\phi = 0$ e $\nabla^2\psi = 0$ junto com a soma das condições de contorno associadas à ϕ e ψ também satisfazem a equação de Laplace.’

Considere:

(i) Domínio com lados iguais onde $\phi = 1$ nas quatro faces. A solução é $\phi = 1$ em todo o domínio! Princípio máx-mín.



(ii) O princípio da superposição possibilita representar a solução de (i) como quatro do problemas como indicado abaixo:



O lado direito da igualdade sabemos que no centro do domínio $\phi = 1$, princípios da superposição e do valor máximo ou mínimo no contorno.

Resposta rápido !

Pede-se o valor de ϕ no centro do domínio para cada um dos domínios no lado esquerdo da igualdade.

Resposta: $\phi = 1/4$

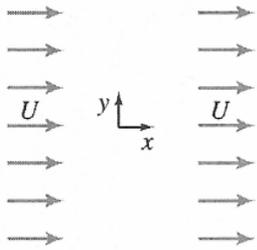
Soluções elementares da equação de Laplace

Algumas soluções simples de Laplace

Os próximos dois slides apresentam soluções elementares de Laplace que não requerem informação do contorno!

1. Será associado a estas soluções elementares um campo de velocidades;
2. Será explorado o princípio da superposição para se obter soluções de campos de velocidades mais complexos.

Escoamentos Elementares

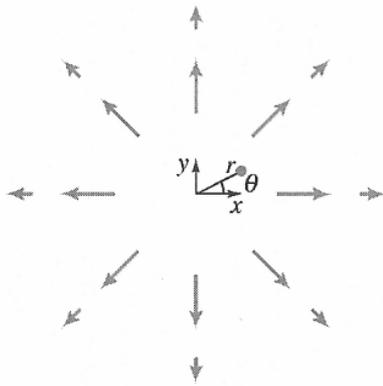
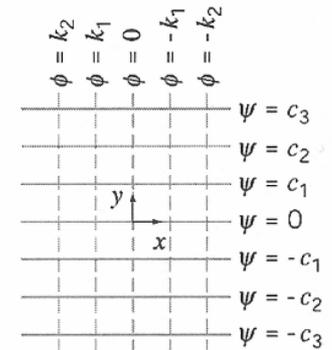


Escoamento Uniforme (sentido positivo de x)

$$u = U \quad \psi = Uy$$

$$v = 0 \quad \phi = +Ux$$

$\Gamma = 0$ em qualquer curva fechada

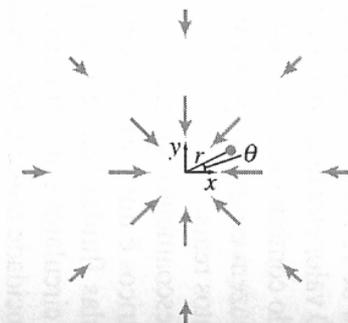
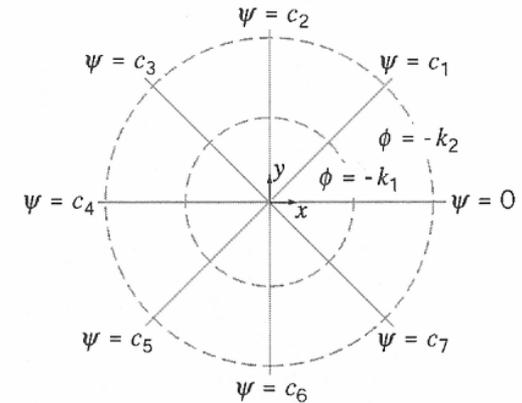


Escoamento de Fonte (a partir da origem)

$$V_r = \frac{q}{2\pi r} \quad \psi = \frac{q}{2\pi} \theta$$

$$V_\theta = 0 \quad \phi = +\frac{q}{2\pi} \ln r$$

A origem é ponto singular
 q é a vazão volumétrica por unidade de profundidade
 $\Gamma = 0$ em qualquer curva fechada

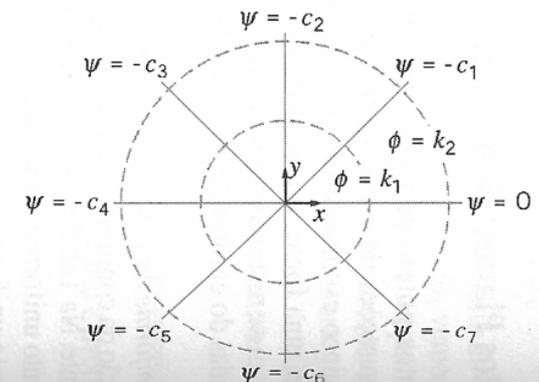


Escoamento de sumidouro (em direção da origem)

$$V_r = -\frac{q}{2\pi r} \quad \psi = -\frac{q}{2\pi} \theta$$

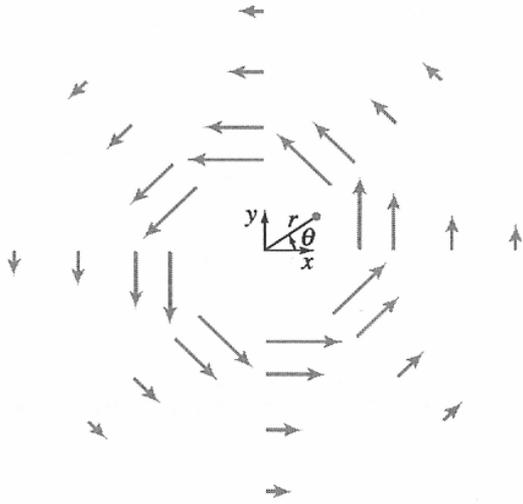
$$V_\theta = 0 \quad \phi = -\frac{q}{2\pi} \ln r$$

A origem é ponto singular
 q é a vazão volumétrica por unidade de profundidade
 $\Gamma = 0$ em qualquer curva fechada



Veja Apêndice I – o potencial complexo

Escoamentos Elementares

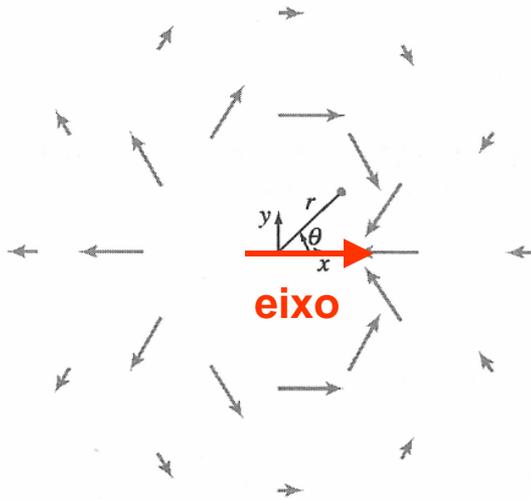
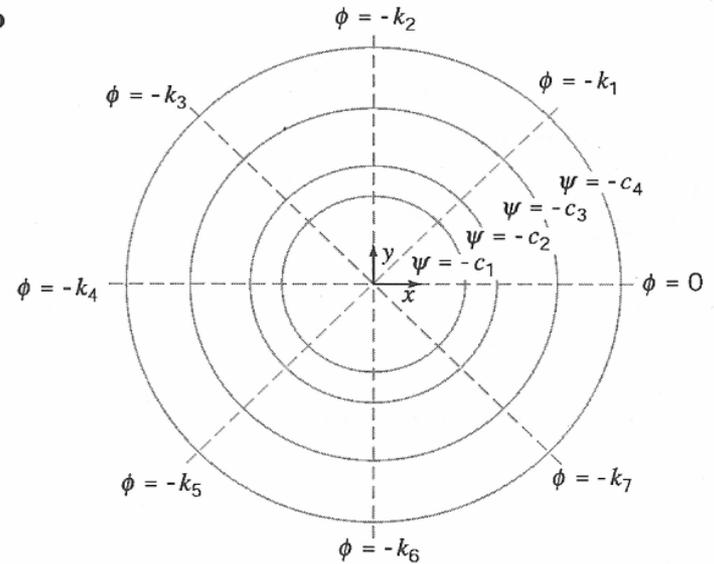


Vórtice Irrotacional (sentido de rotação anti-horário, centro na origem)

$$V_r = 0 \quad \psi = -\frac{K}{2\pi} \ln r$$

$$V_\theta = \frac{K}{2\pi r} \quad \phi = +\frac{K}{2\pi} \theta$$

A origem é ponto singular
 K é a intensidade do vórtice
 $\Gamma = K$ em qualquer curva fechada englobando a origem
 $\Gamma = 0$ em qualquer curva fechada não englobando a origem

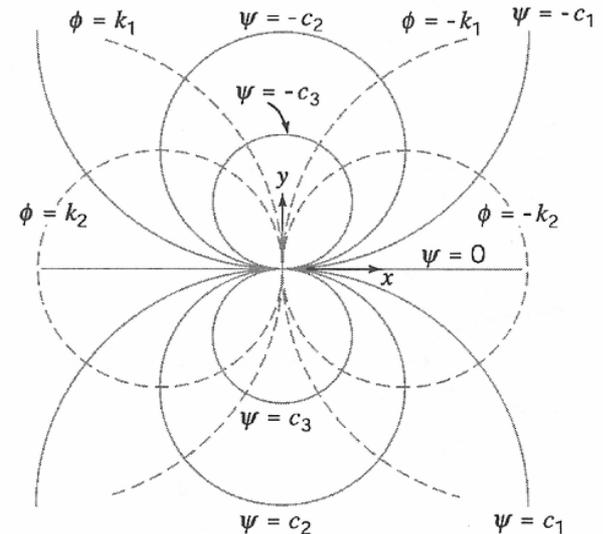


Dipolo (centro na origem)

$$V_r = -\frac{\Lambda}{r^2} \cos \theta \quad \psi = -\frac{\Lambda \sin \theta}{r}$$

$$V_\theta = -\frac{\Lambda}{r^2} \sin \theta \quad \phi = +\frac{\Lambda \cos \theta}{r}$$

A origem é ponto singular
 Λ é a intensidade do dipolo
 $\Gamma = 0$ em qualquer curva fechada



Fonte + Sorvedouro dist. $\rightarrow 0$

Sentido eixo: F \rightarrow S

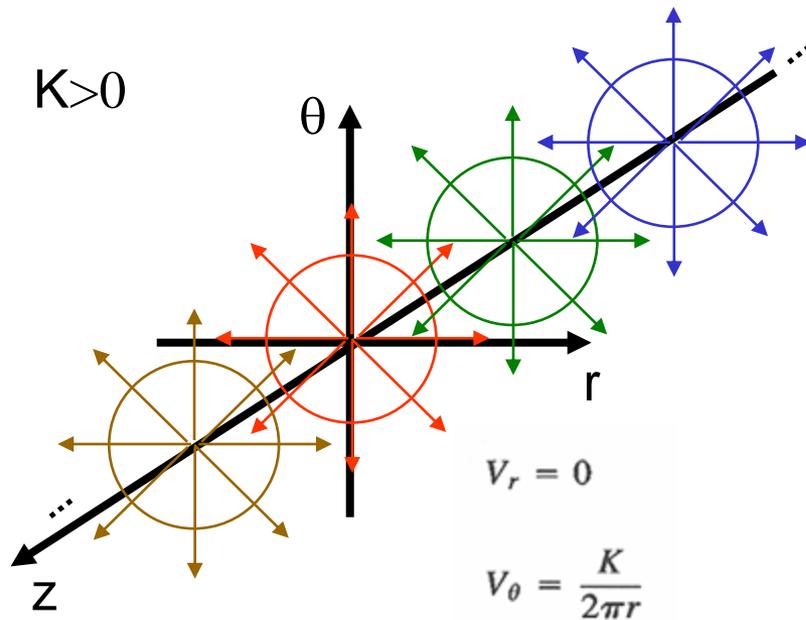
Veja Apêndice I – o potencial complexo

Fonte/Sorvedouro e Vórtice 2D

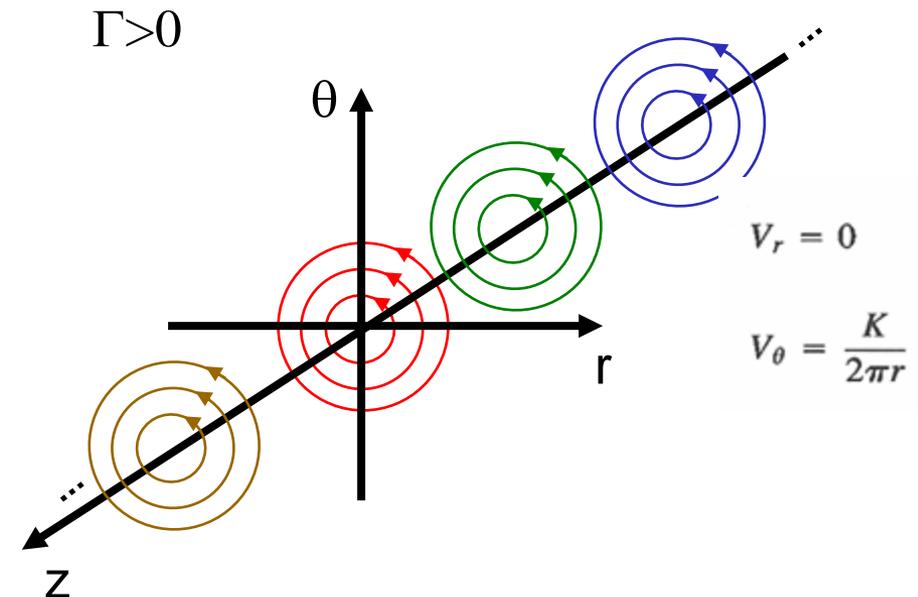
Os potenciais e as funções correntes apresentados geram campos bi-dimensionais.

Representação física de fontes ou vórtices distribuídos em coordenadas cilíndrico-polar ao longo do eixo z de $-\infty$ a $+\infty$ gerando campos no plano (r, θ) idênticos, como sugerido na figura.

(a) Distribuição contínua de fontes ao longo de z



(b) Distribuição contínua de vórtices ao longo de z

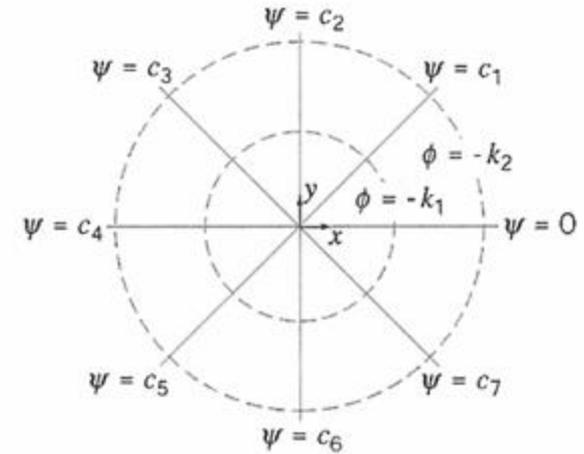


Fonte/Sorvedouro na origem

- ✓ Fonte e sorvedouro possuem descontinuidade de vel. na origem.
- ✓ Na fonte ou no sorvedouro a vazão q (m^2/s) que cruza qualquer equi-potencial é sempre a mesma.
- ✓ Sendo o fluido incompressível, a conservação da massa mostra que o produto tem que ser constante:

$$v_r \cdot (2\pi \cdot r) = \left(\frac{q}{2\pi r} \right) \cdot (2\pi r) = q$$

- ✓ A vazão q é constante mesmo quando $r \rightarrow 0$ mas $v_r \rightarrow \infty$.
- ✓ Portanto, o produto de v_r pela **área** quando $r \rightarrow 0$ possui um valor definido apesar que individualmente $v_r \rightarrow \infty$ e **área** $\rightarrow 0$



Vórtice livre ou irrotacional

- ✓ O teorema de Kelvin (aula #6) estabelece que a circulação, Γ , é constante na ausência de viscosidade e densidade constante

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = + \oiint_S \left(\frac{1}{\rho^2} \right) (\nabla\rho \times \nabla P) \cdot \vec{n} dA + \oiint_S \mathbf{v} \nabla^2 \vec{\omega} \cdot \vec{n} dA = 0 \Rightarrow \Gamma = \text{constante}$$

- ✓ A circulação Γ em 'c' que envolve a área S da integral dupla resulta em:

$$\Gamma = \oiint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dA = \oint_c \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r} \right) (r d\theta) = \Gamma = \text{constante}$$

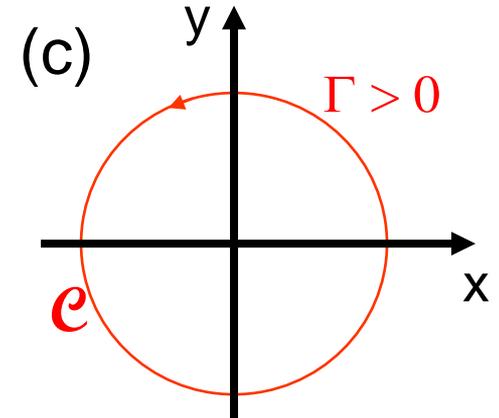
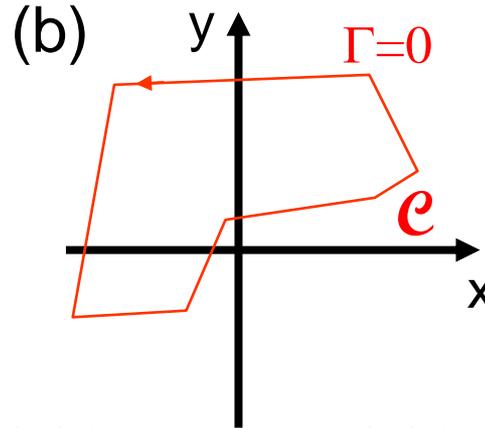
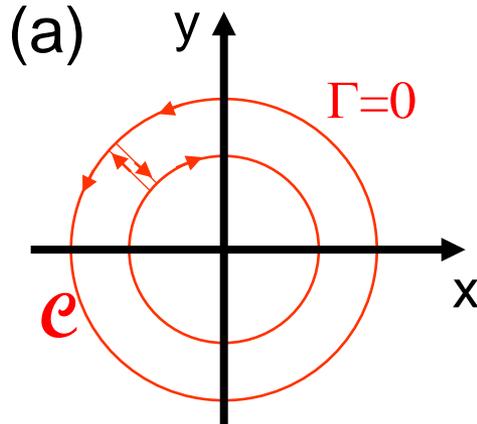
- ✓ A circulação Γ do vórtice é constante, mesmo quando $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$ e $\mathbf{v}_r \rightarrow \infty$. , pode-se dizer que vorticidade está concentrada somente em $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$.

Propriedade similar a fonte-sorvedouro.

- ✓ Se o caminho 'c' não passa pela singularidade, $\Gamma = \mathbf{0}$ e se o caminho contém a singularidade, $\Gamma = \text{constante}$.
- ✓ Vamos demonstrar no próximo slide que qualquer caminho que exclua a origem Γ é nulo; portanto irrotacional.

Vórtice Irrotacional

- ✓ O vórtice irrotacional tem sua vorticidade concentrada na origem.
- ✓ Qualquer caminho que não passa pela origem, $\Gamma = 0$, figs (a) e (b)! Por que?



- ✓ Fora da origem não há vorticidade. A vorticidade na origem não difunde para o domínio no escoamento ideal (não há efeito viscoso!).
- ✓ Se o caminho passa pela origem então $\Gamma \neq 0$, fig. (c).
- ✓ A fig. (c) demonstra que ω está concentrada na origem, Γ não aumenta com a área do circuito. Também pode-se demonstrar observando que \mathbf{v}_r é descontínuo mas o produto $\mathbf{v}_r \cdot \text{área}$ para $r \rightarrow 0$ é finito e igual a Γ !
- ✓ Fluidos com baixa viscosidade onde os efeitos de difusão de vorticidade da origem são minimizados (tipo camada limite) e $\Gamma \cong \text{constante}$ constituindo uma boa aproximação.

Exercício: verifique soluções elementares satisfazem $\nabla^2\phi = 0$



Exercício
p/ casa

Escoamento uniforme, fonte/sorvedouro, e vórtice livre,

$$\phi = Ux \rightarrow \text{Escoamento Uniforme}$$

$$\phi = \pm \frac{q}{2\pi} \text{Ln}(r) \rightarrow \text{Fonte ou Sorvedouro}$$

$$\phi = \pm \frac{K}{2\pi} \theta \rightarrow \text{Vórtice livre (anti-horário/horário)}$$

são soluções da equação de Laplace (verifique). A exceção ocorre nos pontos singulares.

$$\nabla^2\phi \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{cartesiano})$$

$$\nabla^2\phi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{polar})$$

Verifique as transformações polar x cartesiano para os escoamentos elementares



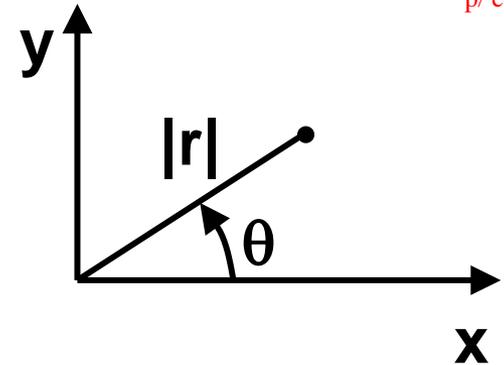
Exercício
p/ casa

$$\phi = Ur \cos \theta \rightarrow \text{Escoamento Uniforme dir } x$$

$$\phi = \pm \frac{q}{2\pi} \text{Ln}(r) \rightarrow \text{Fonte ou Sorvedouro}$$

$$\phi = \pm \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \rightarrow \text{Vórtice livre (anti-horário/horário)}$$

$$\phi = \pm \frac{\Lambda \cos \theta}{r} \rightarrow \text{Doublet (eixo +/-)}$$



Identidades: $x = r \cdot \cos \theta; y = r \cdot \sin \theta; r^2 = x^2 + y^2$ e $\theta = \text{Atan}\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\phi = Ur \cos \theta = Ux \rightarrow \text{Escoamento Uniforme dir } x$$

$$\phi = \pm \frac{q}{2\pi} \text{Ln}(r) = \pm \frac{q}{2\pi} \text{Ln}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \rightarrow \text{Fonte ou Sorvedouro}$$

$$\phi = \pm \frac{\Gamma}{2\pi} \theta = \pm \frac{\Gamma}{2\pi} \text{Atan}\left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow \text{Vórtice livre (anti-horário/horário)}$$

$$\phi = \pm \frac{\Lambda \cos \theta}{r} = \pm \Lambda \frac{x}{x^2 + y^2} \rightarrow \text{Doublet (eixo +/-)}$$



Exercício p/
fazer em
casa

Exercício – Considere um escoamento uniforme no plano cartesiano (x,y) com velocidades U_0 e V_0 .

(i) Mostre que no plano polar r,θ as componentes de velocidade nas direções radial e tangencial são:

$$V_\theta = -U_0 \sin\theta + V_0 \cos\theta$$

$$V_r = +U_0 \cos\theta + V_0 \sin\theta$$

(ii) Mostre que o inverso desta transformação é

$$U_0 = V_r \cos\theta - V_\theta \sin\theta$$

$$V_0 = V_r \sin\theta + V_\theta \cos\theta$$

(iii) Mostre que as funções potencial e corrente que geram o escoamento uniforme no plano (r,θ) é dada por:

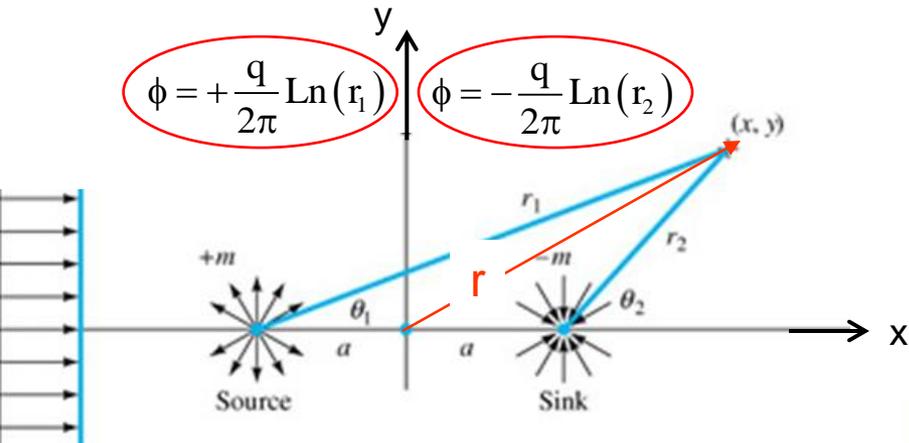
$$\phi = +U_0 r \cos\theta + V_0 r \sin\theta$$

$$\psi = +U_0 r \sin\theta - V_0 r \cos\theta$$

Superposição de escoamentos elementares

Como a equação de Laplace é linear. A combinação linear de soluções elementares também é uma solução de Laplace!

Fonte + Sorvedouro mesma intensidade espaçamento 2a



expresse ϕ_F e ϕ_S em coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_F + \phi_S = \frac{q}{2\pi} \ln \left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right]^{1/2} \\ &= \frac{q}{4\pi} \ln \left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right] \end{aligned}$$

✓ Uma fonte e um sorvedouro, de mesma intensidade estão deslocados de '2a' ao longo do eixo x com centro na origem.

✓ O campo de velocidades resultante é a soma linear dos campos de uma fonte e sorvedouro deslocados de '2a'

$$\Psi = \Psi_F + \Psi_S$$

$$= +\frac{q}{2\pi} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{y}{x+a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{y}{x-a} \right) \right\}$$

Use a identidade: $\tan^{-1}(a) - \tan^{-1}(b) \equiv \tan^{-1} \left[\frac{a-b}{1+a \cdot b} \right]$

$$\equiv -\frac{q}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)$$

Fonte + Sorvedouro espaçados 2a: linhas de ϕ e ψ constantes



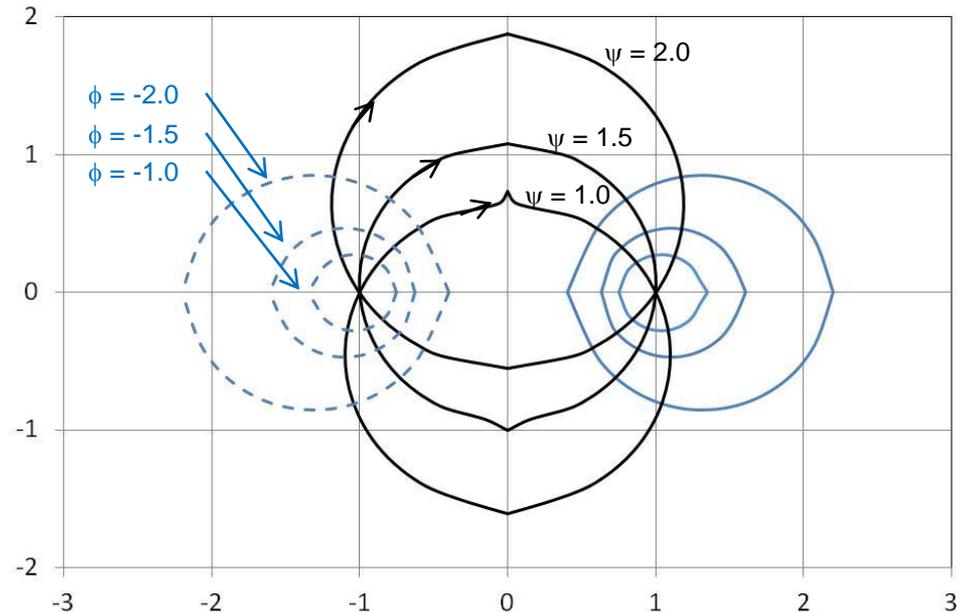
Exercício
p/ casa

Após manipulação algébrica
chega-se às equações que definem
as linhas com (ϕ, ψ) constantes .

$$\left(x - a \cdot \coth\left(\frac{\phi}{q/\pi}\right) \right)^2 + y^2 = a^2 \cdot \operatorname{csch}^2\left(\frac{\phi}{q/\pi}\right)$$

$$x^2 + \left(y - a \cdot \cot\left(\frac{\psi}{q/2\pi}\right) \right)^2 = a^2 \cdot \operatorname{csc}^2\left(\frac{\psi}{q/2\pi}\right)$$

As linhas de (ϕ, ψ) constantes
são famílias de círculos com
centros ao longo em $(x,0)$ e
 $(0,y)$ tendo os raios definidos
por $a^2 \cdot \operatorname{csch}(f/q/\pi)$ e
 $a^2 \cdot \operatorname{csc}(y/q/\pi)$ respectivamente.



Dados: $a = 1$ e $q = \pi$, [Excel](#)

Dipolo ($a \rightarrow 0$) : fonte e sorv. superpostos

Identidade usada para chegar no ϕ do Dipolo: $\lim_{p \rightarrow 0} \left\{ \text{Ln} \left(\frac{1+p}{1-p} \right) \right\} = 2p$

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{q}{4\pi} \cdot \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \ln \left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right] \right\} = -\frac{q}{4\pi} \cdot \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \ln \left[\frac{x^2 + y^2 + 2ax}{x^2 + y^2 - 2ax} \right] \right\} \\ &= -\frac{q}{4\pi} \cdot \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \ln \left[\frac{1 + \overbrace{2ax/(x^2 + y^2)}^p}{1 - \underbrace{2ax/(x^2 + y^2)}_p} \right] \right\} = -\frac{q}{4\pi} \cdot 2 \cdot \left[\frac{2ax}{x^2 + y^2} \right] = -\frac{q \cdot a}{\pi} \cdot \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right] \end{aligned}$$

✓ O produto qa/π é intensidade do dipolo $\Lambda = qa/\pi = \text{constante!}$

$$\phi = -\Lambda \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \equiv -\Lambda \cdot \frac{\cos \theta}{r};$$

Dipolo: Função Corrente

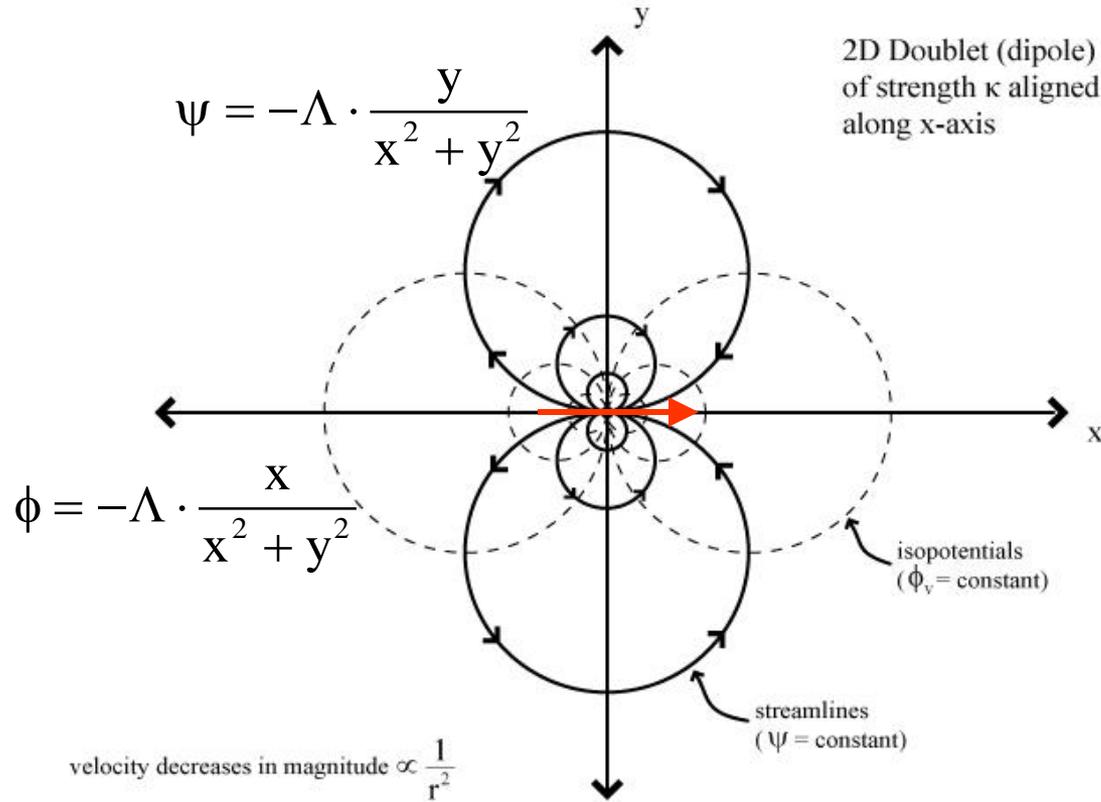
Identidade usada para chegar na ψ do Dipolo: $\lim_{p \rightarrow 0} \tan^{-1} p = p$

$$\psi = -\frac{q}{2\pi} \cdot \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \tan^{-1} \left(\underbrace{\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}}_{=p} \right) \right\} = -\frac{q}{2\pi} \cdot \frac{2ay}{x^2 + y^2}$$

- ✓ O produto entre a intensidade da fonte pela distância 'a' é uma constante denominada por intensidade do dipolo, Λ , é $\Lambda = qa/\pi$,

$$\psi = -\Lambda \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \equiv -\Lambda \cdot \frac{\text{sen}\theta}{r}; \quad \Lambda = \frac{q \cdot a}{\pi}$$

Eixo do Dipolo



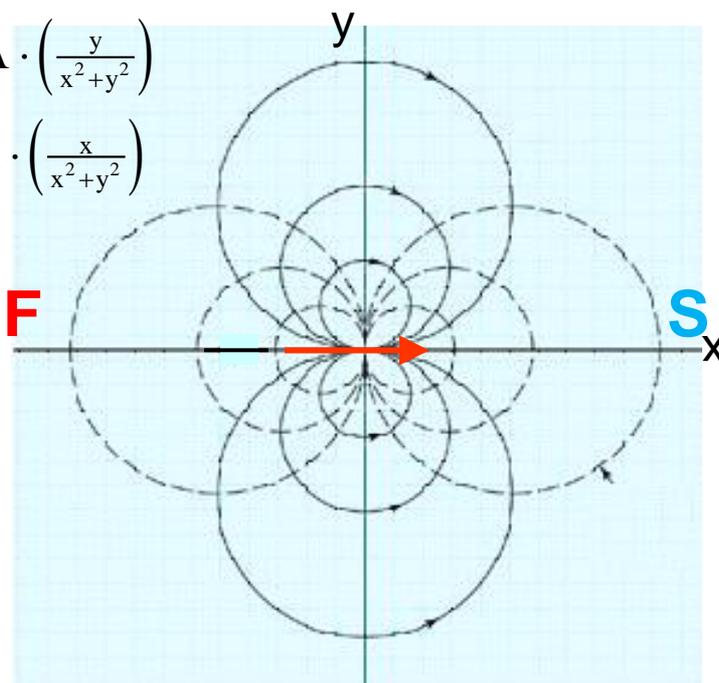
Eixo do dipolo (doublet)
Sentido: da fonte para sorvedouro

O **eixo do dipolo** indica a posição relativa da fonte e do sorvedouro. Na figura a fonte está a esquerda do sorvedouro, ambos posicionados ao longo do eixo x

Eixo do Dipolo

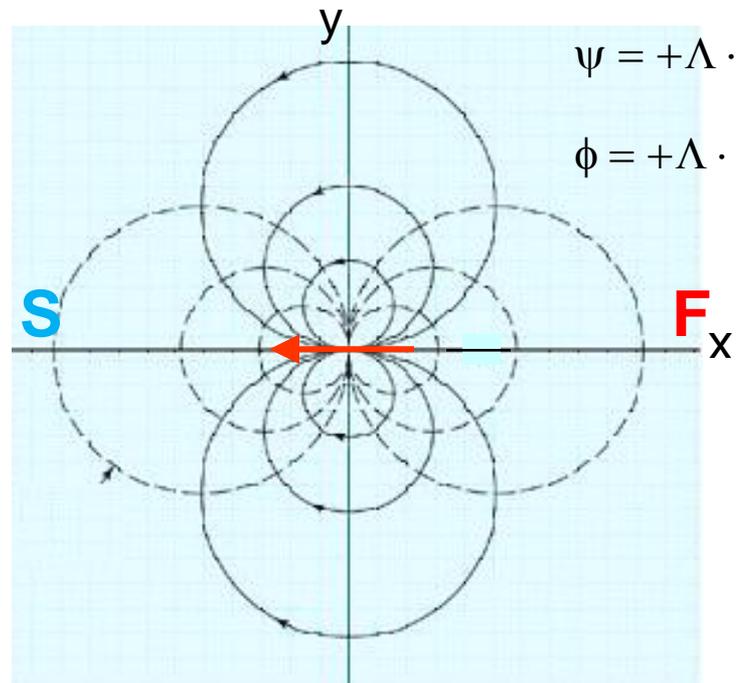
$$\psi = -\Lambda \cdot \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\phi = -\Lambda \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$



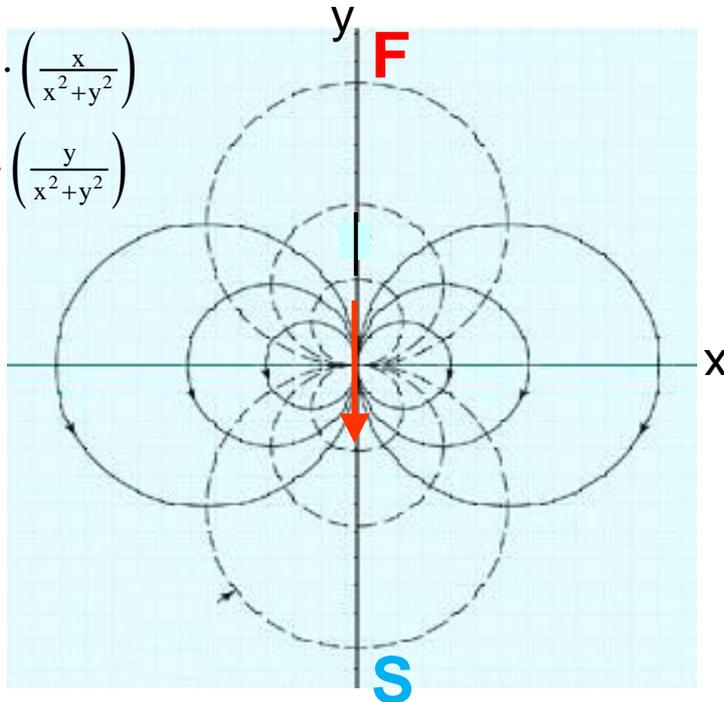
$$\psi = +\Lambda \cdot \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\phi = +\Lambda \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$



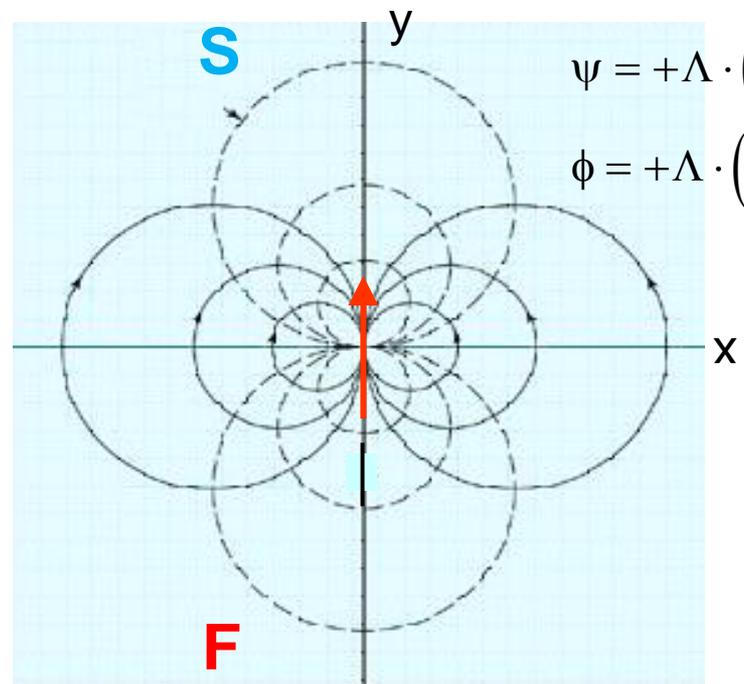
$$\psi = +\Lambda \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$$\phi = +\Lambda \cdot \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

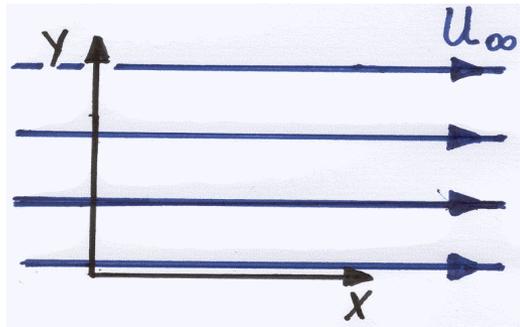


$$\psi = +\Lambda \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

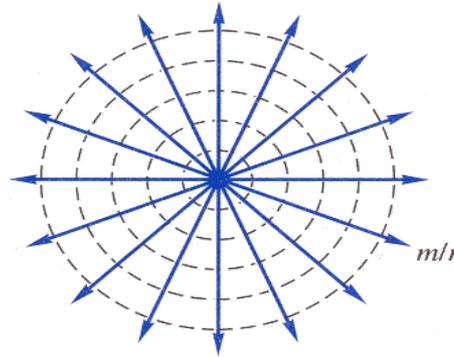
$$\phi = +\Lambda \cdot \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$



O que acontece se combinarmos $\psi_U + \psi_F$?



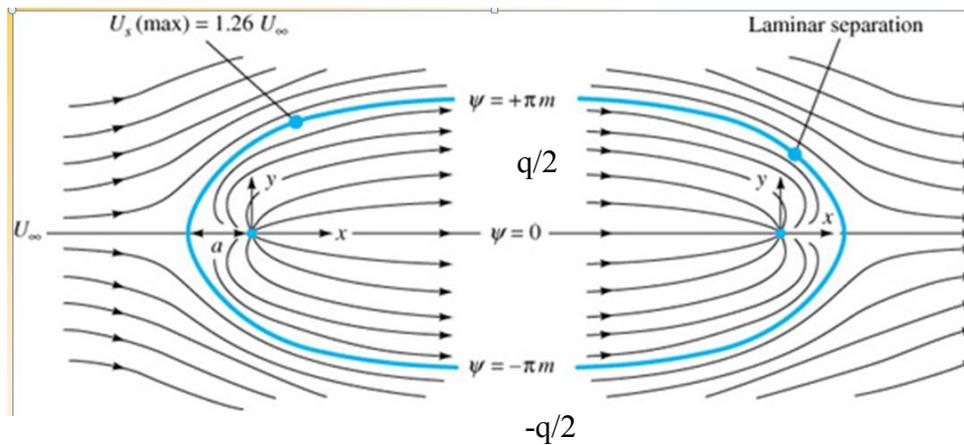
+



=



filme

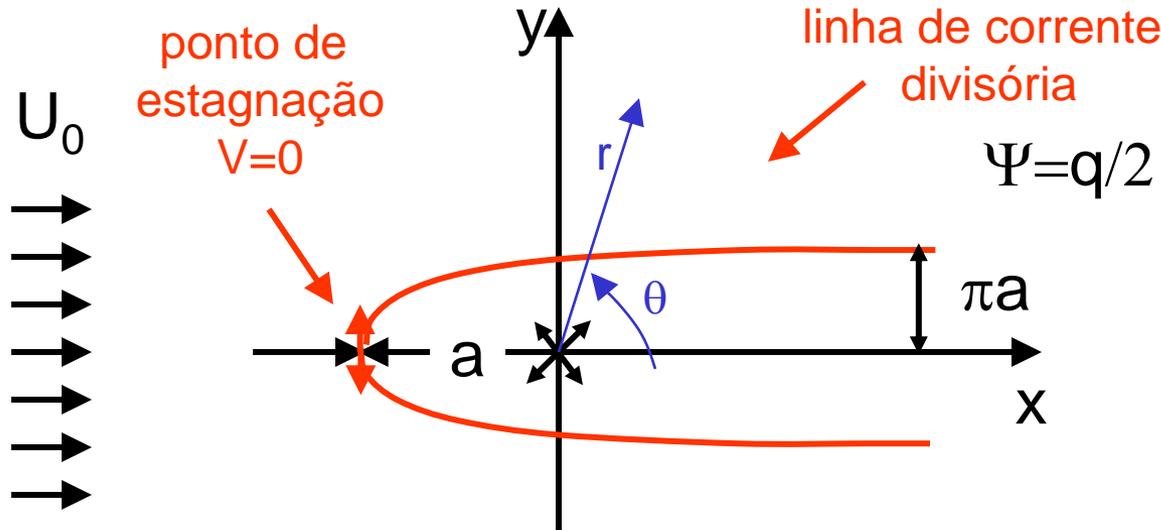


- Este escoamento é conhecido como semicorpo de Rankine. Este exemplo usa uma fonte. O semicorpo também pode ser formado por um sorvedouro.

- A linha de corrente em 'azul' é uma linha que divide o escoamento interno e externo. Por esta razão ela também pode representar a área de captação do escoamento uniforme ou uma superfície (carenagem ou (fórmula?))

Semicorpo de Rankine

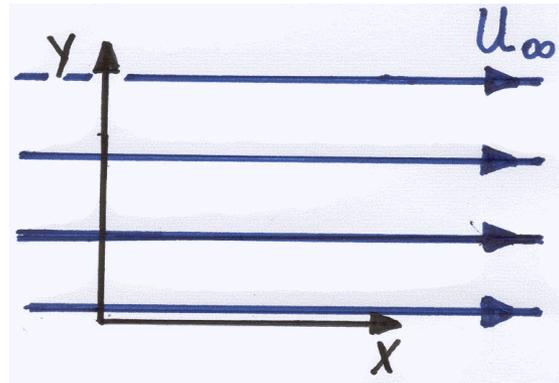
- ✓ Considere um escoamento uniforme e uma fonte na origem:



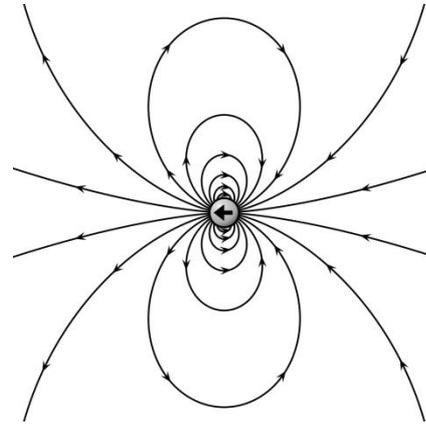
$$\psi = \psi_U + \psi_F = U_0 \cdot r \cdot \text{sen}(\theta) + \frac{q}{2\pi} \theta$$

- ✓ Quando considera-se a presença de um corpo (parede) é mais conveniente trabalhar com ψ pq $\psi = c^{te}$ pode representar uma parede!
- ✓ Veja análise no **Apêndice II**: linhas de corrente, ponto de estagnação, distribuição de pressão, altura πa , etc.

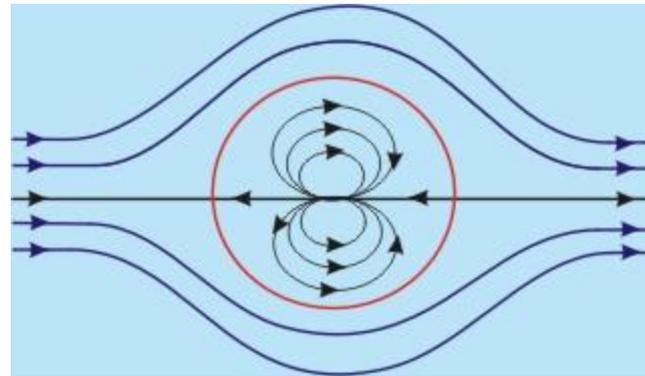
O que acontece se combinarmos $\psi_U + \psi_D$?



+

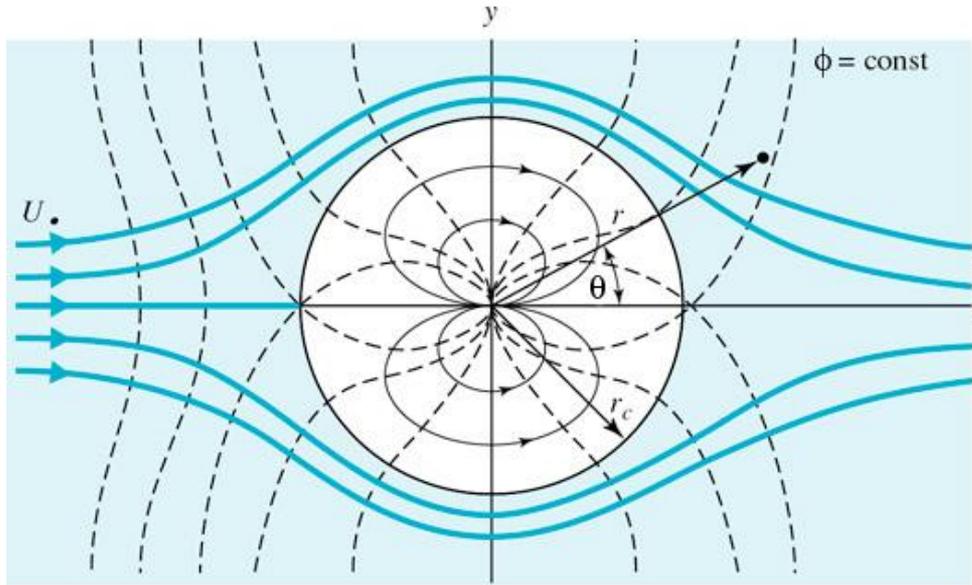


=

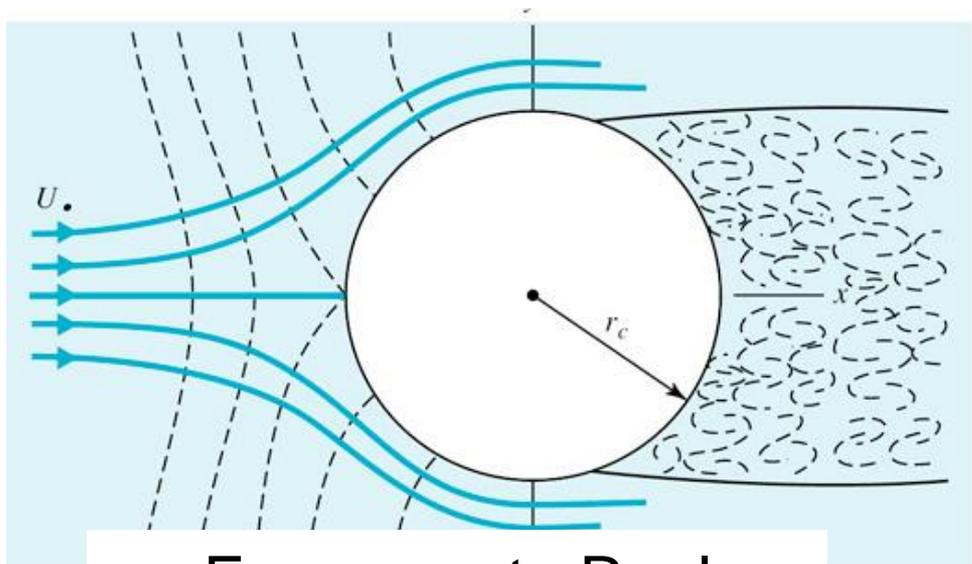


- As linhas de corrente externas representam o escoamento ao redor de um cilindro (cor vermelha) de um fluido ideal!

Escoamento ao redor de um Cilindro



Escoamento Potencial



Escoamento Real

- O escoamento externo ao um cilindro é obtido da superposição de um dipolo com escoamento uniforme.
- A linha de corrente que divide o escoamento externo do interno é um círculo, portanto associa-se as linhas de ψ constante àquelas que ocorrem no escoamento externo ao cilindro.

Escoamento ao redor de um cilindro - I

Superpondo um esc. uniforme $U_0 > 0$ e dipolo na origem c/ eixo > 0 , isto é $F \rightarrow S$

$$\psi = \psi_U + \psi_D = U_0 \cdot r \cdot \text{sen}(\theta) - \Lambda \frac{\text{sen}(\theta)}{r}$$

O eixo do dipolo aponta para $x > 0$, i.e., a fonte está a esquerda do sorvedouro. O campo de velocidades:

$$v_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = U_0 \cdot \cos(\theta) - \Lambda \frac{\cos(\theta)}{r^2} = \cos(\theta) \left(U_0 - \frac{\Lambda}{r^2} \right)$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_0 \cdot \text{sen}(\theta) - \Lambda \frac{\text{sen}(\theta)}{r^2} = -\text{sen}(\theta) \left(U_0 + \frac{\Lambda}{r^2} \right)$$

- v_r é nulo quando $r = (\Lambda/U_0)^{1/2}$. Isto define o raio 'a' do cilindro.
- A intensidade do dipolo em termos do raio do cilindro 'a': $\Lambda = a^2 U_0$
- v_θ é nulo quando $\theta = 0$ e π .
- Os pontos de estagnação ocorrem em $(a, 0)$ e (a, π)

Escoamento ao redor de um Cilindro II

- As componentes de velocidade v_r e v_θ e a velocidade resultante V na superfície do cilindro de raio 'a' :

$$v_r = 0 \quad \& \quad v_\theta = -2 \cdot \text{sen}(\theta) \cdot U_0$$

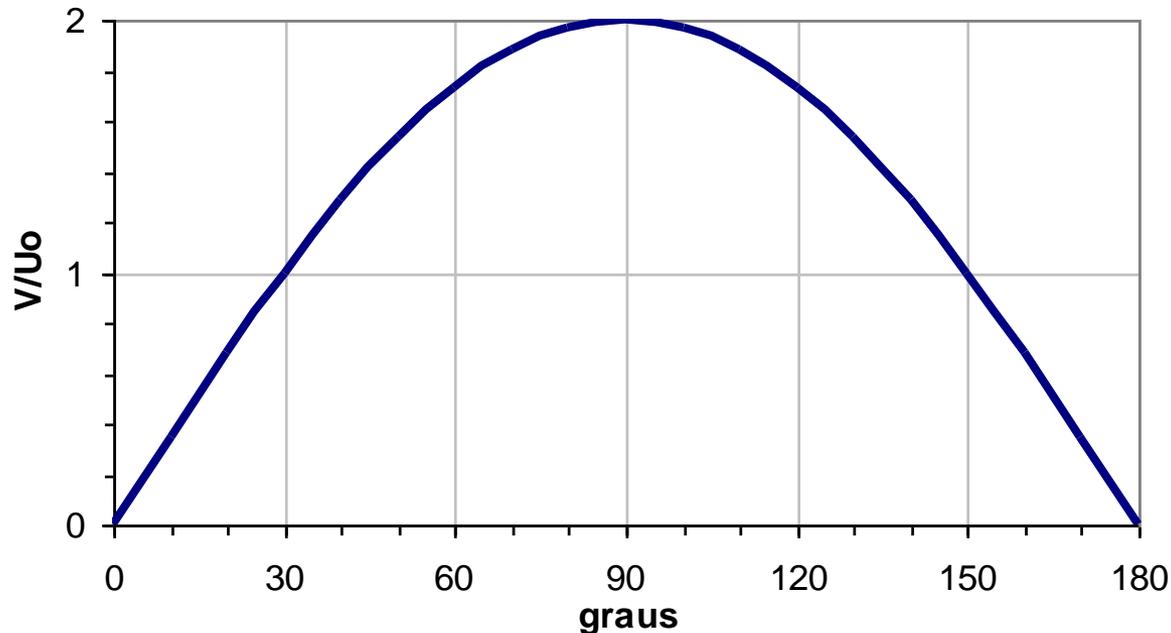
$$V^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = 4 \cdot U_0^2 \cdot \text{sen}^2(\theta)$$

- A distribuição de pressão no cilindro ($r = a$)

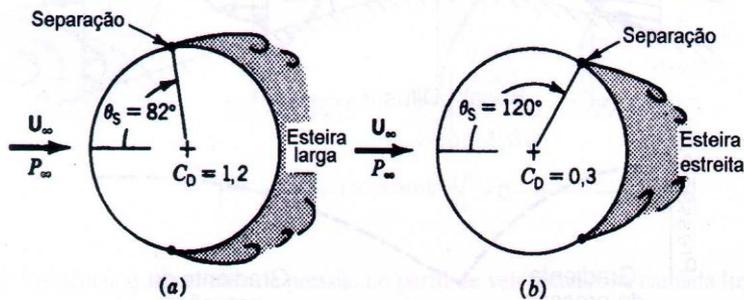
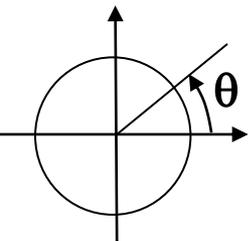
$$\frac{(p - p_{\text{atm}})}{(1/2)\rho U_0^2} = 1 - \left(\frac{V}{U_0} \right)^2 \rightarrow C_p = 1 - 4 \cdot \text{sen}^2(\theta)$$

Distribuição de velocidade no cilindro

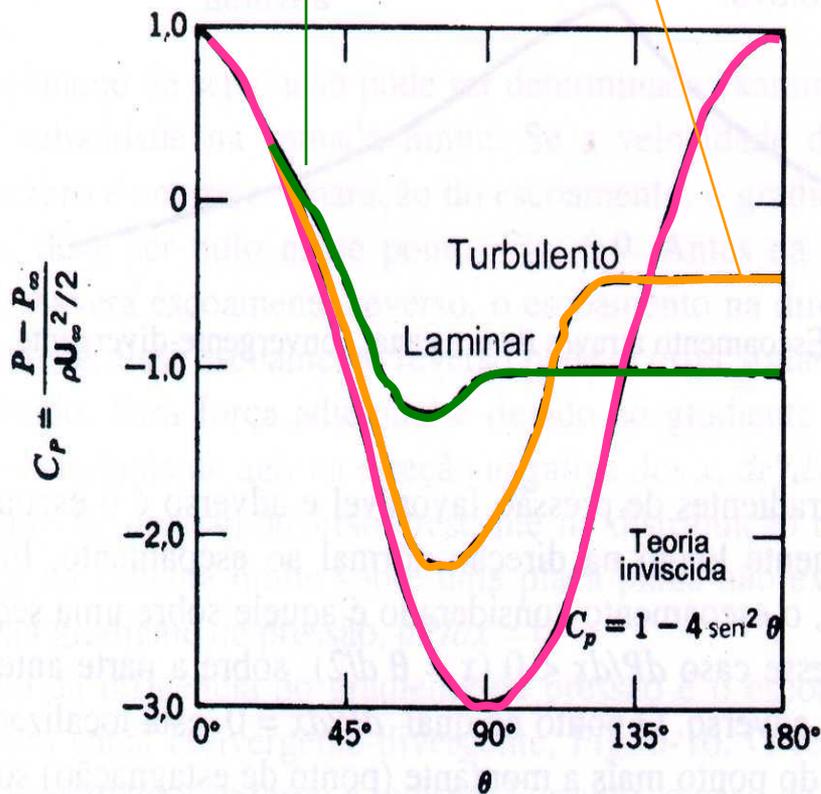
A velocidade na superfície do cilindro é dada por: $V/U_0 = 2 \sin(\theta)$ e mostrada na figura abaixo:



Note que o diâmetro do cilindro não aparece em V/U_0 . Esta é uma característica do escoamento potencial, **ele é cinematicamente similar**. Cilindros de quaisquer diâmetros terão as mesmas velocidades relativas nos pontos correspondentes!



Distribuição de Pressão Em Cilindros para escoamento Laminar, Turbulento e Potencial



Para o escoamento potencial:

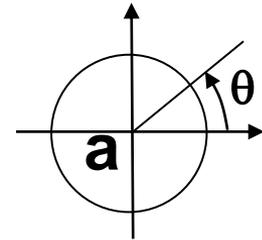
1. C_p máximo estagnação, $\theta = 0^\circ$;
2. P em $\theta \sim 30^\circ$ é igual a P_∞ ;
3. P em $\theta = 90^\circ$ é mínimo;
4. P em $\theta = 180^\circ$ é igual P estag.

Figura 6-11 Pressão de escoamento e de superfície sobre um cilindro circular infinito normal ao escoamento. (a) Escoamento laminar, (b) Escoamento turbulento.

Forças no cilindro

As forças devida a distribuição de pressão no cilindro nas direções x (D) e y (L) são determinadas por:

$$D = 2 \cdot \int_0^{\pi} C_P \frac{1}{2} \rho U_0^2 \cdot a \cdot \cos(\theta) d\theta = 0 \quad \text{direção x}$$
$$L = 2 \cdot \int_0^{\pi} C_P \frac{1}{2} \rho U_0^2 \cdot a \cdot \sin(\theta) d\theta = 0 \quad \text{direção y}$$



Distribuição de pressão é simétrica nas direções x e y. Esta simetria nas direções x e y faz com que o cilindro não tenha força de arrasto, D, nem sustentação, L.

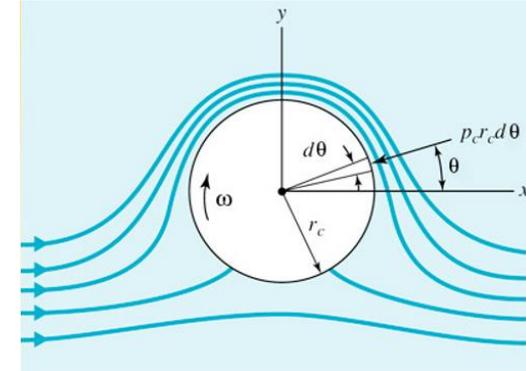
A ausência de arrasto foi uma surpresa negativa do modelo que criou o paradoxo de D'Alembert ([acesse wiki](#)). Isto foi resolvido somente no início do século XX!

Força resultante no cilindro & paradoxo D'Alembert

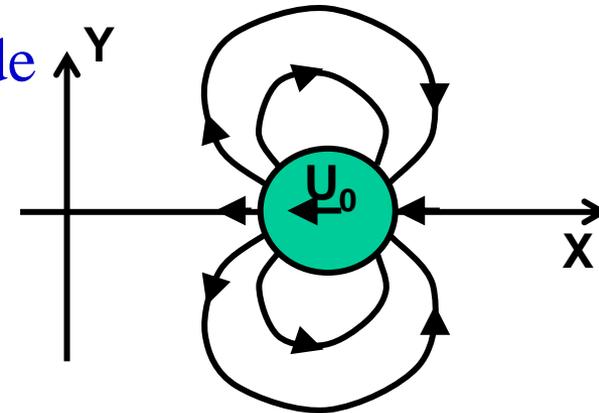
- No escoamento potencial só atua forças normais (pressão). Como a distribuição de pressão no corpo do cilindro é simétrica, **não há força resultante no cilindro**. Isto é, arrasto é nulo.
- Este é um dos pontos falhos da teoria potencial.
- Ele foi reconhecido por D'Alembert e em sua homenagem recebeu o nome de paradoxo de D'Alembert.
- Este paradoxo foi resolvido no início do sec. XX por Prandtl. Ele verificou que os efeitos viscosos ficam confinados na Camada Limite. Externo a Camada limite a teoria potencial é válida.
- Entretanto, quando a camada limite se separa do corpo ela perturba o escoamento externo, muda a distribuição de pressão no corpo e cria um arrasto não previsto pela teoria potencial.

Estudos adicionais em cilindros

✓ Se introduzir uma circulação (vorticidade) no cilindro a distribuição de pressão fica não-simétrica em y e aparece uma força de sustentação, veja **Apêndice III**. (veja *efeito magnus* - procure na web por: *magnus effect*, *magnus effect on ships*, *flattener rotors*)

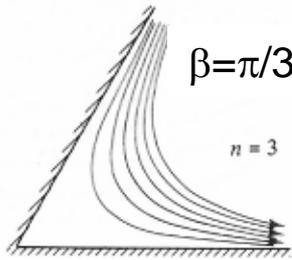


✓ O cilindro deslocando-se com aceleração constante (problema transiente) surge uma força de arrasto devido a aceleração da ‘massa virtual’ deslocada pelo movimento do cilindro, veja **Apêndice IV**. (aplicação deste efeito procure na web por: *virtual mass applications*, *added mass applications*, *escoamento em bolhas*, *força de arrasto em túneis*, etc)



'Wedge Flows'

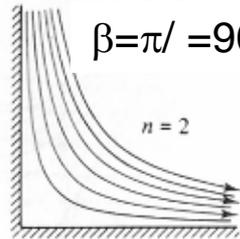
Expansão ao redor do eixo de simetria,
 $\beta = \pi/n$, figs. a-a, b-b e c-c



$$\beta = \pi/3 = 60^\circ$$

$n = 3$

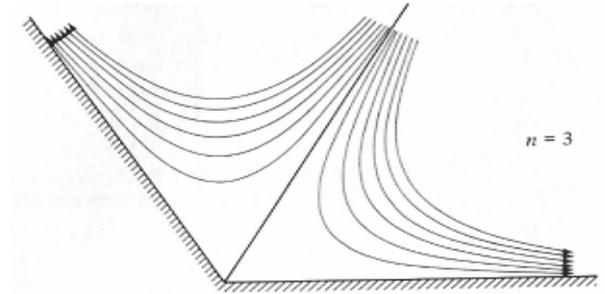
(a)



$$\beta = \pi/2 = 90^\circ$$

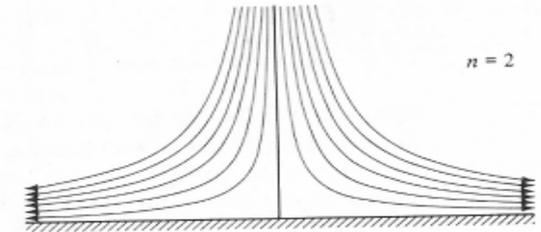
$n = 2$

(b)



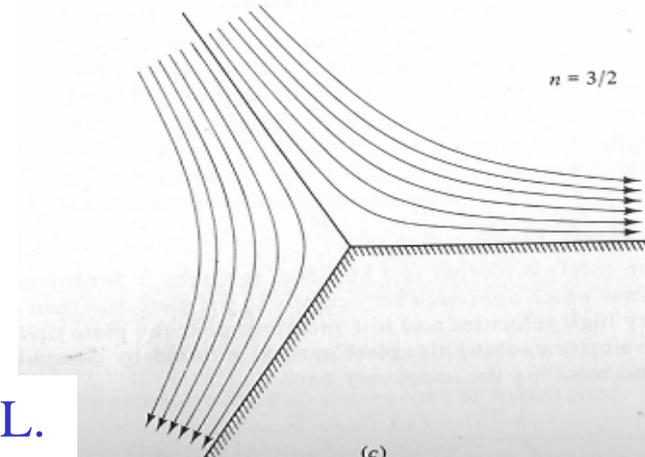
$n = 3$

(a)



$n = 2$

(b)



$n = 3/2$

(c)

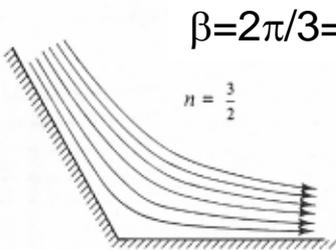
$$F(z) = Az^n = Ar^n e^{in\theta}$$

$$\phi = A \cdot r^n \cdot \cos(n\theta)$$

$$\psi = A \cdot r^n \cdot \sin(n\theta)$$

$$\hat{\text{ângulo}} \beta = \frac{\pi}{n}$$

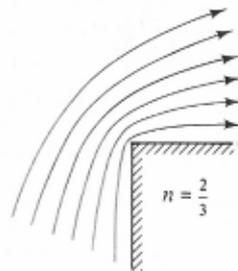
$$0 \leq \beta \leq 2\pi$$



$$\beta = 2\pi/3 = 120^\circ$$

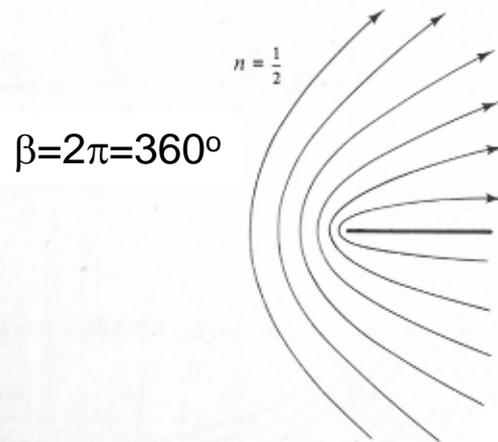
$n = \frac{3}{2}$

(c)



$n = \frac{2}{3}$

(d)



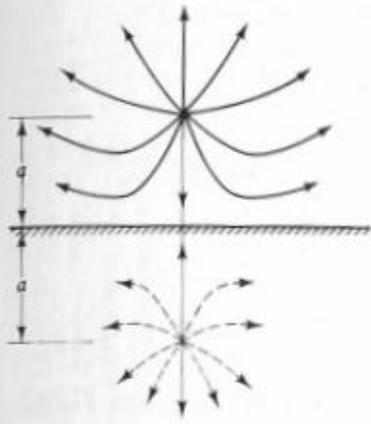
$n = \frac{1}{2}$

$$\beta = 2\pi = 360^\circ$$

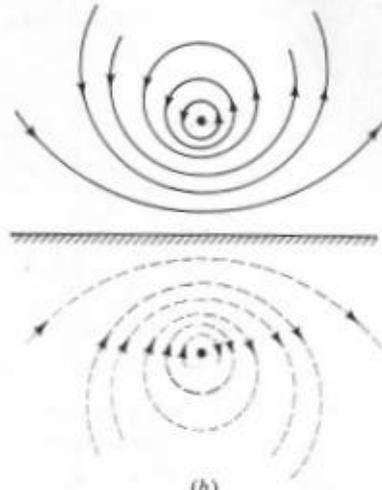
(e)

Utilizado na solução similar de C.L.
 proposta por Falkner-Skan, [link](#)

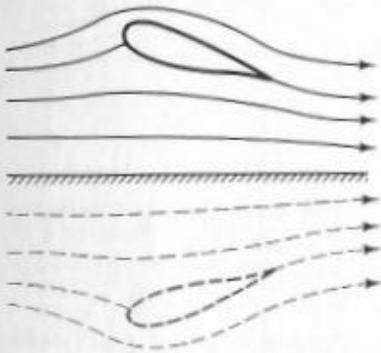
Método das Imagens



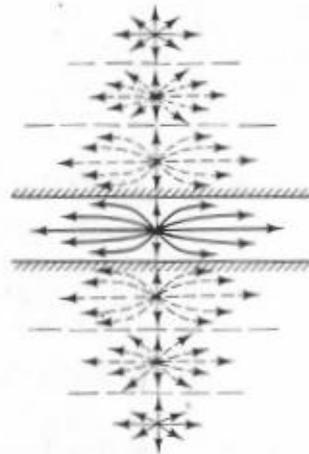
(a)



(b)



(c)

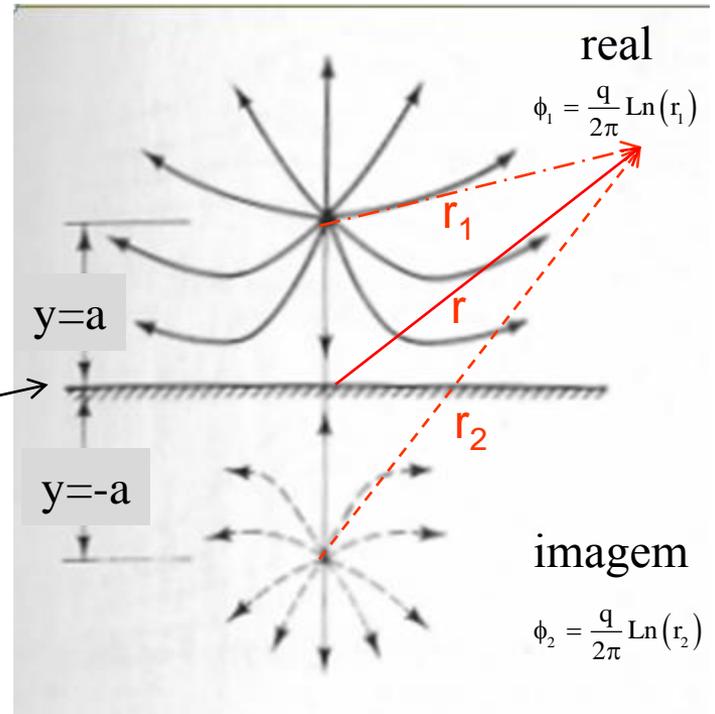


(d)

- A inserção simétrica de alguns escoamentos elementares pode gerar efeitos de uma parede (linha de corrente com curvatura zero).
- (a) Uma fonte próxima de uma parede pode ser aproximado colocando-se outra fonte simétrica (imagem espelhada),
- (b) O mesmo para um vórtice livre (neste caso eles se deslocam como anéis de fumaça).
- (c) Efeito de solo numa asa pode ser analisado de forma aproximada com esta técnica.
- (d) Uma fonte num canal 2D é simulada por uma infinita cascata de fontes.

Exemplo – Determine o campo de escoamento gerado por uma fonte posicionada a uma distância ‘a’ da parede. Utilize o método das imagens.

Linha de simetria, equivale a uma parede



$$\phi = + \frac{q}{2\pi} \left[\text{Ln}(\sqrt{x^2 + (y+a)^2}) + \text{Ln}(\sqrt{x^2 + (y-a)^2}) \right]$$

Reescrever r_1 e r_2 a partir da origem.

$$u = + \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{2x}{x^2 + (a-y)^2} + \frac{2x}{x^2 + (a+y)^2} \right]$$

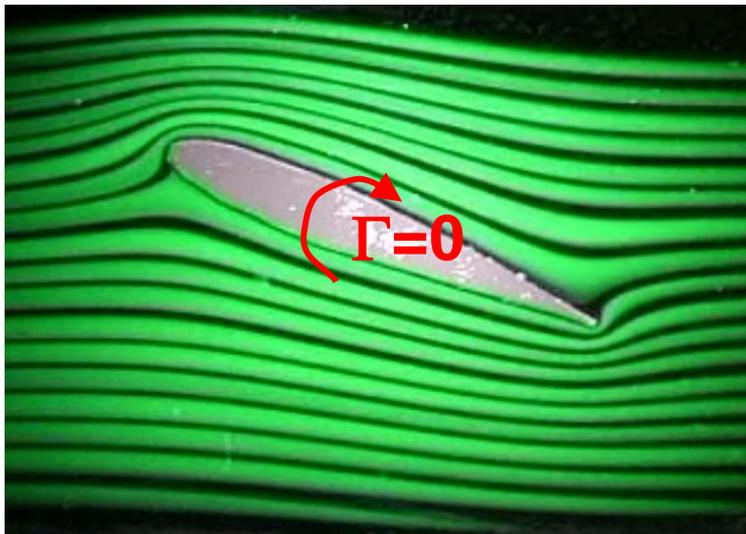
$$v = + \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{2(-a+y)}{x^2 + (a-y)^2} + \frac{2(a+y)}{x^2 + (a+y)^2} \right]$$

Observe: na origem, $y = 0$, v é nulo e define a linha de simetria ou a parede.

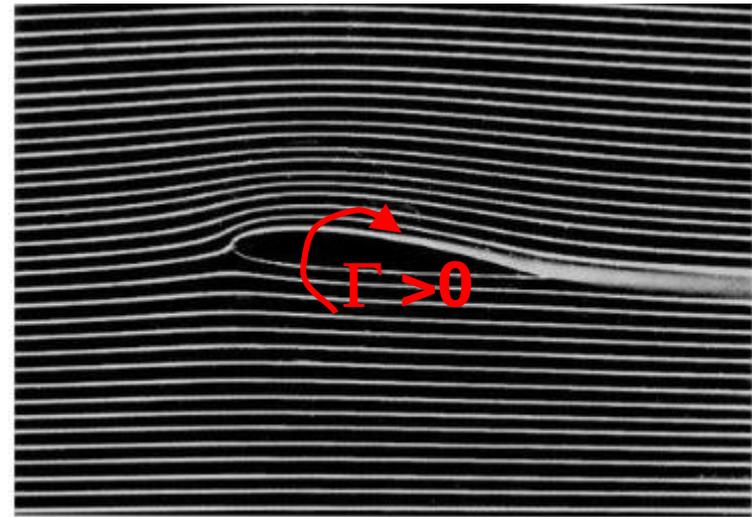
Escoamento irrotacional e escoamento real num aerofólio

- ✓ No escoamento irrotacional o perfil não apresenta sustentação, é necessário introduzir uma circulação (vorticidade)!
- ✓ No escoamento real isto ocorre naturalmente devido a existência da viscosidade. Pode-se afirmar que se o ar não tivesse viscosidade os pássaros não voariam, nem os aviões, apenas balões devido o empuxo.

Escoamento Irrotacional



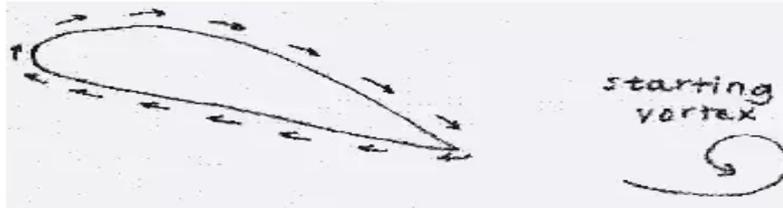
Escoamento Real



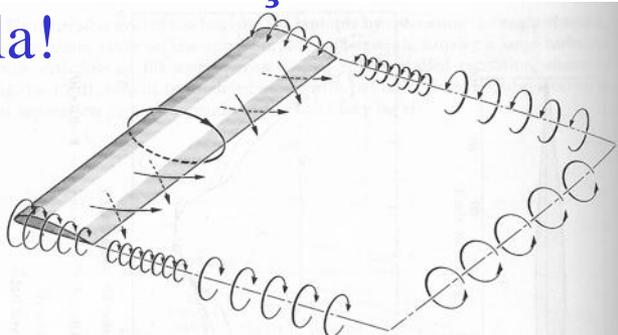
- ✓ No escoamento ideal o teorema de Kelvin demonstra que $\Gamma = 0$, como explicar sustentação em aerofólio em escoamento ideal?

Partida de uma asa - transiente

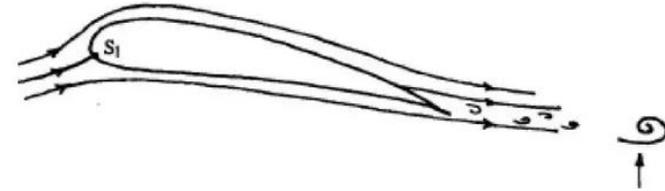
No processo de partida de uma asa 2D deixa para trás um vórtice igual e contrário na asa de forma que a soma deles é nula! Mas o vórtice que fica na asa é responsável pela sustentação.



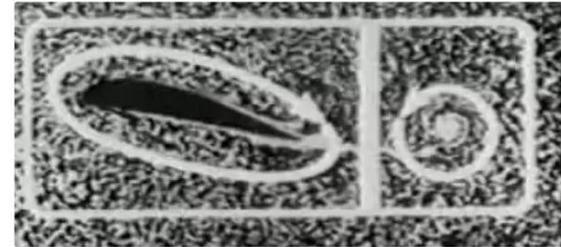
No processo de partida de uma asa finita, deixa para trás um vórtice igual e contrário na asa de forma e vórtices de ponta de asas. A circulação total também é nula!



a) Escoamento em $t = 0$



b) Escoamento em $t > 0$ Vórtice início é descarregado



c) A circulação, ou a vorticidade média, nos circuitos são iguais e contrárias tal que $\Gamma = 0$

Filmes:

[Startup vortex on a wing \(1\)](#)

[Startup vortex on a wing \(2\)](#)

Força de sustentação & teorema Kutta-Joukowski

- A força de sustentação L é normal a direção do escoamento livre. Para corpo com simetria cilíndrica com diâmetro a e comprimento w , a força sustentação por unidade de comprimento:

$$\frac{L}{w} = \rho U_0 \Gamma \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

onde U_0 é a corrente livre e Γ é a circulação num circuito que envolve o corpo.

- A equação acima decorre do Kutta-Joukowski: **‘a sustentação de um corpo cilíndrico de seção transversal qualquer é igual ao produto da densidade, velocidade livre e circulação’** (sem circulação não há sustentação!)

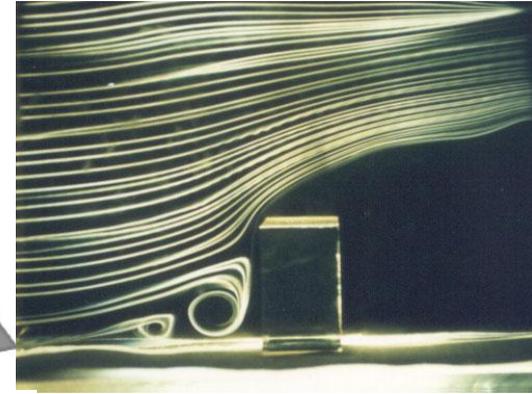
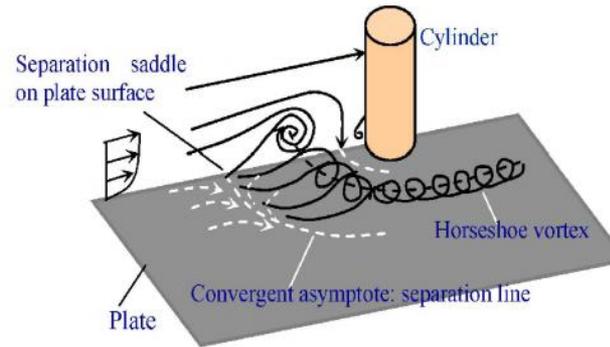
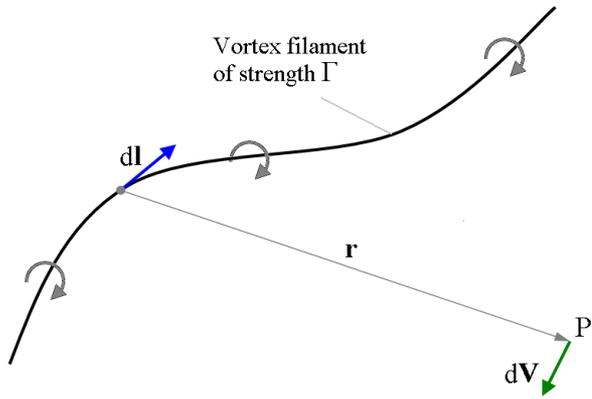
- A circulação também pode ser estimada por meio de $C_L = (1/2)\rho U^2(a \cdot w)$ usando Kutta-Joukowski;

$$L = \rho U_0 \Gamma w = \frac{1}{2} \rho U_0^2 \cdot a \cdot w \cdot C_L \rightarrow \Gamma \equiv \frac{1}{2} U_0 \cdot a \cdot C_L$$

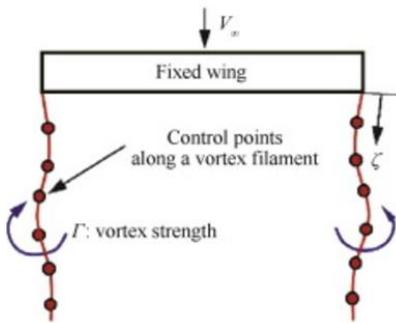
Vorticidade também gera campo de velocidades

Este tópico será abordado nos próximos slides

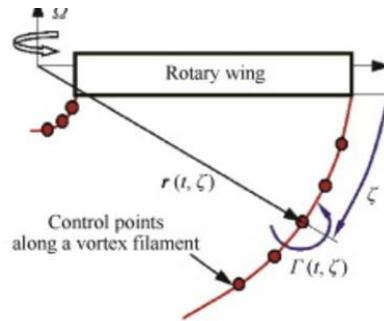
Campo de velocidade induzido por filamento de vorticidade



Asas finitas estacionárias e em rotação

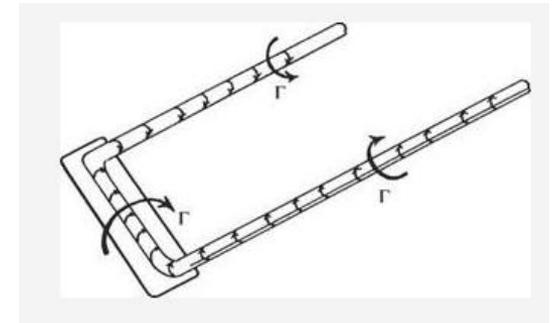


(a) For fixed wing



(b) For rotary wing

Simplified horseshoe vortex



Como determinar o campo de velocidade a partir do campo de vorticidade?

Considere:

- Fluido incompressível, campo solenoidal $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$
- Região ocupada pelo fluido tem conexão simples;
- A velocidade normal, U_n , é conhecida em toda S.C.
- A velocidade é nula no infinito, o fluido não está confinado

O problema: se $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$ como determinar \vec{V} a partir de $\vec{\omega}$?

Existe operador ∇^{-1} ; $\nabla^{-1} \times \nabla \times \vec{V} = \nabla^{-1} \times \vec{\omega} \rightarrow \vec{V} = \nabla^{-1} \times \vec{\omega}$? Resp.: não.

Propor campo de \vec{V} vem de campo \vec{A} , tal que:

$$\vec{V} = \nabla \times \vec{A}, \text{ por consequência } \vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

O objetivo é determinar \vec{A} porém, o lado direito está super-determinado, há 2

expressões para \vec{A} , $\text{grad}(\text{div}\mathbf{A})$ e $\text{lap}\mathbf{A}$.

Sem prejudicar a generalização, considere-se que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ então:

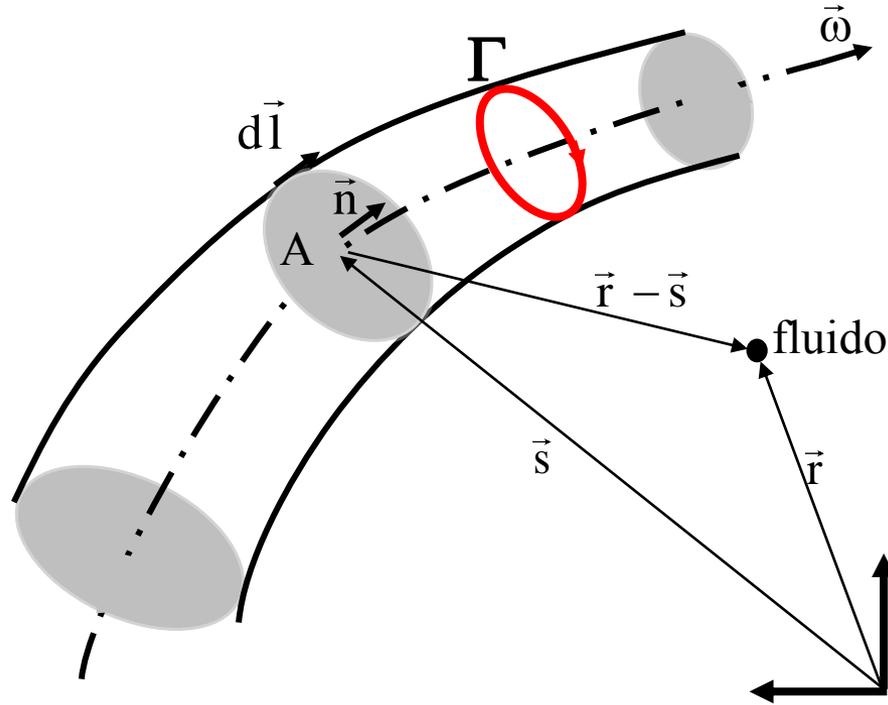
$\nabla^2 \vec{A} = -\vec{\omega}$ Eq. Poisson
componentes sist. cartesiano

$$\nabla^2 A_x = -\omega_x$$

$$\nabla^2 A_y = -\omega_y$$

$$\nabla^2 A_z = -\omega_z$$

Filamento vórtice e a Lei de Biot Savart, veja apêndice VI



O campo de velocidade a partir do campo de vorticidade é calculado a partir da lei de Biot Savart. Derivada a partir de eletromagnetismo, ela é igualmente aplicada em fluidos.

A velocidade no ponto r devido a toda extensão do filamento é obtida pela integração sobre todo o filamento - lei de Biot-Savart (1820)

Velocidade induzida pelo filamento de comprimento dl no fluido. A soma dos comprimentos dos filamentos define a velocidade do fluido, por isso tem a integral.

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}$$

Γ - circulação do filamento

dl - comprimento infinitesimal do filamento

r - vetor da origem ao fluido

s - vetor da origem ao filamento

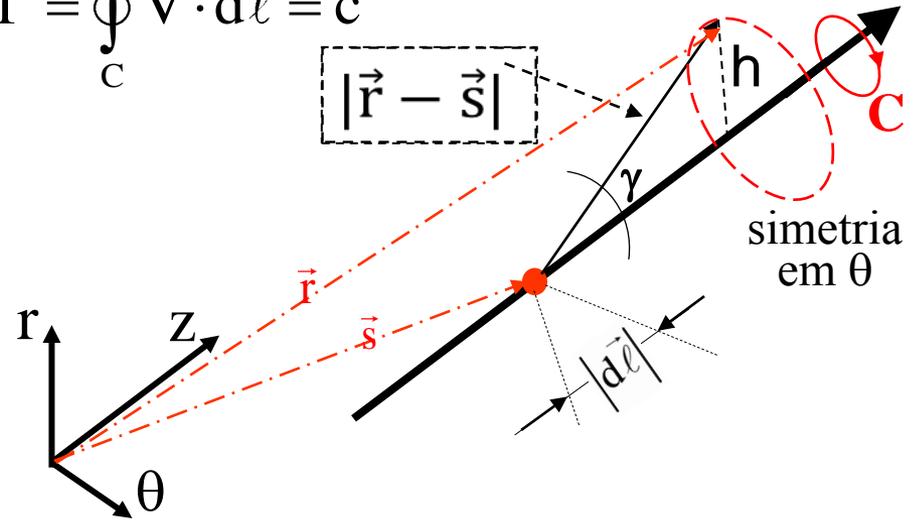
Exemplo: velocidade induzida pelo filamento retilíneo

Considere um sistema cilíndrico polar (r, θ, z) onde o filamento de vórtice, com circulação Γ , é paralelo com o eixo z .

O campo de velocidade é dado por:

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}$$

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = c^{te}$$

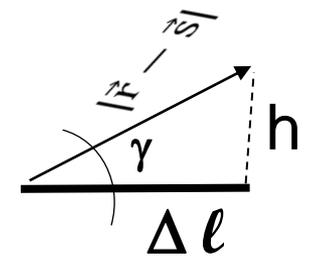


O argumento da integral possui termos que precisam ser determinados:

- i. $d\vec{l}$ é o comprimento infinitesimal tangente ao filamento;
- ii. $\mathbf{e}_{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|}$ é um vetor unitário na direção do vetor $(\mathbf{r}-\mathbf{s})$;
- iii. γ é o ângulo medido de $d\mathbf{l}$ para $|\mathbf{r}-\mathbf{s}|$

$$\frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|^2} \cdot \left[d\vec{l} \times \frac{(\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|} \right] = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|^2} \cdot \left[d\vec{l} \times \mathbf{e}_{|\vec{r}-\vec{s}|} \right]$$

Continuação Precisamos resolver , e o produto $d\vec{\ell} \times \vec{e}_{|\vec{r}-\vec{s}|}$ em função da altura, h , normal ao filamento (somente para este caso). Considere o triângulo :



$$|\vec{r} - \vec{s}| = h / \sin(\gamma) = \operatorname{cosec}(\gamma) \cdot h$$

O $|d\vec{\ell}|$ é tangente ao filamento mas precisa ser expresso em função de h e γ . O segmento $\Delta\ell$ é paralelo ao vetor $d\vec{\ell}$, usando similaridade de triângulos:

$$|\vec{r} - \vec{s}| = h / \Delta\ell = \operatorname{tg}(\gamma) \rightarrow \Delta\ell = h \cdot \operatorname{cotg}(\gamma) \quad \text{diferenciando:} \quad d\ell = h \cdot \operatorname{cosec}^2(\gamma) d\gamma$$

O produto vetorial $d\vec{\ell} \times \vec{e}_{|\vec{r}-\vec{s}|}$ aponta para direção θ :

$$d\vec{\ell} \times \vec{e}_{(\vec{r}-\vec{s})} = \left\{ |d\vec{\ell}| \cdot 1 \right\} \cdot \sin(\gamma) \vec{e}_{d\vec{\ell}} \times \vec{e}_{(\vec{r}-\vec{s})} = h \cdot \operatorname{cosec}^2(\gamma) \cdot \sin(\gamma) \cdot \vec{e}_\theta$$

Retornando ao integrando da lei de Biot Savart:

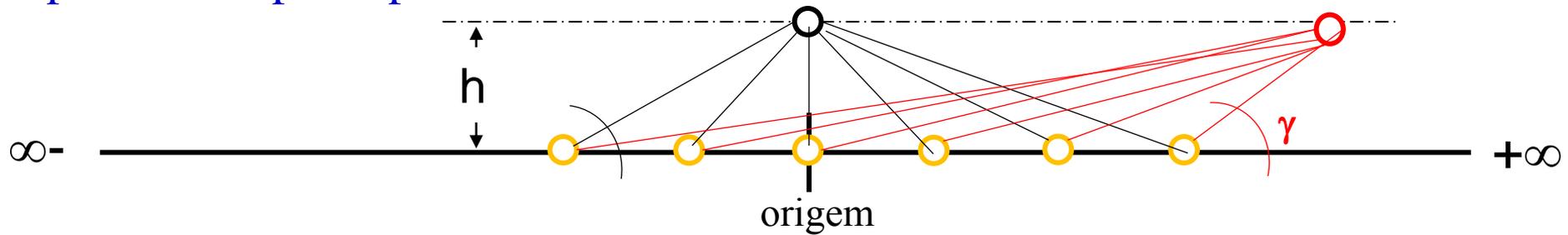
$$\frac{d\vec{\ell} \times \vec{e}_{\vec{r}-\vec{s}}}{|\vec{r} - \vec{s}|^2} = \left(\frac{1}{h^2 \cdot \operatorname{cosec}^2(\gamma)} \right) h \cdot \operatorname{cosec}^2(\gamma) \cdot \sin(\gamma) d\gamma \cdot \vec{e}_\theta = \frac{\sin(\gamma) d\gamma}{h} \cdot \vec{e}_\theta$$

A lei de Biot-Savart para um filamento vórtice paralelo ao eixo z

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{\sin(\gamma) d\gamma}{h} \cdot \vec{e}_\theta$$

Continuação Precisamos definir os limites de integração que dependem se o segmento é infinito, finito ou semi-infinito.

Segmento Infinito – exemplo com cálculo de velocidade induzida a uma distância h do filamento, pontos com cor preta e vermelha; o filamento é representado pelos pontos amarelos.



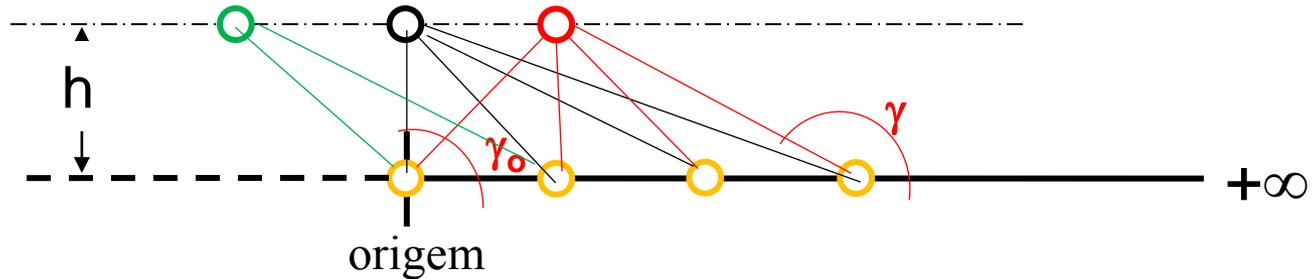
Fica claro que o domínio de integração para qualquer ponto no fluido é $\pi \leq \gamma \leq 0$ sendo que π e 0 correspondem a um ponto no filamento dl está a $+\infty$ e $-\infty$ da origem, integração é:

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen}(\gamma) d\gamma}{h} \cdot \vec{e}_\theta = + \frac{\Gamma}{2\pi h} \cdot \vec{e}_\theta$$

O campo de velocidade possui componente v_θ somente, num plano ortogonal a direção do filamento de vórtice. O resultado concide com o campo gerado pelo vórtice na origem! Como era de se esperar.

Continuação

Segmento semi-infinito – exemplo com cálculo de velocidade induzida a uma distância h do filamento, pontos com cor preta e vermelha; o filamento é representado pelos pontos amarelos.

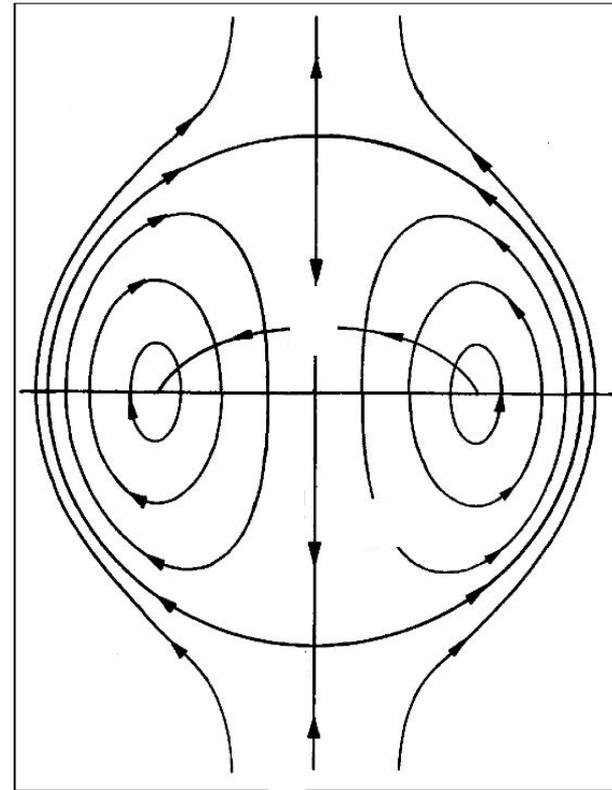


Fica claro que o domínio de integração é $\gamma_0 \leq \gamma \leq \pi$, $\gamma_0 \leq \pi/2$ e a integração é:

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\pi}^{\theta_0} \frac{\text{sen}(\gamma) d\gamma}{h} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi h} [1 - \cos(\gamma_0)] \cdot \vec{e}_\theta$$

O campo de velocidade possui componente v_θ somente, num plano ortogonal a direção do filamento de vórtice. O resultado concide com o campo gerado pelo vórtice na origem! Como era de se esperar.

Vórtice esférico de M.J.M. Hill (1894)



- O vórtice esférico de Hill é uma estrutura presente em jatos, escoamento de gotas ou de bolhas. As estruturas são auto-propelidas devido a interação dos vórtices.

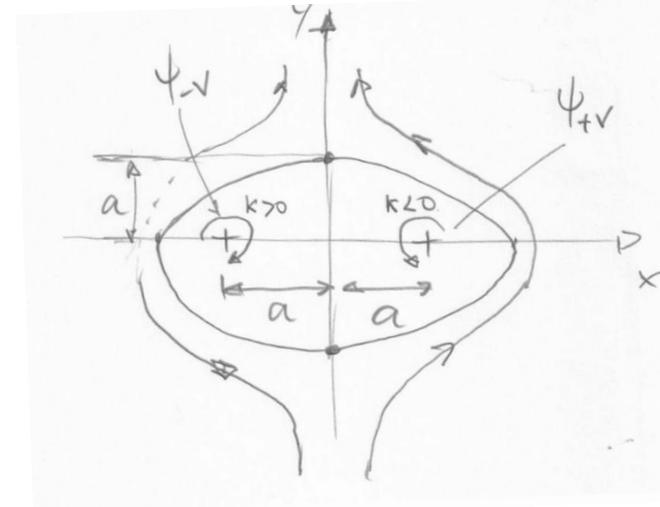
[Giant Smoke Rings - Cool Science Experiment](#)

[The Vortex Ring, Close Up, in Slow Motion](#)

[Dolphins playing bubble ring](#)

Par vórtices 2D em contra-rotação (não usa Biot Savart)

Exemplo versão 2D vórtice de Hill. Considere dois vórtices espaçados de 'a' em relação ao eixo x e superpostos a um campo uniforme vertical ascendente com velocidade +V₀. Determine a função corrente e o campo de velocidades. :



$$\begin{aligned} \psi &= \psi_{-v} \text{ anti-horário} + \psi_{+v} \text{ horário} + \psi_U \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \text{Ln}(r_1) + \frac{\Gamma}{2\pi} \text{Ln}(r_2) + -V_0 r \text{Sen}(\theta) \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \text{Ln} \left[\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \right] + \frac{\Gamma}{2\pi} \text{Ln} \left[\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] - V_0 x \end{aligned}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\Gamma y}{2\pi} \left[\frac{1}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{1}{(x-a)^2 + y^2} \right]$$

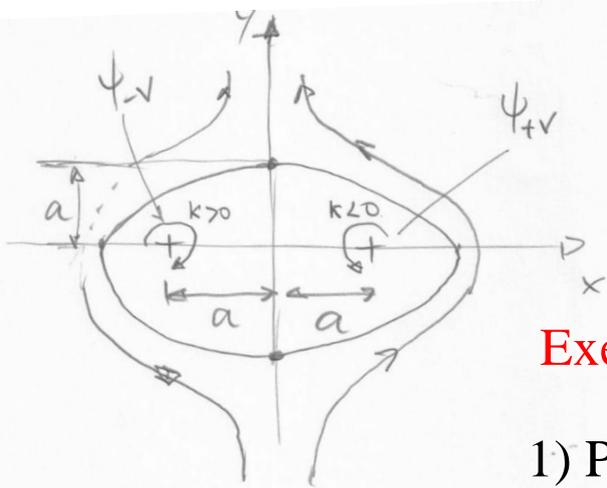
$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = V_0 - \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\frac{(x+a)}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} \right]$$

- Para $x = 0$, $u \equiv 0$ verifique!
- Em $x = 0$, $v = (\Gamma/2\pi)[2a/(a^2+y^2)] + V_0$
- Estagnação, $y=h$, $V_0 - \Gamma 2a/[2\pi(a^2+h^2)]=0$
- Para manter vórtices estacionários a vel. v resultante induzida deve ser nula!
- Velocidade induzida ψ_{-v} em ψ_{+v} $v(a,0) = (\Gamma/2\pi)[2a/(4a^2)] + V_0 = 0$ logo $V_0 = \Gamma/4a\pi$

Par vórtices em contra-rotação continuação



Exercício p/
fazer em casa



Exemplo: Demonstre que:

- 1) Para $x = 0$, $u \equiv 0$;
- 2) Em $x = 0$, $v(0,y) = V_0 - (\Gamma a) / [\pi(a^2 + y^2)]$;
- 3) Para manter vórtices estacionários a vel. v resultante induzida deve ser nula; $v(a,0) = V_0 - (\Gamma / 2\pi)[2a / (2a^2)] \equiv 0$ logo velocidade vertical ascendente $V_0 = \Gamma / 2a\pi$;
- 4) Estagnação, $v(0,a) = V_0 - (\Gamma / 2\pi) / [2a(a^2 + a^2)] = 0$, simplificando: $V_0 = \Gamma / 2a\pi$. Observe que definição V_0 coincide com definição V_0 item (3) como era de se esperar!

Bibliografia

1. Anderson, J.D., 1982, Modern Compressible Flow, McGraw Hill.
2. Batchelor GK, 1967, An Introduction to fluid dynamics, Cambridge Un. Press.
3. Lamb H, 1932, Hydrodynamics, Dover.
4. Lighthill, J., 1986, An informal introduction to theoretical fluid mechanics, Oxford Press
5. Prandtl L. and Tietjens O.J., 1934, Fundamentals of hydro and aeromechanics, Dover.
6. Shapiro AH, 1972, The NCFMF book of film notes, MIT Press.
7. Huges and Brighton, Fluid Dynamics, Schaum's Outline Series, 1967 McGraw Hill
8. Karamcheti, K. , 1966, Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics, John Wiley & Sons
9. Yih, Chia-Shum, 1979, Fluid Mechanics, West River Press
10. Currie, I.G, 1975, Fundamental Mechanics of Fluids, McGraw Hill
11. . Saffaman, P.G., 1992, Vortex Dynamics, Cambridge Un. Press

Lista de Apêndices

- I. Potencial Complexo
- II. Semicorpo de Rankine
- III. Força de sustentação no cilindro com circulação
- IV. Cilindro acelerando num fluido ideal, conceito de massa virtual
- V. escoamento viscoso potencial
- VI. Demonstração lei de Biot-Savart

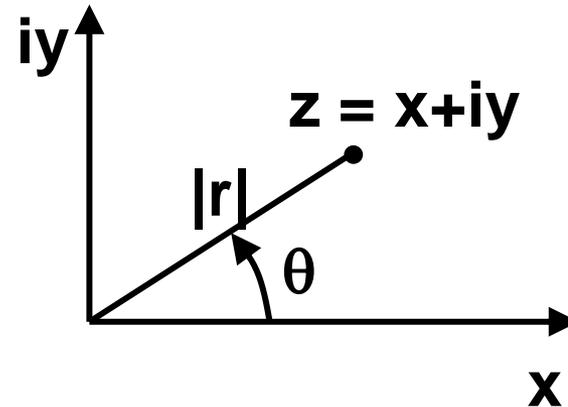
APÊNDICE I

- ✓ As funções potencial e corrente podem ser apresentadas juntas usando variáveis complexas por meio do Potencial Complexo.
- ✓ Esta técnica é muito utilizada em escoamento potencial bi-dimensional.

Potencial Complexo

- ✓ Pode-se definir um potencial complexo: $F(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{i} = \sqrt{-1} \\ \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{i}y \\ \mathbf{r}e^{i\theta} = r\{\cos(\theta) + i\sin(\theta)\} \end{array} \right.$$



Equações de Cauchy-Riemann (2D)

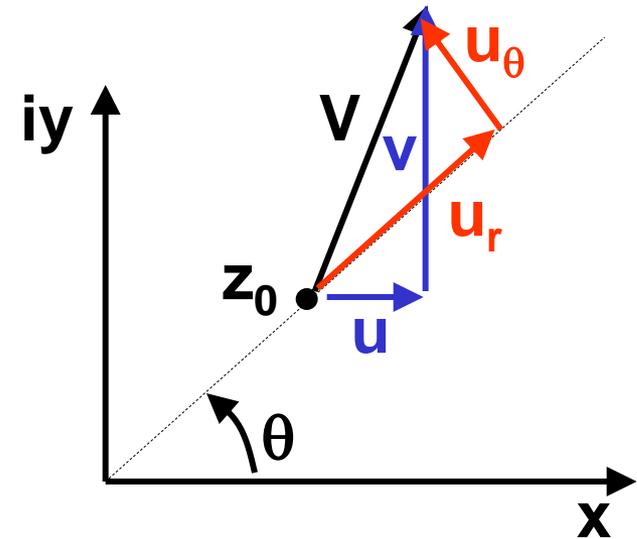
- ✓ As condições de Cauchy-Riemann p/ as funções $\phi(x,y)$ e $\psi(x,y)$:

$$u \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

- ✓ Garantem que elas são funções analíticas e possibilitam definir o potencial complexo $F(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$

A velocidade complexa em coordenadas Polar

- ✓ A velocidade em z_0 é V com componentes u e v em coordenadas cartesianas ou u_θ e u_r em coordenadas polar



$$u = u_r \cos(\theta) - u_\theta \sin(\theta)$$

$$v = u_r \sin(\theta) + u_\theta \cos(\theta)$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

$$w(z) = \{u_r \cos(\theta) - u_\theta \sin(\theta)\} - i\{u_r \sin(\theta) + u_\theta \cos(\theta)\}$$

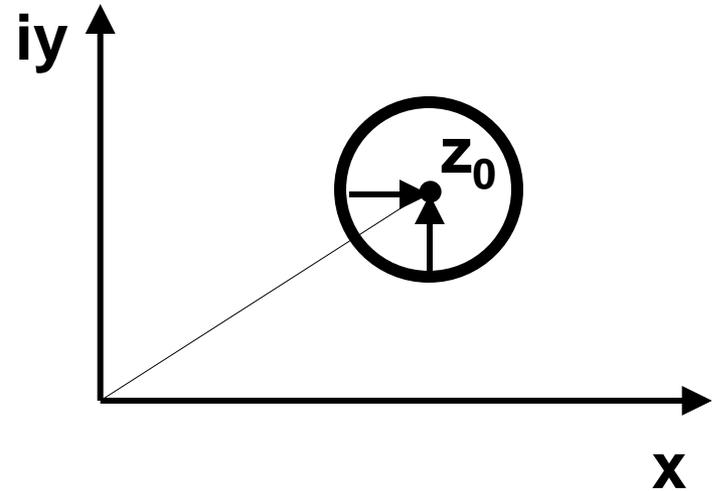
$$w(z) = (u_r - iu_\theta) \cdot e^{-i\theta}$$

Função Analítica

- ✓ A função $F(z)$ é analítica pq $\phi(x,y)$ e $\psi(x,y)$ satisfazem Cauchy-Riemann. Além disto, se F é analítico, sua derivada existe:

$$w(z) = \frac{dF}{dz} = \mathbf{Lim}_{\delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \delta z) - F(z)}{\delta z}$$

e independe da direção
que δz se aproxima de z_0 .



A Velocidade Complexa, $w(z)$

✓ Cálculo da derivada fazendo $dz=dx$ e y c^{te}.

$$\frac{dF}{dz} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \delta x, y) + i\psi(x + \delta x, y) - \phi(x, y) + i\psi(x, y)}{\delta x} = \frac{d\phi}{dx} + i \frac{d\psi}{dx}$$

✓ Reconhecendo que $d\phi/dx = u$ e $d\psi/dx = -v$, então:

$$w(z) = \frac{dF}{dz} = u - iv$$

✓ Verifique que $dz=idy$ (e x c^{te}) o resultado é o mesmo!

✓ Conclusões:

1. A derivada do potencial complexo resulta no complexo conjugado da velocidade.
2. O conhecimento do potencial complexo F fornece o campo de velocidade por meio de uma simples derivada!

Potencial Complexo Conjugado

$$\bar{F}(z) = \varphi(x,y) - i\psi(x,y) \quad \rightarrow \quad \bar{w}(z) = \frac{d\bar{F}}{dz} = u - iv$$

O produto: $w(z) \cdot \overline{w(z)} = |w(z)|^2 = u^2 + v^2 = q^2$

é o quadrado da velocidade resultante.

- ✓ Se $|w|^2$ é conhecido pode-se determinar o campo de pressão utilizando Bernoulli.
- ✓ Os pontos de estagnação ($u=v=0$) são determinados pelas raízes de $|w|^2 = 0$

Potencial Complexo

$$F(z) = \phi(z) + i\psi(z)$$

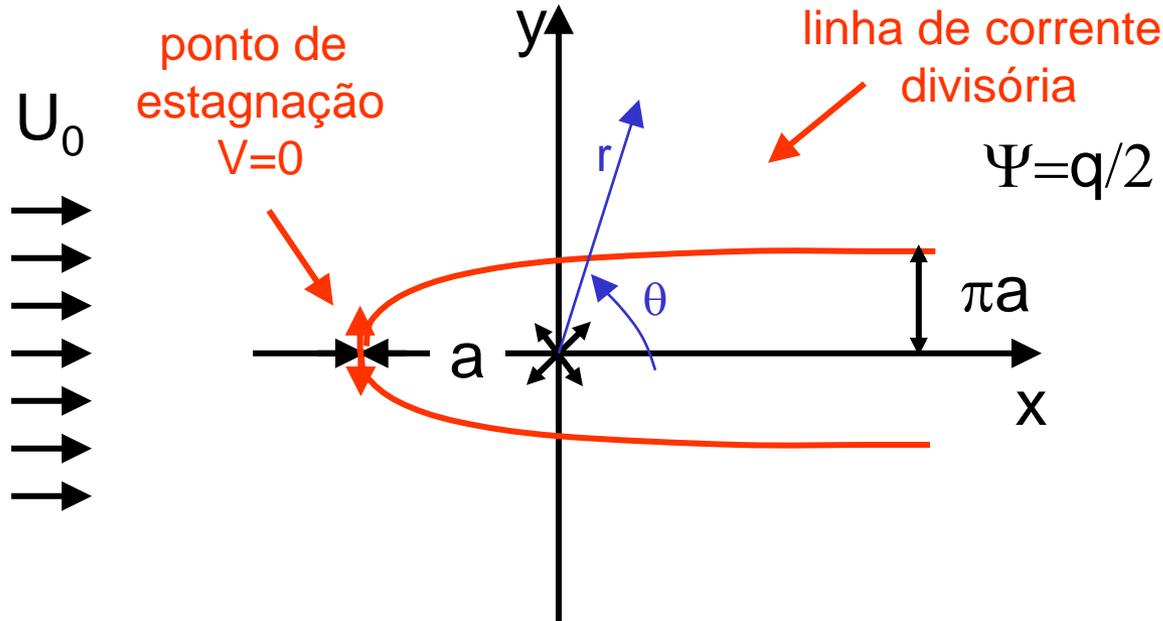
Escoamento	$F(z)$	ϕ	ψ
Uniforme	$F(z) = (U - iV)z$	$[xU + yV]$	$[yU - xV]$
Fonte (+) ou Sorvedouro (-) em z_0	$F(z) = \pm \frac{q}{2\pi} \text{Log}(z - z_0)$	$\pm \frac{q}{2\pi} \text{Log}(r - r_0)$	$\pm \frac{q}{2\pi} (\theta - \theta_0)$
Vórtice Anti-horário em z_0	$F(z) = i \frac{\Gamma}{2\pi} \text{Log}(z - z_0)$	$\frac{\Gamma}{2\pi} (\theta - \theta_0)$	$\frac{\Gamma}{2\pi} \text{Log}(r - r_0)$
Doublet em z_0 (eixo $x > 0$)	$F(z) = \frac{\Lambda}{2\pi(z - z_0)}$	$\frac{\Lambda \cos(\theta - \theta_0)}{2\pi(r - r_0)}$	$-\frac{\Lambda \sin(\theta - \theta_0)}{2\pi(r - r_0)}$
Doublet em z_0 (eixo $y > 0$)	$F(z) = \frac{i\Lambda}{2\pi(z - z_0)}$	$-\frac{\Lambda \sin(\theta - \theta_0)}{2\pi(r - r_0)}$	$\frac{\Lambda \cos(\theta - \theta_0)}{2\pi(r - r_0)}$

APÊNDICE II

Estudo do semi-corpo de Rankie e do corpo completo.

Semi Corpo de Rankine

- ✓ Considere um escoamento uniforme e uma fonte na origem:



$$\psi = \psi_U + \psi_F = U_0 \cdot r \cdot \text{sen}(\theta) + \frac{q}{2\pi} \theta$$

- ✓ Quando considera-se a presença de um corpo (parede) é mais conveniente trabalhar com ψ pq $\psi = c^{te}$ pode representar uma parede!

Semicorpo de Rankine I: p^{to} estagnação

✓ Se a função corrente é:

$$\psi = U_0 \cdot r \cdot \text{sen}(\theta) + \frac{q}{2\pi} \theta$$

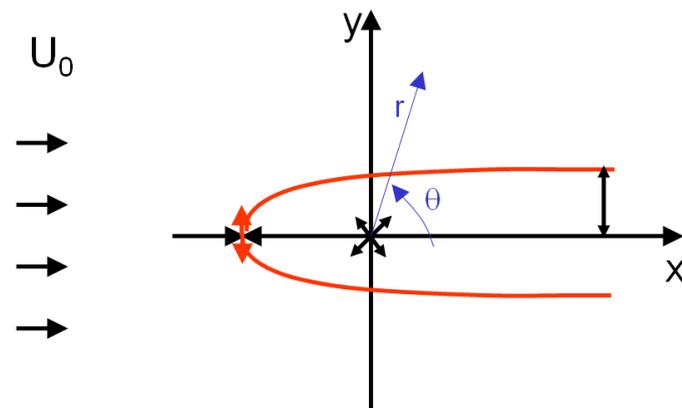
✓ Então o campo velocidades

$$v_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = U_0 \cdot \cos(\theta) + \frac{q}{2\pi r}$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_0 \cdot \text{sen}(\theta)$$

✓ No ponto de estagnação, $\theta = -\pi$, $r = a$ e $v_r = v_\theta = 0$, então a distância da estagnação a origem:

$$0 = U_0 \cdot \cos(\pi) + \frac{q}{2\pi a} \rightarrow a = \frac{q}{2\pi \cdot U_0}$$



✓ ψ que passa pela estagnação $(r, \theta) = (a, \pi)$ é, $\psi = q/2$. Esta linha de corrente define o semicorpo de Rankine.

Semi Corpo de Rankine II: forma do corpo

✓ Sendo ψ definido por: $\psi = U_0 \cdot r \cdot \text{sen}(\theta) + \frac{q}{2\pi} \theta$

✓ A forma do corpo de Rankine, (r, θ) , é determinada pela linha de corrente divisória, i.e. $\theta = \pi \rightarrow \psi = q/2$:

$$\frac{q}{2} = U_0 \cdot r \cdot \text{sen} \theta + \frac{q}{2\pi} \theta \rightarrow r \theta = \frac{q/2 \cdot 1 - \theta/\pi}{U_0 \cdot \text{sen} \theta} \rightarrow$$

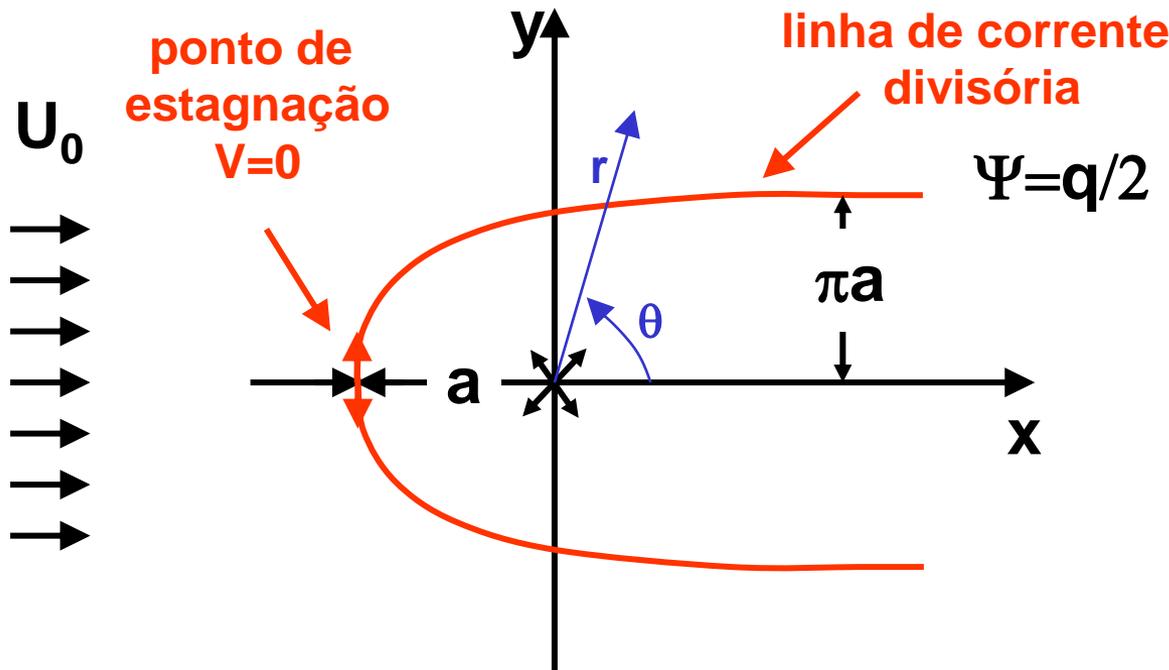
Equação do semicorpo

$$r \theta \equiv \frac{q}{2U_0\pi} \left(\frac{\pi - \theta}{\text{sen}\theta} \right)$$



No p^{to} stag. $\theta = \pi$ e $r(\pi)$ é:

$$r \pi \equiv a \underbrace{\lim_{\theta \rightarrow \pi} \left(\frac{\pi - \theta}{\text{sen}\theta} \right)}_1 \equiv a$$

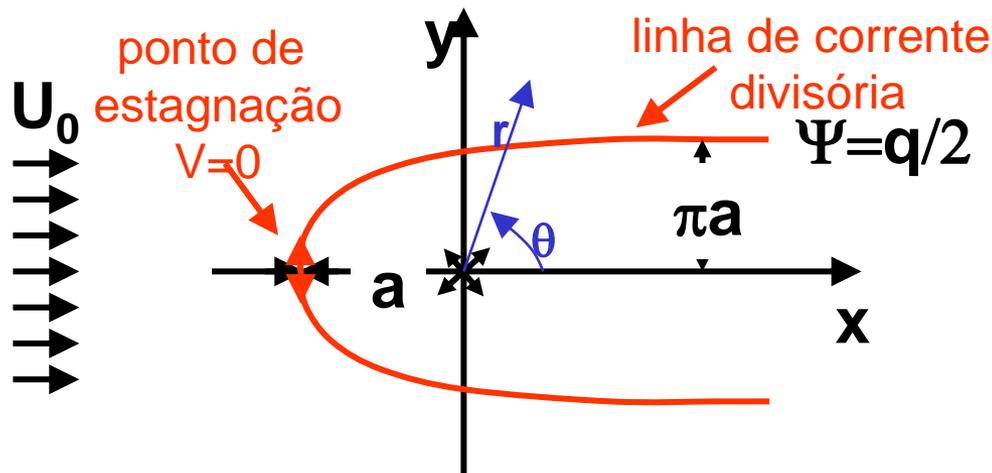


Semi Corpo de Rankine III: largura do corpo

✓ O corpo não cresce indefinidamente na direção radial, sua largura máxima é $y_{\max} = \pi a$. Esta distância é determinada fazendo o limite para $x \rightarrow \infty$ ou $\theta \rightarrow 0$

$$r(0) = a \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\pi - \theta}{\sin \theta} \right) = \frac{a\pi}{\theta}$$

Entretanto, para $\theta \rightarrow 0$ então $x \rightarrow \infty$ e $r \rightarrow x$ e $\theta \rightarrow y/x$,
logo $y_{\max} = r(0) \cdot \theta$ então $y_{\max} = (a \pi / \theta) \cdot \theta \rightarrow y_{\max} = a \pi$



Semi Corpo de Rankine IV: coef. pressão

✓ A velocidade resultante no campo é:

$$V^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(U_0 \cdot \cos(\theta) + \frac{q}{2\pi r} \right)^2 + (-U_0 \cdot \sin(\theta))^2$$

✓ Mas, $a = q/2\pi U_0$ então $q=2a\pi U_0$. V^2 fica em função da distância 'a' :

$$V^2 = U_0^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 + 2 \cdot \cos \theta \cdot \left(\frac{a}{r} \right) \right) \rightarrow \frac{V^2}{U_0^2} = 1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 + 2 \cdot \cos \theta \cdot \left(\frac{a}{r} \right)$$

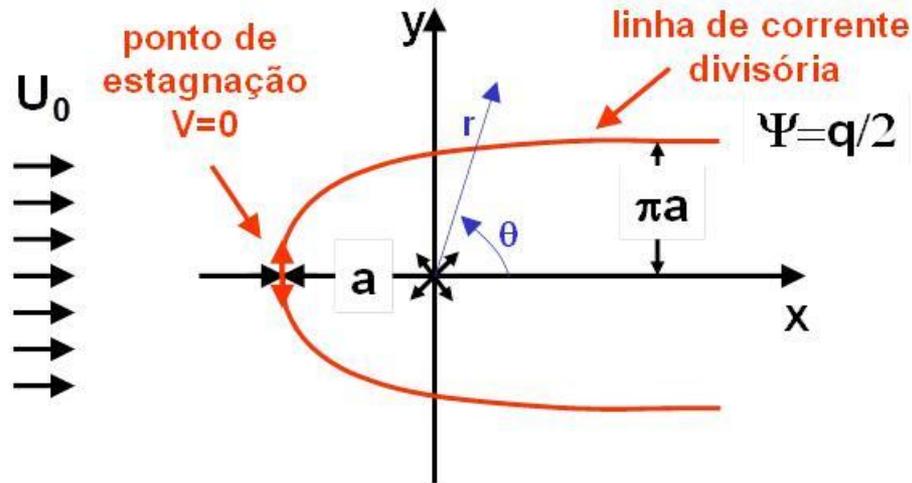
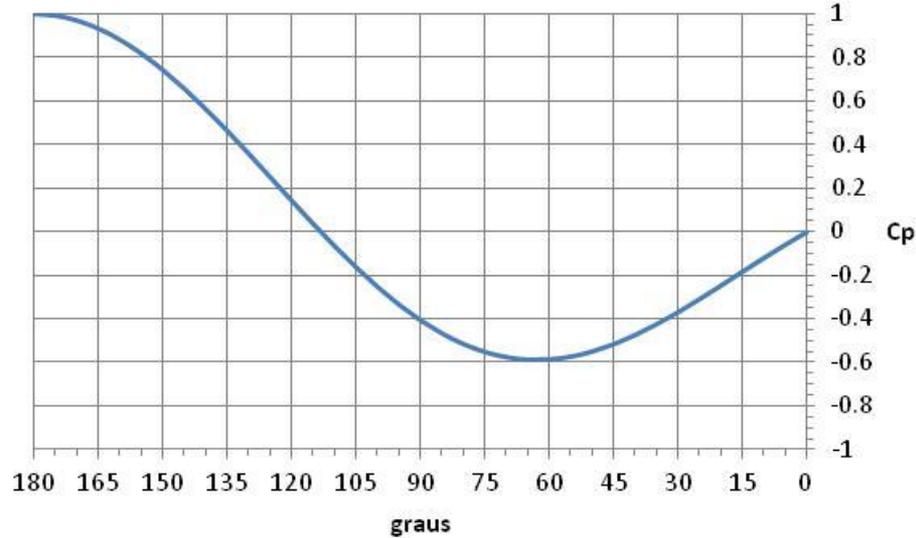
✓ Distribuição pressão no campo é determinada por Bernoulli

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho U_0^2 \rightarrow \frac{(p - p_0)}{(1/2) \rho U_0^2} = 1 - \left(\frac{V}{U_0} \right)^2$$

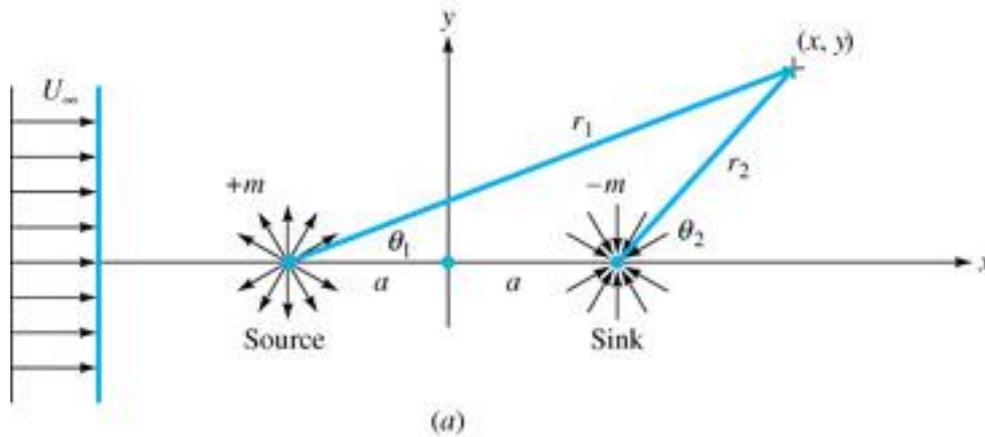
✓ Em termos do $C_p = -\left(\frac{a}{r} \right)^2 - \left(\frac{a}{r} \right) \cdot 2 \cdot \cos \theta$, no corpo: $r \theta \equiv a \left(\frac{\pi - \theta}{\sin \theta} \right)$

$$C_p = -\left(\frac{\sin \theta}{\pi - \theta} \right)^2 - \left(\frac{\sin 2\theta}{\pi - \theta} \right)$$

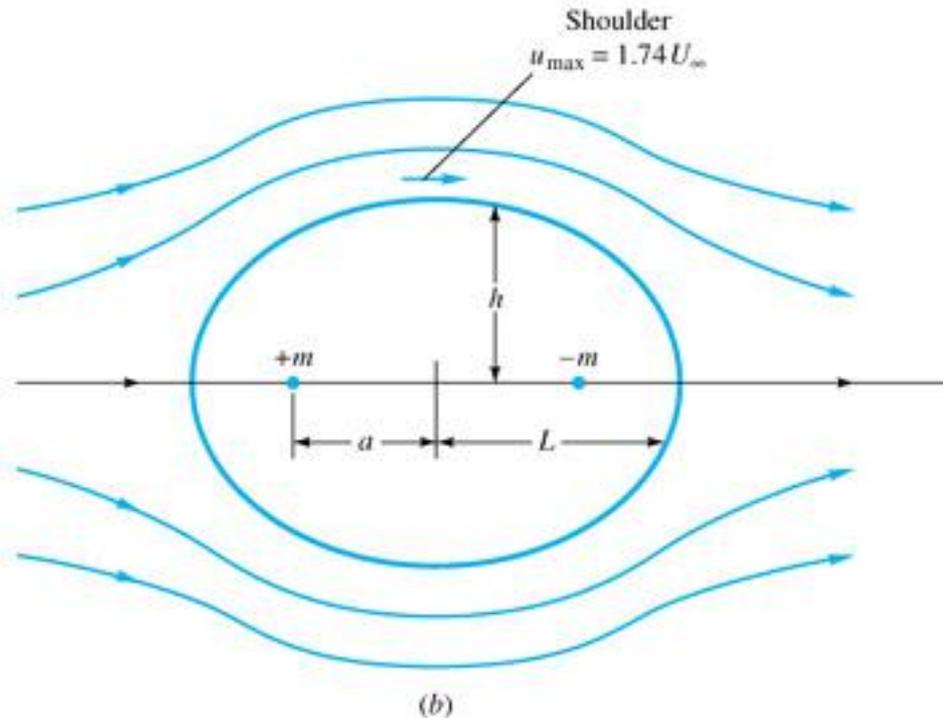
Coeficiente de pressão para semi-corpo



Oval Rankine I



(a)

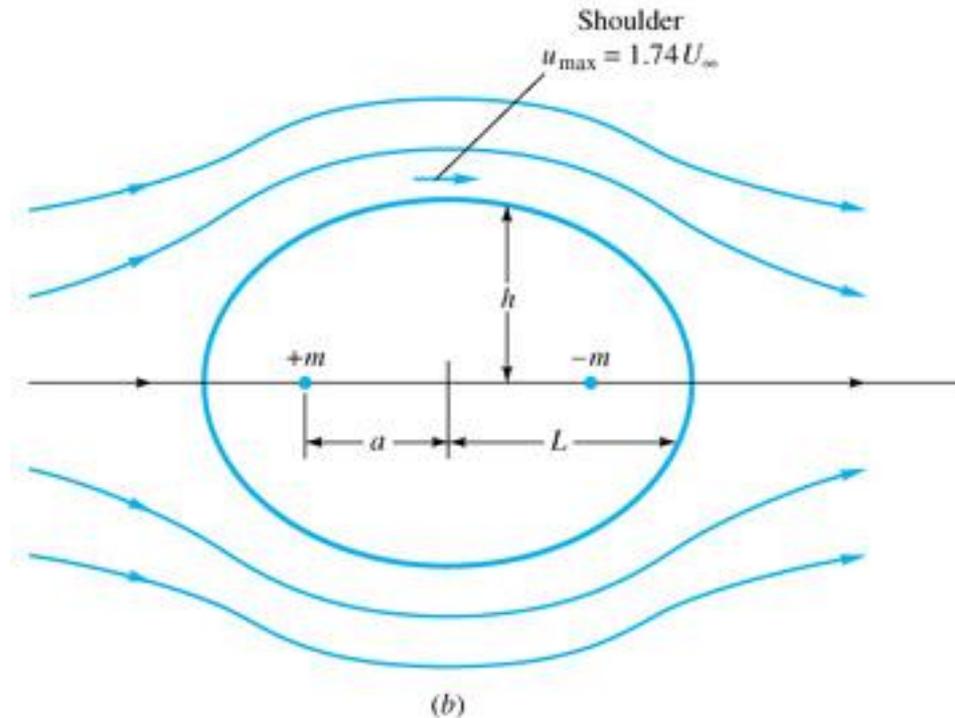
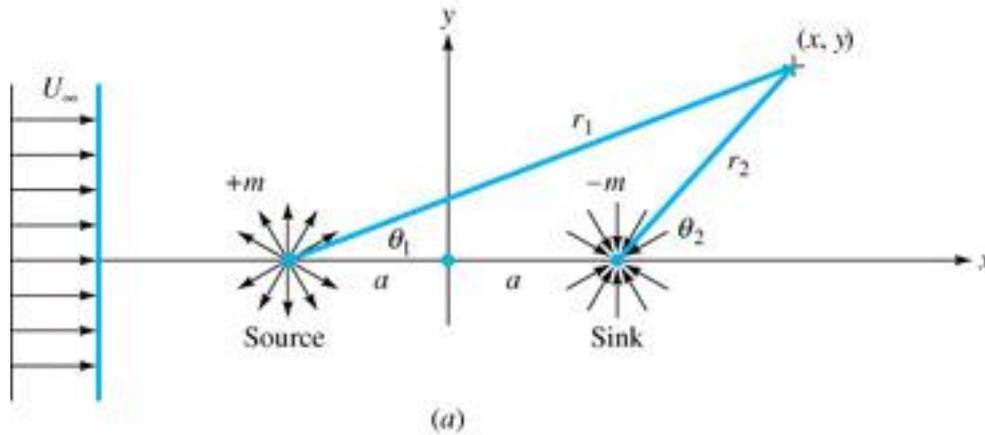


(b)

A oval de Rankine é obtida pela superposição de um escoamento uniforme, uma fonte e um sorvedouro de mesma intensidade e espaçados de $2a$.

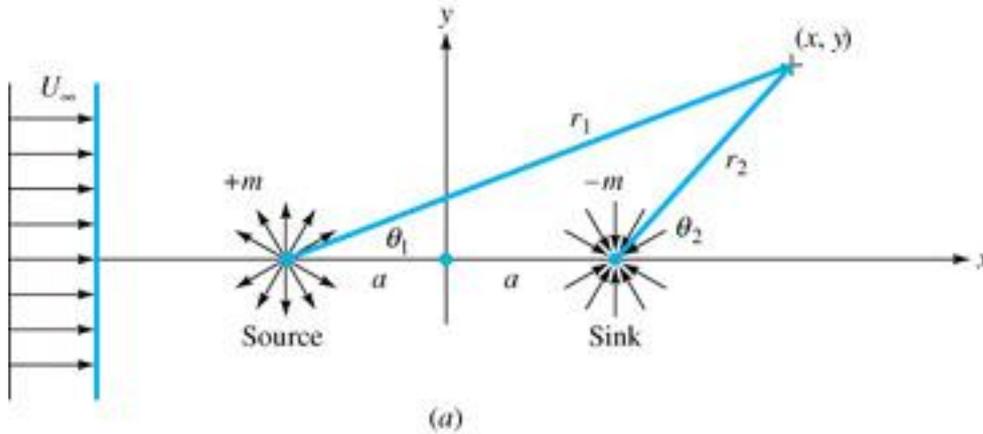
Veja oval Rankine no Apêndice IV

Oval Rankine I

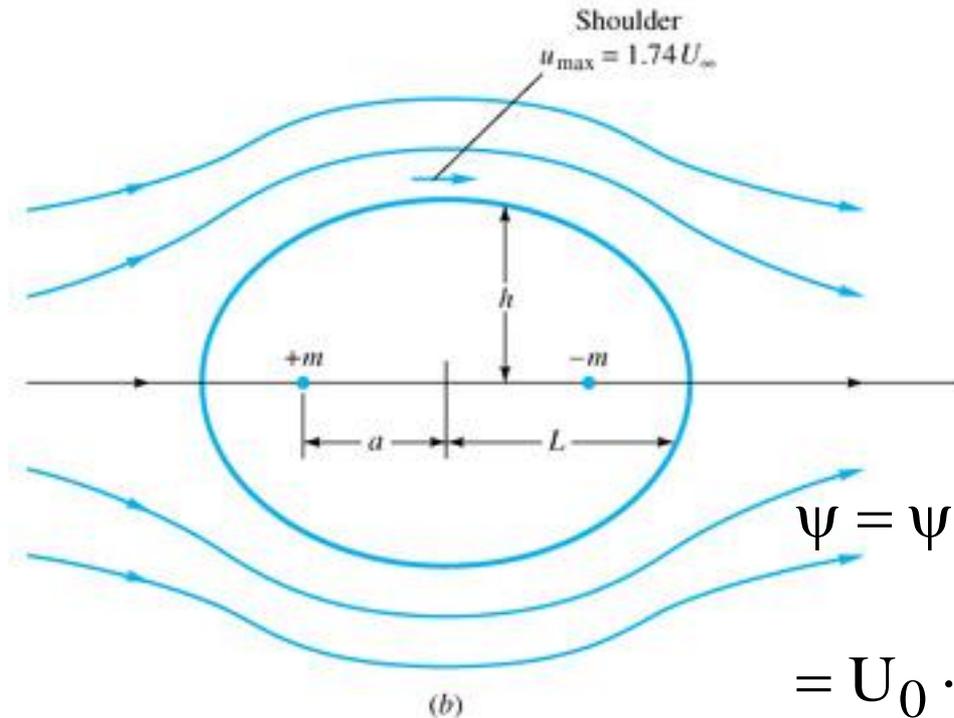


A oval de Rankine é obtida pela superposição de um escoamento uniforme, uma fonte e um sorvedouro de mesma intensidade e espaçados de $2a$.

Oval Rankine I



A oval de Rankine é obtida pela superposição de um escoamento uniforme, uma fonte e um sorvedouro de mesma intensidade e espaçados de $2a$.



$$\begin{aligned}\Psi &= \Psi_U + \Psi_F + \Psi_S \\ &= U_0 \cdot r \cdot \text{sen}(\theta) + \frac{q}{2\pi} \theta_1 - \frac{q}{2\pi} \theta_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi &= \Psi_U + \Psi_F + \Psi_S \\ &= U_0 \cdot r \cdot \text{sen}(\theta) - \frac{q}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)\end{aligned}$$

Oval Rankine II

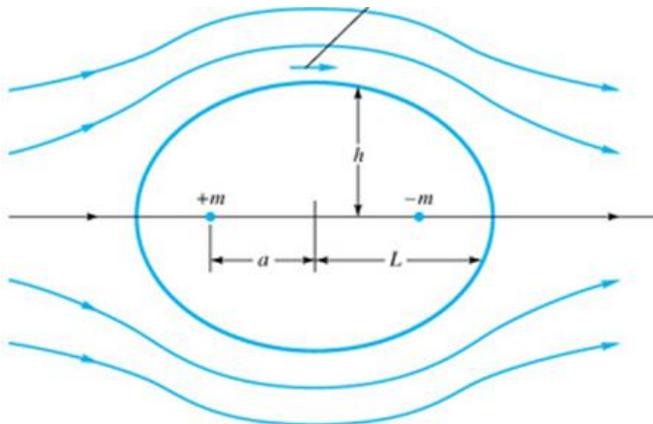
Mas a função corrente de uma fonte e de um sorvedouro já são conhecidas portanto;

$$\psi = \psi_U + (\psi_F + \psi_S) = U_0 \cdot r \cdot \text{sen}(\theta) - \frac{q}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)$$

Os semi-eixos maior e menor, L e h , da oval são determinados de forma similar ao semi-corpo de Rankine.

✓ Ponto estagnação $(L,0)$ $u = v = 0$ e encontra-se L/a) e determina-se que o valor de $\psi(L,0) = 0$;

✓ No ponto $(0,h)$ $\psi(0,h) = 0$ pq pertence a oval, desta eq. tira-se h/a);



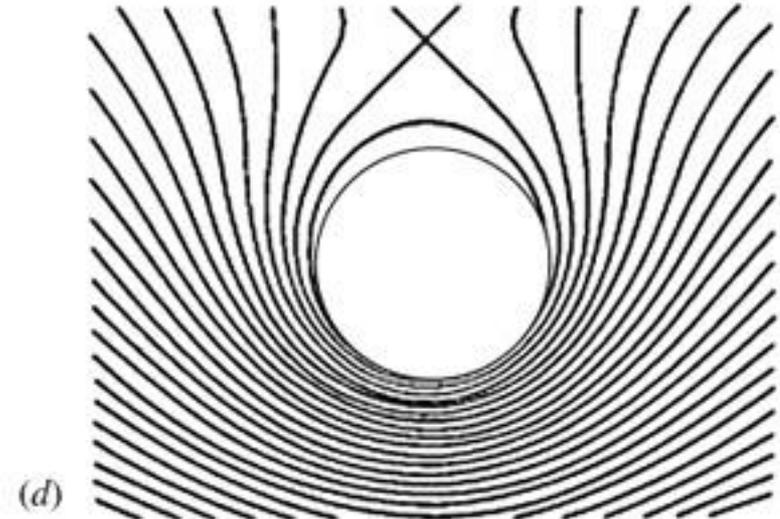
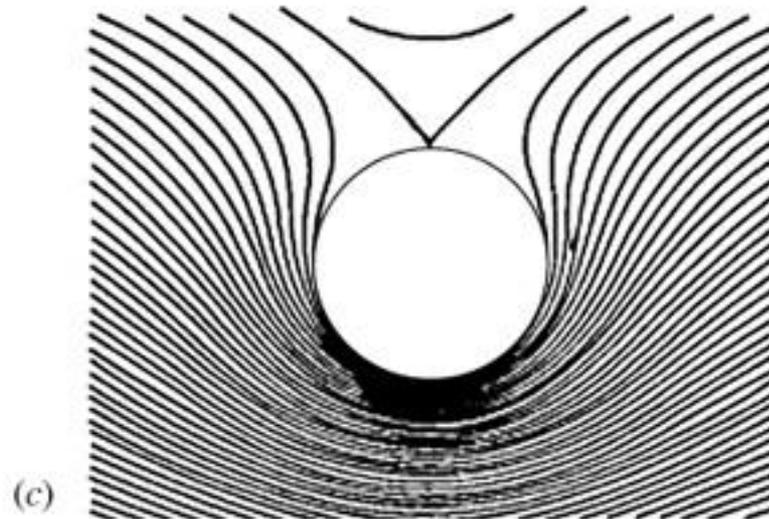
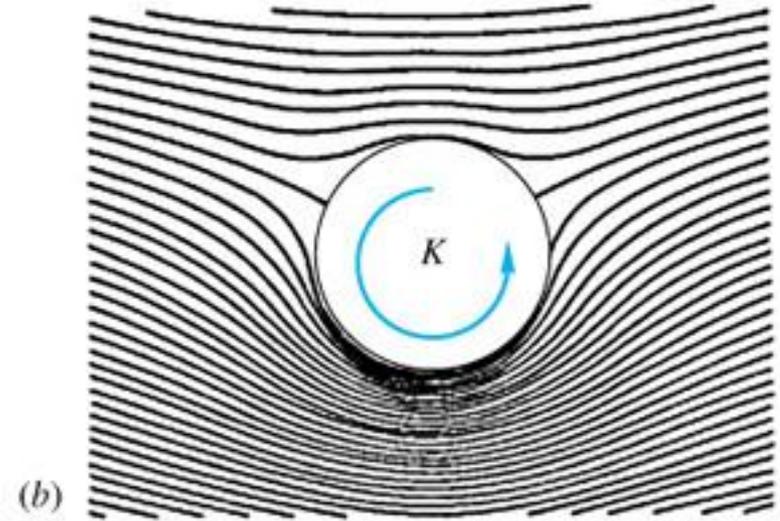
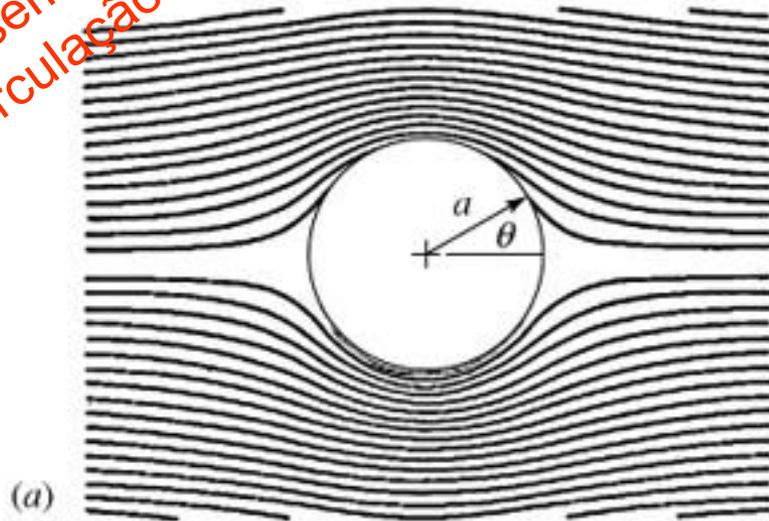
$$\frac{L}{a} = \left(1 + \frac{2q}{\pi U_0 a} \right)^{1/2}$$
$$\frac{h}{a} = \cot \left(\frac{h/a}{2q/\pi U_0 a} \right)$$

Apêndice IV

Força de sustentação no cilindro com circulação

Escoamento num Cilindro com Circulação

sem
circulação



Escoamento num Cilindro com Circulação

- ✓ A circulação é introduzida superpondo-se ao campo um escoamento de vórtice livre (sentido horário):

$$\psi = \psi_U + \psi_D + \psi_V = U_0 \cdot r \cdot \text{sen}(\theta) - \Lambda \frac{\text{sen}(\theta)}{r} + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

- O campo de velocidades:

$$v_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = \cos(\theta) \left(U_0 - \frac{\Lambda}{r^2} \right) \rightarrow v_r = U_0 \cdot \cos(\theta) \left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right)$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\text{sen}(\theta) \left(U_0 + \frac{\Lambda}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \rightarrow v_\theta = -U_0 \cdot \text{sen}(\theta) \left(1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

- v_r é nulo quando $r = (\Lambda/U_0)^{1/2}$ isto define o raio 'a' do cilindro. A intensidade do dipolo em termos de a: $\Lambda = a^2 U_0$
- v_θ é nulo p/ $r = a$ quando $\text{sen} \theta = -\Gamma/(4 \pi a U_0)$.
- v_r e v_θ iguais a zero definem os pontos de estagnação

Escoamento num cilindro com circulação

- As componentes da velocidade e a velocidade resultante no cilindro de raio 'a' :

$$v_r = 0 \quad \& \quad v_\theta = -2 \cdot \text{sen}(\theta) \cdot U_0 - \Gamma / 2\pi a$$

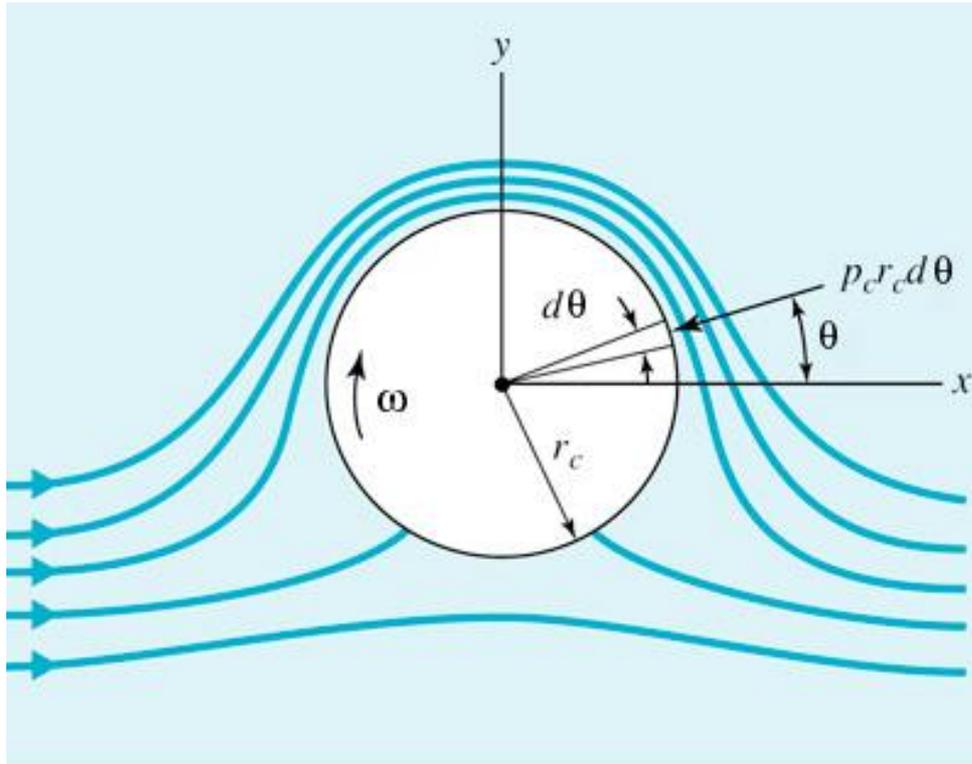
$$V^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(2 \cdot U_0 \cdot \text{sen}(\theta) + \Gamma / 2\pi a \right)^2$$

- A circulação Γ no cilindro ($r = a$)

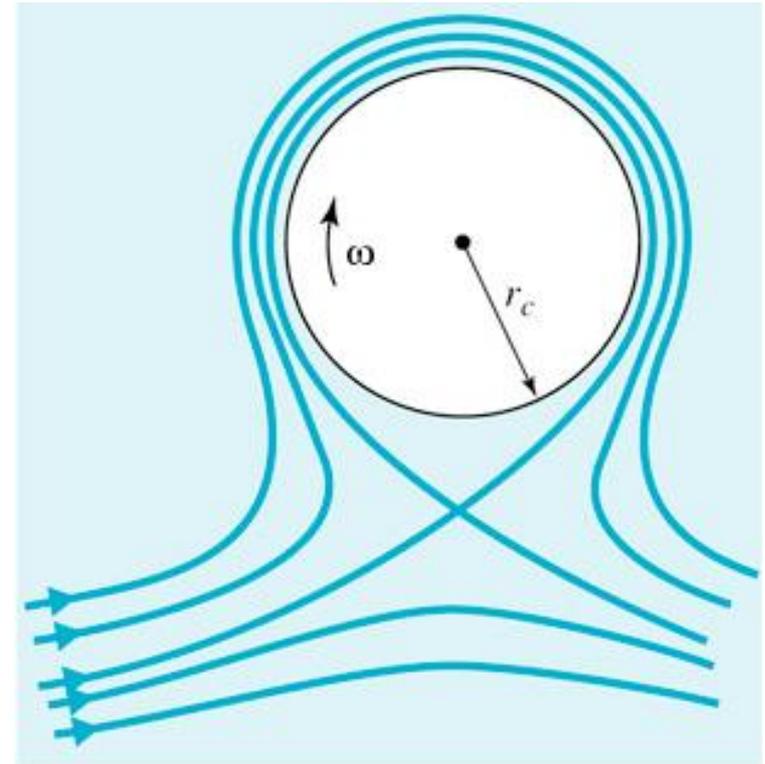
$$\Gamma = \oint_a v_\theta \cdot a \cdot d\theta \rightarrow \Gamma = - \int_0^{2\pi} 2 \cdot \text{sen}(\theta) a d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi a} a d\theta$$

- $\Gamma < 0$ garante que v_θ do vórtice livre está no sentido horário, portanto $\Gamma < 0$ refere-se a uma circulação no sentido horário (veja próximo slide).

O número de pontos de estagnação no cilindro pode ser: 2, 1 ou nenhum, depende do valor da circulação



(a)



(b)

Flow around a circular cylinder with circulation.

Escoamento num Cilindro com Circulação

- As componentes de velocidade e a velocidade resultante no cilindro de raio 'a' :

$$v_r = 0 \quad \& \quad v_\theta = -2 \cdot \text{sen}(\theta) \cdot U_0 - \Gamma/2\pi a$$

$$V^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(2 \cdot U_0 \cdot \text{sen}(\theta) + \Gamma/2\pi a \right)^2$$

- a distribuição de pressão no cilindro ($r = a$)

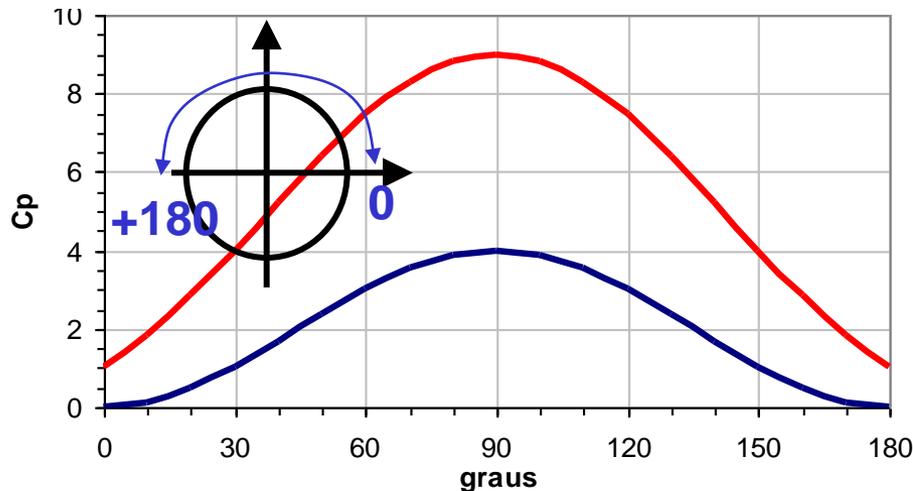
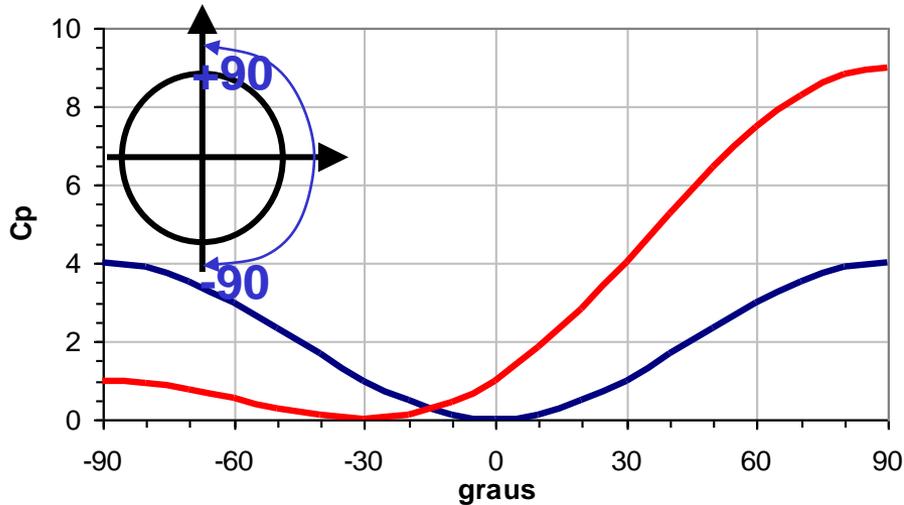
$$\frac{(p - p_0)}{(1/2)\rho U_0^2} = 1 - \left(\frac{V}{U_0} \right)^2 \rightarrow C_p = 1 - \left(2 \cdot \text{sen}(\theta) + \Gamma/U_0 2\pi a \right)^2$$

- separando o termo sem circulação dos outros temos:

$$C_p = \underbrace{1 - 4 \cdot \text{sen}^2(\theta)}_{C_{p(\Gamma=0)}} - \frac{4 \Gamma \cdot \text{sen}(\theta)}{(U_0 2\pi a)} - \left(\Gamma/U_0 2\pi a \right)^2$$

Distribuição de Pressão no Cilindro nos planos horizontal e vertical.

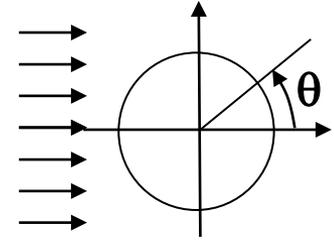
(azul) cilindro sem circulação (vermelho) cilindro com circulação



- ✓ A figura superior indica que a C_p não é simétrico na direção vertical e portanto deve aparecer uma força de sustentação no cilindro com circulação
- ✓ A figura inferior mostra que C_p é simétrico em relação a direção x, conseqüentemente não há arrasto nesta direção.

Força de Sustentação

- A força de sustentação L é sempre normal a corrente livre; ela é determinada a partir da distribuição de pressão no cilindro de **raio a** e **largura w** :



$$L = 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (p - p_0) \cdot \text{sen}(\theta) \cdot a \cdot w \cdot d\theta \rightarrow C_L = \frac{L}{1/2 \cdot \rho \cdot U_0^2 \cdot a \cdot w} = 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} C_p \cdot \text{sen}(\theta) \cdot d\theta$$

- O termo $[1-4\text{sen}^2(\theta)]$ não produz sustentação, é simétrico e vem do caso do cilindro sem circulação,

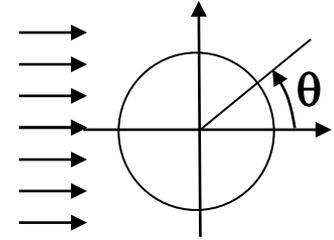
$$C_L = -w \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left[\frac{4 \Gamma \cdot \text{sen}(\theta)}{(U_0 2\pi a)} + \left(\frac{\Gamma}{U_0 2\pi a} \right)^2 \right] \cdot \text{sen}(\theta) \cdot d\theta$$

- A contribuição do 2º termo é nula (sen é anti-simétrico), e o 1º termo: $\int \text{sen}^2 \theta d\theta = \theta/2 - [\text{sen}(2\theta)]/4$, logo C_L é:

$$C_L = -\frac{2 \Gamma}{U_0 a \cdot w}$$

Força de Sustentação

- A força de sustentação L é sempre normal a corrente livre; ela é determinada a partir da distribuição de pressão no cilindro de **raio a** e **largura w** :



$$L = 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (p - p_0) \cdot \text{sen}(\theta) \cdot a \cdot w \cdot d\theta \rightarrow C_L = \frac{L}{1/2 \cdot \rho \cdot U_0^2 \cdot a \cdot w} = 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} C_p \cdot \text{sen}(\theta) \cdot d\theta \quad \Gamma$$

$$C_L = 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left\{ \left[1 - 4 \cdot \text{Sen}^2(\theta) \right] - \left[\frac{4\Gamma \text{Sen}(\theta)}{2\pi a U_0} \right] - \left[\frac{4\Gamma}{2\pi a U_0} \right]^2 \right\} \text{Sen}(\theta) d\theta \quad \Gamma$$

- O termo $[1-4\text{sen}^2(\theta)]$ não produz sustentação, é simétrico e vem do caso do cilindro sem circulação. O termo $(4\Gamma/2\pi a U_0)$ também é nulo, seno é antissimétrico.
- Sobra apenas o 2º termo não nulo: $\int \text{sen}^2 \theta d\theta = \theta/2 - [\text{sen}(2\theta)]/4$, logo C_L e a sustentação, L são:

$$C_L = \frac{2\Gamma}{aU_0} \quad L = \frac{1}{2} \rho U_0^2 (a \cdot w) C_L = \rho U_0 \Gamma w$$

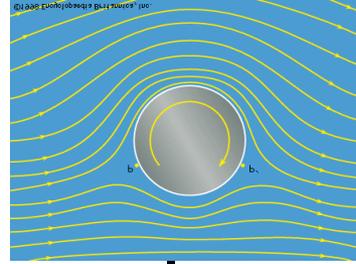
Aplicação efeito Magnus no esporte



Top spin faz a bola curvar para baixo deixando o bateador sem ação.



Roberto Carlos - O chute de bola parada, cobrança de falta, foi de muito longe, a 35 metros das traves. A curva foi tamanha que saiu do quadro da câmera de televisão que focalizava a cena de frente.



Aplicação naval: Flettner Rotors



O rotor cilíndrico possui sustentação porém, o arrasto é comparável a sustentação.



A asa aerodinâmica é mais eficiente ou a curva C_D/C_L é mais favorável.



Força de Sustentação & Teorema Kutta-Joukowski

- A força de sustentação L para um corpo cilíndrico com unidade de largura w é:

$$L = \rho U_0 \Gamma (w)$$

- A força de sustentação num corpo cilíndrico genérico para um escoamento 2D também é expressa pelo produto $L = \rho U_0 \Gamma w$.
- Esta generalização é feita pelo teorema de Kutta-Joukowski: ‘a sustentação de um corpo cilíndrico de seção transversal qualquer é igual ao produto da densidade, velocidade livre e circulação’ (sem circulação não há sustentação!)
- Verifique a força de sustentação do cilindro com circulação Γ e o teorema de Kutta-Joukowski:

APÊNDICE IV

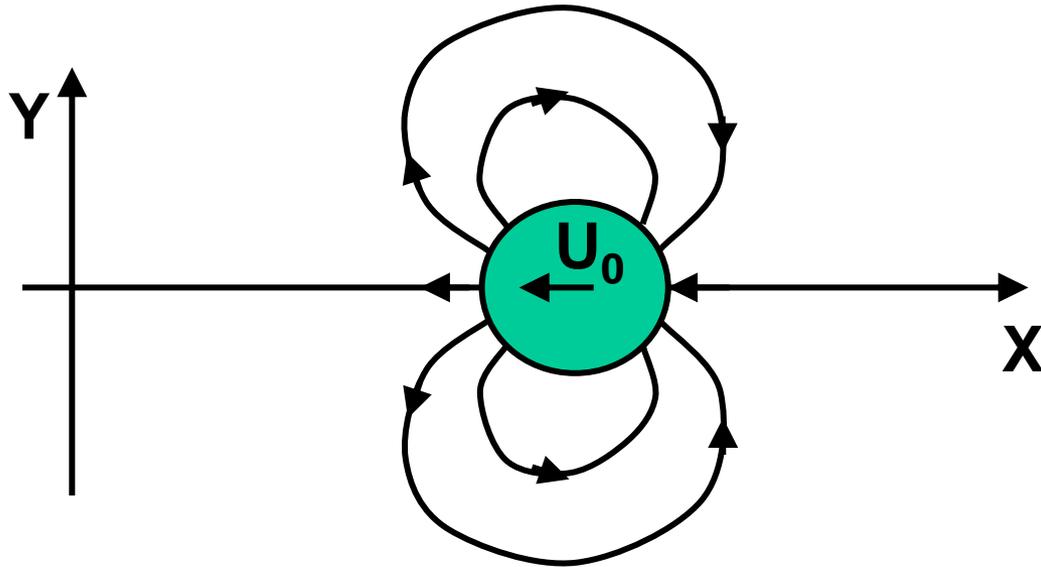
Corpo cilíndrico com aceleração constante num fluido ideal.

Conceito de massa virtual e cálculo da força de arrasto.

[Cil. movendo](#)

Aplicação Bernoulli Transiente

- ✓ Determine a distribuição de pressão num cilindro que acelera num fluido estacionário (escoamento ideal)



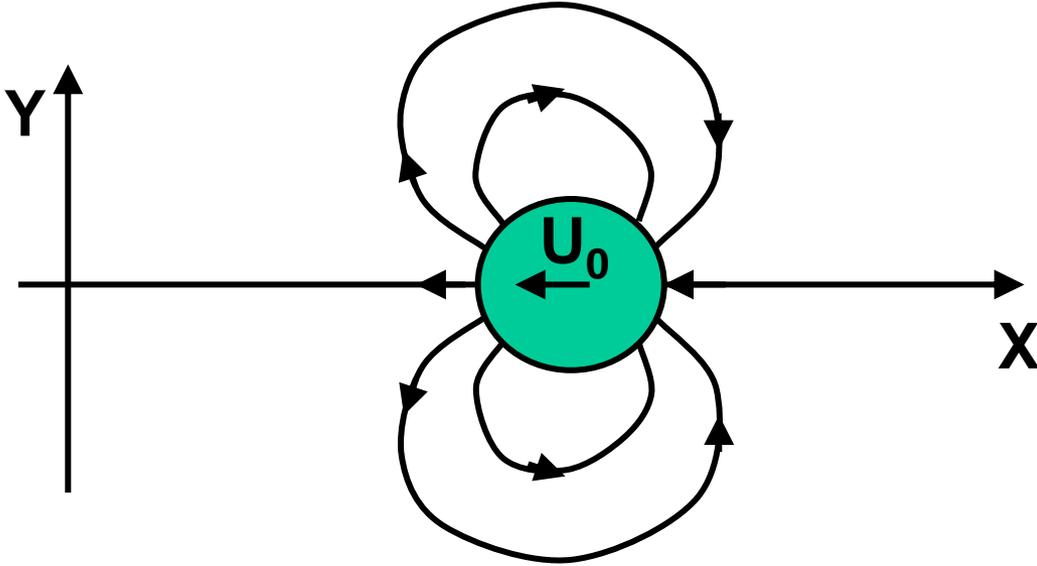
Cil. movendo

Cil. Estac.

- ✓ Note que o problema é transiente para o referencial inercial **XY**.

Condições de Contorno

- ✓ O escoamento deve satisfazer a eq. Laplace: $\nabla^2\phi=0$, sujeito a:



1° longe do cilindro

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial x} \right|_{r \rightarrow \infty} = \left. \frac{\partial\phi}{\partial y} \right|_{r \rightarrow \infty} = 0$$

2° na superfície cilindro

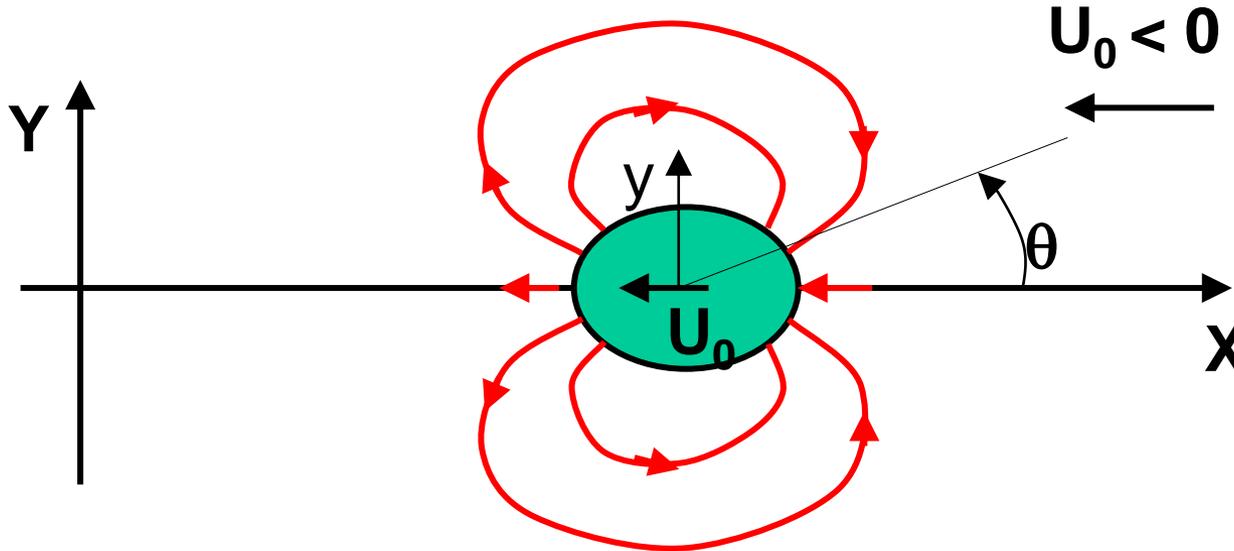
$$\vec{V}_{\text{rel}} \cdot \vec{n} = 0$$

- ✓ onde a velocidade relativa ao ref (X,Y) é definida por:

$$\vec{V}_{\text{rel}} = \vec{V}_{\text{fluido}} - \vec{V}_{\text{cil}}$$

A velocidade relativa

$$\vec{V}_{\text{rel}} = \vec{V}_{\text{fluido}} - \vec{V}_{\text{cil}}$$



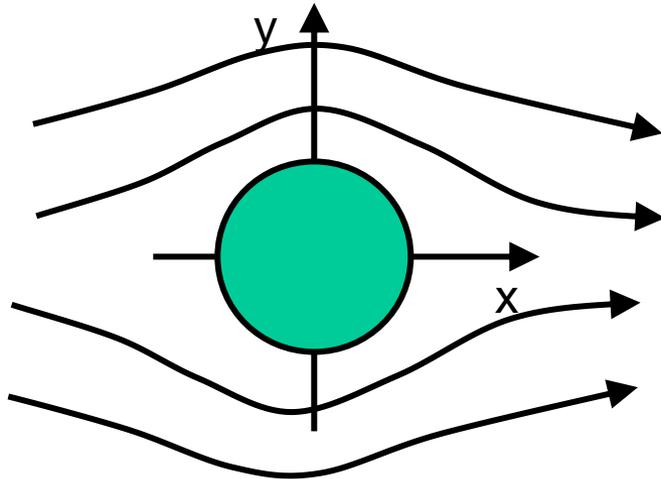
$$\vec{V}_{\text{rel}} \equiv \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} - (-U_0 \cos \theta) \right] \vec{e}_r + \left[\frac{\partial \phi}{r \partial \theta} - (-U_0 \sin \theta) \right] \vec{e}_\theta$$

e o vetor normal é coincidente com direção radial: $\vec{n} = \vec{e}_r$

$$\text{então: } \vec{V}_{\text{rel}} \cdot \vec{n} = 0 \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} \equiv -U_0 \cos \theta$$

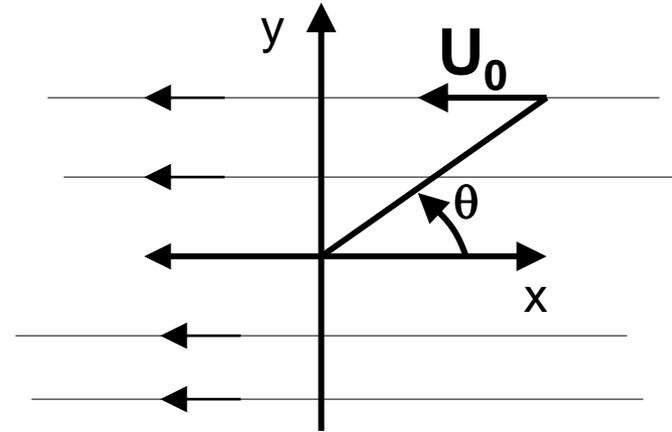
- ✓ O potencial para o cilindro que desloca pode ser formado a partir da superposição do potencial para um cilindro estacionário com um escoamento uniforme de U_0 variando no tempo.

$$\phi_1 = \frac{U_0 a^2 \cos \theta}{r} + U_0 r \cos \theta$$



Escoamento ao redor de um cilindro estacionário

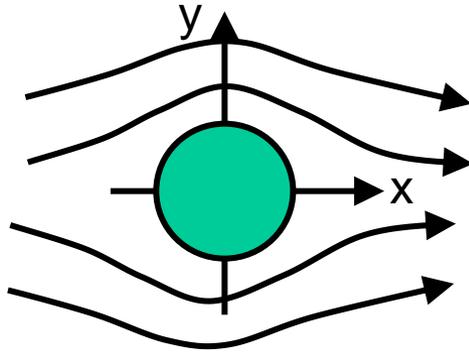
$$\phi_2 = -U_0 r \cos \theta$$



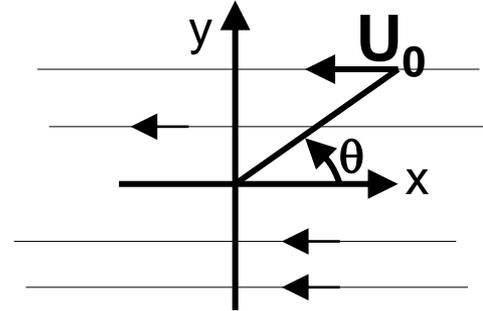
Escoamento uniforme variando no tempo

- ✓ O escoamento uniforme desloca o cilindro no espaço pq as velocidades se somam!
- ✓ Para simular o cilindro que desloca é também necessário que as condições de contorno (slide anterior) também sejam satisfeitas!

O potencial e condições de contorno: $\phi = \phi_1 + \phi_2$



+



$$\phi_1 = \frac{U_0 a^2 \cos \theta}{r} + U_0 r \cos \theta$$

$$\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right|_{r=a} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \infty} = U_0$$

$$\phi_2 = -U_0 r \cos \theta$$

$$\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right|_{r=a} = -U_0 \cos \theta$$

$$\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \infty} = -U_0$$

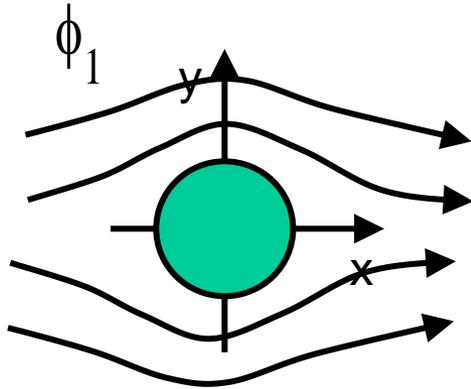
Somando ϕ_1 e ϕ_2 as condições de contorno para ϕ são satisfeitas

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right|_{r=a} + \left. \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right|_{r=a} = -U_0 \cos \theta$$

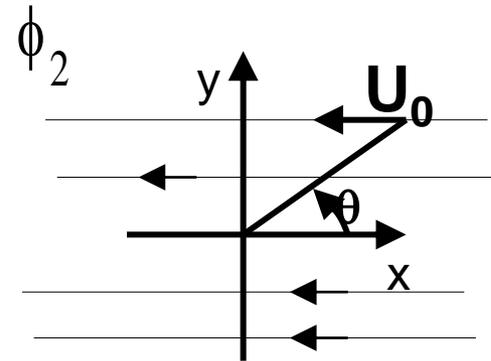
$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \infty} = \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \infty} + \left. \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0$$

portanto ϕ_1 e ϕ_2 é uma solução para $\nabla^2 \phi = 0$ do problema original

O potencial do cilindro que desloca



+



$$\phi = \underbrace{\frac{U_0 a^2 \cos \theta}{r}}_{\phi_1} + \underbrace{U_0 r \cos \theta + -U_0 r \cos \theta}_{\phi_2}$$

ou

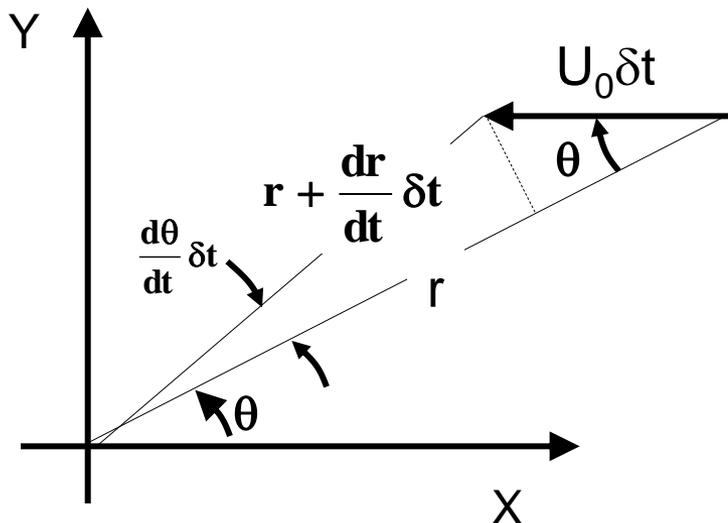
$$\phi = \frac{U_0 a^2 \cos \theta}{r} = \text{dipolo (fonte + sorvedouro)}$$

Variação no tempo de r e θ

No cilindro que se move a velocidade U_0 do cilindro e as posições r e θ associadas variam com o tempo vista do referencial (X, Y) , logo o potencial também depende do tempo:

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{U_0(t) \cdot a^2 \mathbf{cos}[\theta(t)]}{r(t)}$$

Como o cilindro desloca-se no espaço com velocidade U_0 , a variação das coordenadas (r, θ) com o tempo será dependente desta velocidade, assim:



$$\frac{dr}{dt} = -U_0 \mathbf{cos} \theta$$

$$r \frac{d\theta}{dt} = U_0 \mathbf{sin} \theta$$

Potencial & campo de velocidades

$$\phi(x, y, t) = \frac{U_0(t) \cdot a^2 \mathbf{cos}[\theta(t)]}{r(t)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{U_0 a^2}{r^2} \mathbf{cos} \theta \\ v_\theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -\frac{U_0 a^2}{r^2} \mathbf{sin} \theta \\ |\mathbf{V}|^2 = (v_r^2 + v_\theta^2) = U_0^2 \left(\frac{a}{r}\right)^4 \end{array} \right.$$

- ✓ Note que na superfície do cilindro, ($r = a$), a velocidade resultante é igual a U_0 !

Derivada no tempo de $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{U_0(t) \cdot a^2 \cos[\theta(t)]}{r(t)}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left[\frac{dU_0}{dt} \cdot \frac{a^2}{r} \cdot \cos \theta \right] - \left[\frac{U_0 a^2}{r^2} \cos \theta \cdot \frac{dr}{dt} \right] - \left[\frac{U_0 a^2}{r} \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \right]$$

✓ Taxa de variação no tempo de r e θ

$$\frac{dr}{dt} = -U_0 \cos \theta \quad \& \quad r \frac{d\theta}{dt} = U_0 \sin \theta$$

✓ Variação do potencial com o tempo

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{dU_0}{dt} \cdot \frac{a^2}{r} \cdot \cos \theta - U_0^2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos 2\theta$$

Distribuição de pressão no cilindro

✓ A distribuição de pressão no cilindro é calculada a partir de Bernoulli :

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + p = C$$

✓ Note que para $r \rightarrow \infty$, $p/$ qualquer tempo, $V = 0$ e $p = p_{\text{atm}}$, portanto p_{atm} . Na superfície do cilindro, $r = a$ e $V = U_0$ a distribuição P é:

$$p - p_{\text{atm}} = \underbrace{-\rho \frac{dU_0}{dt} \cdot a \cdot \cos \theta + \rho U_0^2 \cos 2\theta - \frac{\rho U_0^2}{2}}_{-\rho \partial \phi / \partial t}$$

$$p - p_{\text{atm}} = \frac{\rho U_0^2}{2} \{-1 + 2 \cos 2\theta\} - \rho \frac{dU_0}{dt} \cdot a \cdot \cos \theta$$

✓ Se $dU_0/dt = 0$ a distribuição pressão coincide (*) com a distribuição no cilindro estacionário:

$$p - p_{\text{atm}} = \frac{\rho U_0^2}{2} \{1 - 4 \sin^2 \theta\}$$

✓ (*) Use a identidade: $\cos 2\theta = 1 - \sin^2 \theta$ para demonstrar que $(-1 + 2 \cos 2\theta) = (1 - 4 \sin^2 \theta)$.

Distribuição de pressão cil. acelerando - o ponto de estagnação -

$$p - p_{\text{atm}} = \frac{\rho U_0^2}{2} \{-1 + 2 \cos 2\theta\} - \rho \frac{dU_0}{dt} \cdot a \cdot \cos \theta$$

✓ O pontos de estagnação ($\theta=0$ e π)

$$p - p_{\text{atm}} = \frac{\rho U_0^2}{2} - \rho \frac{dU_0}{dt} \cdot a \cdot \cos \theta \rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \rightarrow \Delta p = \frac{\rho U_0^2}{2} - \rho \frac{dU_0}{dt} \cdot a \\ \theta = \pi \rightarrow \Delta p = \frac{\rho U_0^2}{2} + \rho \frac{dU_0}{dt} \cdot a \end{cases}$$

✓ Note que $dU_0/dt < 0$ e $\Delta p(0) < \Delta p(\pi)$

✓ Podemos ‘suspeitar’ que o cilindro com aceleração num fluido estacionário para esquerda é necessário a aplicação de uma força na mesma direção pq surge um arrasto devido a diferença de pressão dada pelo termo dU_0/dt .

Força agindo no cilindro c/ raio 'a' e comp. axial 'L'

$$\begin{aligned}
 D &= 2L \int_0^{\pi} (p - p_{\text{atm}}) a \cos \theta d\theta \\
 &= 2L \int_0^{\pi} \left(\frac{\rho U_0^2}{2} \{-1 + 2 \cos 2\theta\} - \rho \frac{dU_0}{dt} \cdot a \cdot \cos \theta \right) a \cos \theta d\theta \\
 &= \rho U_0^2 a L \underbrace{\int_0^{\pi} (-1 + 2 \cos 2\theta) \cos \theta d\theta}_{= 0, \text{ parte sem aceleração}} - 2\rho L \frac{dU_0}{dt} \int_0^{\pi} a^2 \cos^2 \theta d\theta \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{dU_0}{dt} \underbrace{\rho a^2 \pi L}_{\text{Massa Virtual}}
 \end{aligned}$$

✓ Em termos de energia, esta força realiza um trabalho para aumentar a energia cinética do fluido ao redor do cilindro.

✓ Esta força é composta pelo produto de dU_0/dt r pela massa virtual. Este fenômeno existe em qualquer tipo de corpo que é acelerado em um fluido. Corolário: se $dU_0/dt = 0$ então $D = 0$.

Veja massa virtual em wiki link ([added mass or virtual mass](#))

Veja BBO equation que usa massa virtual em wiki link ([BBO equation](#))

Demonstração $\nabla^2(1/r)=4\pi\delta(r-r')$

Apêndice V

Introdução ao escoamento Viscoso Potencial

(Viscous Potential Flow, D.D. Joseph)

Equação Euler x Potencial

- ✓ A aproximação Euler é válida quando $Re \gg 1$. Neste contexto as forças viscosas são muito menores que as forças inerciais. Portanto é frequente a associação de Euler com:
 - i. Ausência de viscosidade no escoamento.
 - ii. Somente forças normais podem causar movimento, no caso a pressão.
- ✓ Euler reduz para esc. potencial se $\omega = 0$, mas não se pode afirmar que a tensão de origem viscosa seja desprezível a menos que $Re \gg 1$.
- ✓ O escoamento potencial requer $\omega = 0$. Neste contexto o $\text{Div}T=0$ mas não necessariamente $\mu=0$.

Escoamento incompressível, fluido Newtoniano com μ constante

- ✓ Se , $V = \nabla\phi$ e $\nabla^2\phi=0$ então o escoamento potencial é uma solução de N-S onde a pressão é determinada pela equação de Bernoulli:

$$\rho \frac{\partial\phi}{\partial t} + \rho \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \rho gz + p = C$$

- ✓ A solução não depende da viscosidade do fluido! O divergente das tensões é nulo: $\mu\nabla^2V = \mu\nabla(\nabla^2\phi) \equiv 0$. Alternativamente:

$$\mu\nabla \cdot 2\mathbf{S} \equiv \mu\nabla \cdot [\nabla\vec{V} + \nabla\vec{V}^T] \equiv \mu \left\{ \nabla^2\vec{V} + \nabla \underbrace{[\nabla \cdot \vec{V}]}_{=0 \text{ incompressível}} \right\} \equiv -\mu\nabla \times \vec{\omega} = 0$$

- ✓ Note que o divergente do tensor desvio das tensões é nulo mas a viscosidade nem T são nulos!

Escoamento incompressível, fluido Newtoniano com μ constante

- ✓ Porém esta tensão pode (e deve) participar do balanço da energia mecânica como sendo o trabalho das forças viscosas e do termo de dissipação na interface gás-líquido:

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right) = \nabla \cdot (\vec{V} \cdot T') - \phi$$

$$\text{onde } (\vec{V} \cdot T')_i = \sum_j V_j T'_{j,i}, \quad T'_{i,j} = 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\text{e } \phi = 2\mu(\mathbf{S} : \mathbf{S}) = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \equiv \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}$$

Escoamento incompressível, fluido Newtoniano com μ constante

- ✓ Por outro lado, se o divergente das tensões é nulo, $\underline{\mu \nabla^2 V = 0}$, o valor da tensão não é:

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{S} = \mu \left[\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^T \right] = \mu \left[\nabla (\nabla \phi) + \left[\nabla (\nabla \phi) \right]^T \right] \neq 0$$

$$\text{ou} \quad \mathbf{T}_{i,j} = \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \neq 0$$

- ✓ Note que a resultante da tensão viscosa irrotacional não participa da eq. N-S.
- ✓ O escoamento irrotacional é determinado por: $\underline{\nabla^2 \phi = 0}$ e a pressão vem de Bernoulli substituindo $V = \underline{\nabla \phi}$.
- ✓ Veja por exemplo LE#5, ex#2 (difusor radial) onde a tensão $T_{r,r}$ existia mas sua taxa é nula, esc. Irrotacional!

Escoamento incompressível, fluido Newtoniano com μ constante

- ✓ Os efeitos da tensão viscosa irrotacional estão balanceados internamente ao domínio.
- ✓ Entretanto na fronteira (interface gás-líquido) eles estão desbalanceados e devem ser corrigidos.
- ✓ Pontos internos ao domínio, onde a tensão pode ser superior a tensão de ruptura ou colapso de cavidades (cavitação), também devem ser considerados
- ✓ A teoria de escoamento viscoso irrotacional (Viscous Potential Flow) foi resgatada por DD Joseph, Potential flow of viscous fluids: historical notes, Int. J. Multiphase Flow, 32 (2006) 285-310
- ✓ <http://www.aem.umn.edu/people/faculty/joseph/ViscousPotentialFlow/>
- ✓ [Historical notes on viscous potential flow](#)

Apêndice VI

Demonstração Lei de Biot -Savart

Como determinar o campo de velocidade a partir do campo de vorticidade?

Considere:

- Fluido incompressível, campo solenoidal $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$
- Região ocupada pelo fluido tem conexão simples;
- A velocidade normal, U_n , é conhecida em toda S.C.
- A velocidade é nula no infinito, o fluido não está confinado

O problema: se $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$ como determinar \vec{V} a partir de $\vec{\omega}$?

Existe operador ∇^{-1} ; $\nabla^{-1} \times \nabla \times \vec{V} = \nabla^{-1} \times \vec{\omega} \rightarrow \vec{V} = \nabla^{-1} \times \vec{\omega}$? Resp.: não.

Propor campo de \vec{V} vem de campo \vec{A} , tal que:

$$\vec{V} = \nabla \times \vec{A}, \text{ por consequencia } \vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

O objetivo é determinar \vec{A} porém, o lado direito está super-determinado, há 2

expressões para \vec{A} , $\text{grad}(\text{div}\mathbf{A})$ e $\text{lap}\mathbf{A}$.

Sem prejudicar a generalização, considere-se que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ então:

$\nabla^2 \vec{A} = -\vec{\omega}$ Eq. Poisson
componentes sist. cartesiano

$$\nabla^2 A_x = -\omega_x$$

$$\nabla^2 A_y = -\omega_y$$

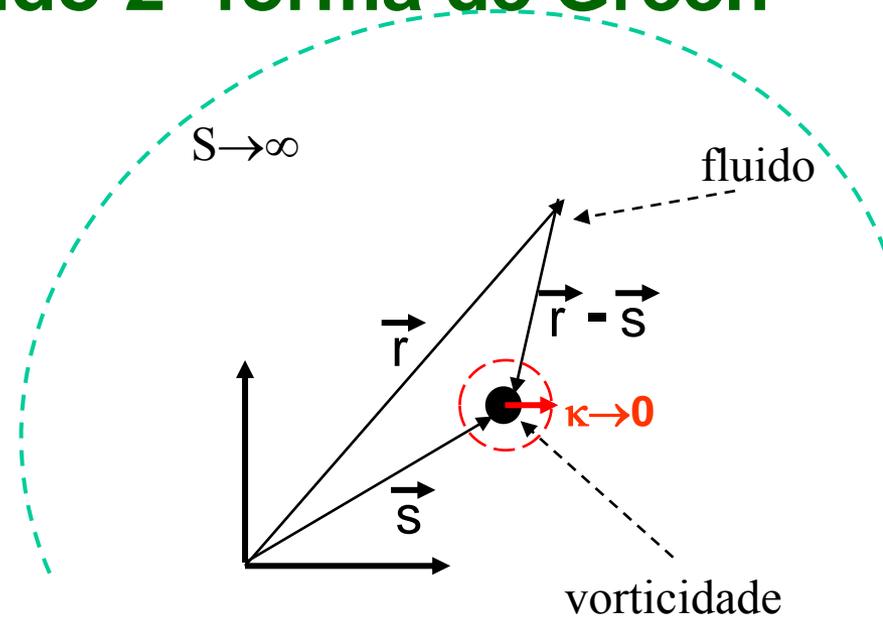
$$\nabla^2 A_z = -\omega_z$$

Solução eq. Poisson usando 2ª forma de Green

Deseja-se conhecer a contribuição da ω em s num ponto no fluido em r .

O domínio limitado por uma esfera em s , c/ raio $\kappa \rightarrow 0$ para excluir discontinuidade em $r=s$; e outra esfera para $r \rightarrow \infty$ cuja fronteira é $S \rightarrow \infty$.

Para aplicar 2ª forma Green, aula #1, assumine-se $\phi = \mathbf{A}_x$ (escalar) e $\psi = |\mathbf{r}-\mathbf{s}|^{-1}$ que decai p/ zero quando $|\mathbf{r}-\mathbf{s}| \rightarrow \infty$



As identidades valem para simplificação dos termos da 2ª forma de Green

i) $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\nabla \phi = \nabla \mathbf{A}_x$ e $\nabla^2 \phi = -\omega_x$

ii) $\nabla \psi = (\mathbf{r}-\mathbf{s})/|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3$; $\nabla \cdot \nabla \psi = \nabla^2 \psi = \nabla^2 |\mathbf{r}-\mathbf{s}|^{-1} = 4\pi \delta(\mathbf{r}-\mathbf{s})$, onde δ é função delta de Dirac, $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{s}) = 1$ se $\mathbf{r} = \mathbf{s}$ e $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{s}) = 0$ se $\mathbf{r} \neq \mathbf{s}$. Logo, $\nabla^2 \psi = 0$ se $\mathbf{r} \neq \mathbf{s}$ e $= 4\pi$ se $\mathbf{r} = \mathbf{s}$ veja demonstração no [link](#).

iii) A solução de Green aplica-se para as componentes (escalares) do vetor \mathbf{A} : \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y e \mathbf{A}_z separadamente.

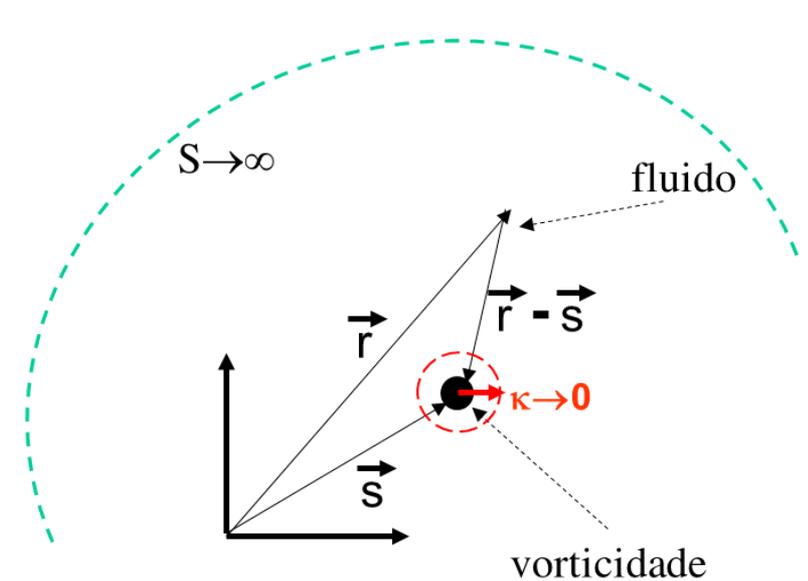
Solução eq. Poisson usando 2ª forma de Green, para componente ω_x

Identities:

$$\vec{V} = \nabla \times \vec{A}; A_x \text{ para } r \rightarrow \infty, A_x = \nabla A_x = 0$$

$$\nabla^2 \phi = -\omega_x \text{ e } \nabla \phi = \nabla A_x$$

$$\nabla^2 \psi = 0 \text{ no domínio entre } \kappa \text{ e } S$$



$$\int_{\nabla} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \lim_{S \rightarrow \infty} \int_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \vec{n} dS - \lim_{\kappa \rightarrow 0} \int_{\rho} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \vec{n} dS$$

$A = c^{te}, A_x = 0$

Simplificando:

$$\int_{\nabla} \frac{\omega_x}{|\vec{r} - \vec{s}|} dV = \int_{\kappa \rightarrow 0} A_x \frac{(\vec{r} - \vec{s}) \cdot \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} \cdot dS \text{ onde: } A_x = c^{te} \text{ e } dS = 4\pi\kappa^2$$

$|\vec{r} - \vec{s}| = \kappa$

Simplificando:

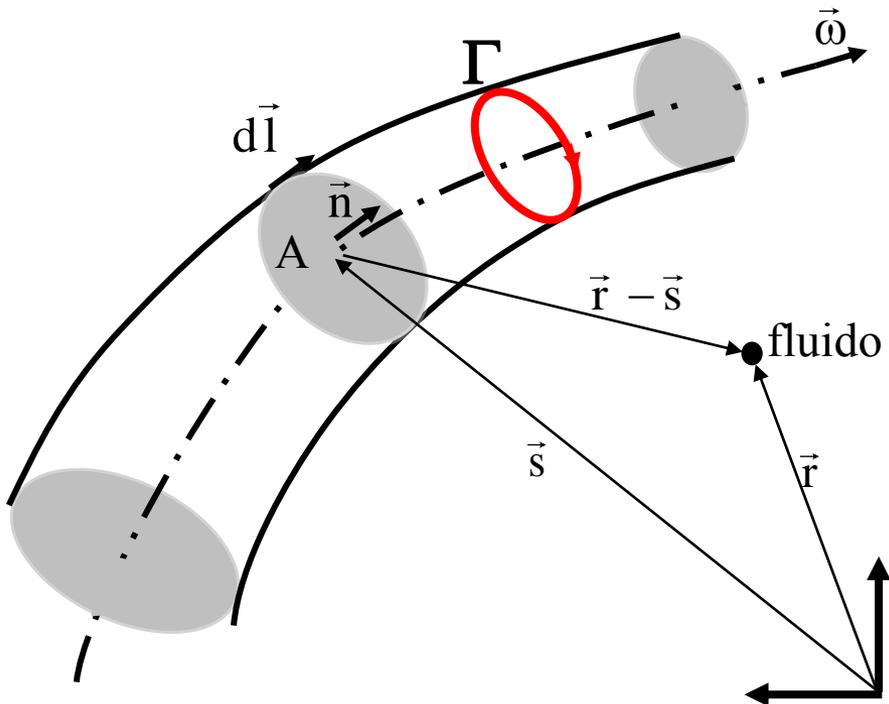
$$\int_{\nabla} \frac{\omega_x}{|\vec{r} - \vec{s}|} dV = A_x \int_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\kappa}{\kappa^3} (\vec{e}_{\vec{\kappa}} \cdot \vec{n}) \cdot (4\pi\kappa^2) = 4\pi A_x \Rightarrow A_x = \frac{1}{4\pi} \int_{\nabla} \frac{\omega_x}{|\vec{r} - \vec{s}|} dV$$

Na forma vetorial:

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\nabla} \frac{\vec{\omega}}{|\vec{r} - \vec{s}|} dV \text{ e } \vec{V} = \frac{1}{4\pi} \int_{\nabla} \frac{\nabla \times \vec{\omega}}{|\vec{r} - \vec{s}|} dV$$

O campo de velocidades
vem do rotacional da
velocidade!

Filamento vórtice e a Lei de Biot Savart



Deseja-se conhecer a contribuição de ω no fluido em r .

$$\vec{V} = \nabla \times \vec{A} \Rightarrow \vec{V} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \nabla \times \left(\frac{\vec{\omega}}{|\vec{r} - \vec{s}|} \right) d\mathcal{V}$$

$$\begin{cases} d\vec{\ell} = \frac{\vec{\omega}}{|\omega|} |d\vec{\ell}| \\ d\mathcal{V} = \vec{n} \cdot \mathbf{A} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \nabla \times \left(\frac{d\vec{\ell}}{|\vec{r} - \vec{s}|} \right) \\ \vec{\omega} \cdot \vec{n} \cdot \mathbf{A} = \Gamma \end{cases}$$

\vec{V} depende do inverso distância $|\mathbf{r}-\mathbf{s}|$.
O infinitesimal $d\vec{\ell}$ é tangente ao filamento.

Lembrando que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, então o rotacional:

$$\nabla \times \left(\frac{d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|} \right) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|} \nabla \times d\vec{\ell} + \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|} \times d\vec{\ell} = 0 - d\vec{s} \times \frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|} \equiv +d\vec{s} \times \frac{\vec{r} - \vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}$$

A velocidade no ponto r devido a toda extensão do filamento é obtida pela integração sobre todo o filamento - lei de Biot-Savart (1820)

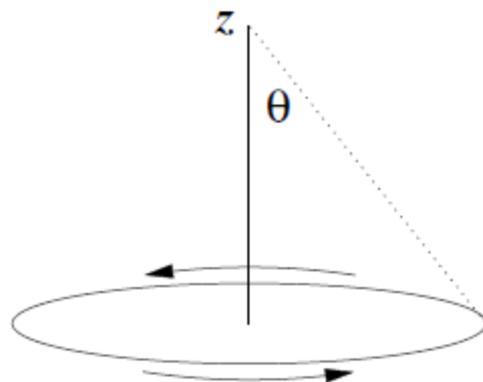
$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}$$

FIM

Biot savART

13.3.1 Field of a ring of current

The Biot-Savart law allows us to work out the magnetic field of an interesting special case: a ring of current.



Take the ring to have radius R , and consider a current of magnitude I circulating as shown. What is the magnitude and direction of the current a point z above the ring's center?

Set up Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{I}{c} \int_{\text{around ring}} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}.$$

The distance r is easy — $r = \sqrt{z^2 + R^2}$. Likewise, the magnitude $|d\vec{l}|$ is easy — $|d\vec{l}| = R d\phi$, where ϕ is an angle around the perimeter of the ring. The cross product $d\vec{l} \times \hat{r}$ is a little bit trickier. A good way to understand it is to consider a special case: when $z = 0$, $d\vec{l} \times \hat{r}$ points in the vertical \hat{z} direction. Moving away from this case, we see that it *always* points along \hat{z} , but is reduced by a factor of $\sin \theta$ in general:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} \frac{R \sin \theta d\phi}{R^2 + z^2} \hat{z} \\ &= \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\phi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} \\ &= \frac{2\pi I}{c} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}. \end{aligned}$$

Notice that the direction, \hat{z} , could have been predicted by the right-hand rule: curl your fingers of your right hand in the direction of the current, and your thumb points along the field. Note also that it points in the same direction above and below the loop.

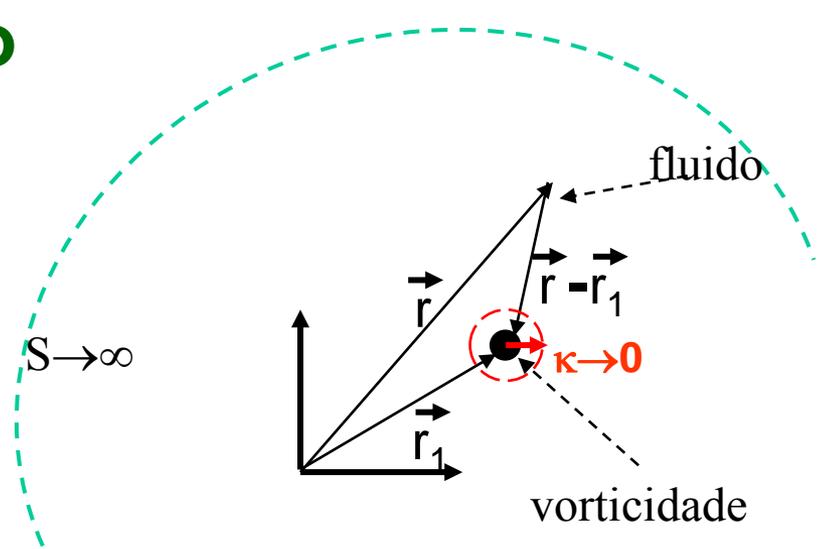
Solução eq. Poisson usando 2ª forma de Green, para componente ω_x

Identidades :

$$A_x \text{ para } r \rightarrow \infty, A_x = \nabla A_x = 0$$

$$\nabla^2 \phi = -\omega_x \text{ e } \nabla \phi = \nabla A_x$$

$$\nabla^2 \psi = 0 \text{ no domínio entre } \kappa \text{ e } S$$



$$\int_{\nabla} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \lim_{S \rightarrow \infty} \int_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \vec{n} dS - \lim_{\kappa \rightarrow 0} \int_{\rho} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \vec{n} dS$$

$A = c^{te}, A_x = 0$

Simplificando:

$$\int_{\nabla} \frac{\omega_x}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dV = \int_{\kappa \rightarrow 0} A_x \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \cdot dS \text{ onde: } A_x = c^{te} \text{ e } dS = 4\pi\kappa^2$$

$$\int_{\nabla} \frac{\omega_x}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dV = A_x \int_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\kappa}{\kappa^3} (\vec{e}_x \cdot \vec{n}) \cdot (4\pi\kappa^2) = 4\pi A_x \Rightarrow \begin{cases} A_x = \frac{1}{4\pi} \int_{\nabla} \frac{\omega_x}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dV \\ A_y = \frac{1}{4\pi} \int_{\nabla} \frac{\omega_y}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dV \\ A_z = \frac{1}{4\pi} \int_{\nabla} \frac{\omega_z}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dV \end{cases}$$

Solução eq. Poisson usando 2ª forma de Green

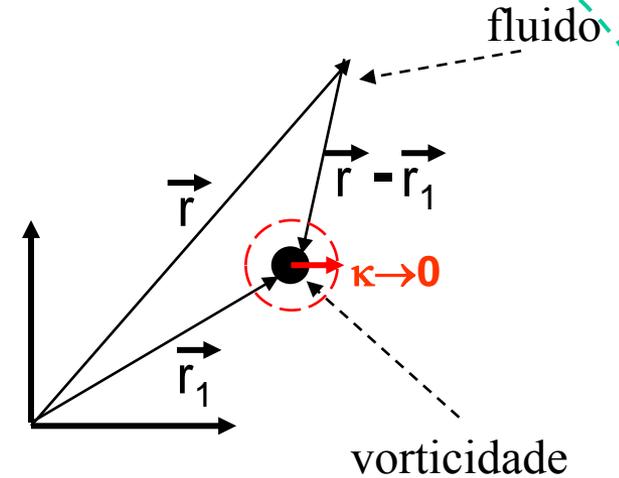
- Deseja-se conhecer a contribuição de ω no fluido em r .
- O domínio é limitado por $\kappa \rightarrow 0$ e $S \rightarrow \infty$ para excluir a discontinuidade em $r = r_1$
- $\phi = A_x$ (escalar) e $\psi = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^{-1}$ que decai p/ zero quando $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \rightarrow \infty$

IDENTIDADES:

- i) $\nabla \phi = \nabla A_x$ e $\nabla^2 \phi = -\omega_x$
- ii) $\nabla \psi = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3$ e $\nabla^2 \psi = \nabla^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^{-1} = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$
 $\nabla^2 \psi = 0$ se $r \neq r_1$ e $= 4\pi$ se $r = r_1$

[link](#)

$S \rightarrow \infty$



$$\int_{\nabla} \left(\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi \right) dV = \lim_{S \rightarrow \infty} \int_S \left(\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi \right) \cdot \vec{n} dS - \lim_{\kappa \rightarrow 0} \int_{\rho} \left(\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi \right) \cdot \vec{n} dS$$

$$\int_{\nabla} \frac{\omega_x}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dV = \int_{\rho \rightarrow 0} A_x \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \cdot dS \text{ onde: } |\vec{r} - \vec{r}_1| = \kappa; A_x = c^{te} \text{ e } dS = 4\pi \kappa^2$$

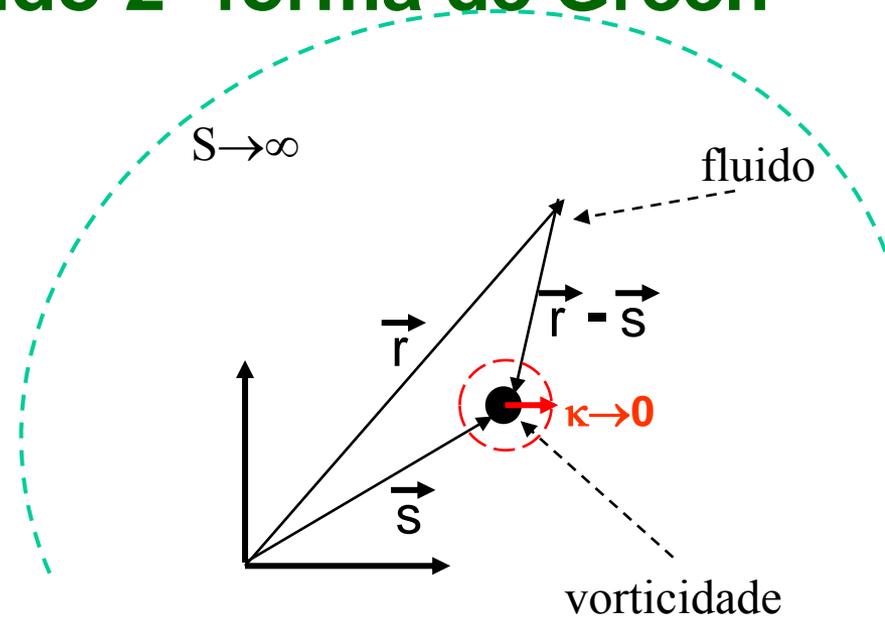
$$\int_{\nabla} \frac{\omega_x}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dV = A_x \int_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\kappa}{\kappa^3} (\mathbf{e}_{\vec{\kappa}} \cdot \vec{n}) \cdot (4\pi \kappa^2) = 4\pi A_x \Rightarrow \begin{cases} A_x = \frac{1}{4\pi} \int_{\nabla} \frac{\omega_x}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dV \\ A_y = \frac{1}{4\pi} \int_{\nabla} \frac{\omega_y}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dV \\ A_z = \frac{1}{4\pi} \int_{\nabla} \frac{\omega_z}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dV \end{cases}$$

Solução eq. Poisson usando 2ª forma de Green

Deseja-se conhecer a contribuição da ω em s num ponto no fluido em r .

O domínio limitado por uma esfera em s , c/ raio $\kappa \rightarrow 0$ para excluir discontinuidade em $r=s$; e outra esfera para $r \rightarrow \infty$ cuja fronteira é $S \rightarrow \infty$.

Para aplicar 2ª forma Green, aula #1, assumine-se $\phi = \mathbf{A}_x$ (escalar) e $\psi = |\mathbf{r}-\mathbf{s}|^{-1}$ que decai p/ zero quando $|\mathbf{r}-\mathbf{s}| \rightarrow \infty$



As identidades valem para simplificação dos termos da 2ª forma de Green

i) $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\nabla \phi = \nabla \mathbf{A}_x$ e $\nabla^2 \phi = -\omega_x$

ii) $\nabla \psi = (\mathbf{r}-\mathbf{s})/|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3$; $\nabla \cdot \nabla \psi = \nabla^2 \psi = \nabla^2 |\mathbf{r}-\mathbf{s}|^{-1} = 4\pi \delta(\mathbf{r}-\mathbf{s})$, onde δ é função delta de Dirac, $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{s}) = 1$ se $\mathbf{r} = \mathbf{s}$ e $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{s}) = 0$ se $\mathbf{r} \neq \mathbf{s}$. Logo, $\nabla^2 \psi = 0$ se $\mathbf{r} \neq \mathbf{s}$ e $=4\pi$ se $\mathbf{r} = \mathbf{s}$ veja demonstração no [link](#).

iii) A solução de Green aplica-se para as componentes (escalares) do vetor \mathbf{A} : \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y e \mathbf{A}_z separadamente.

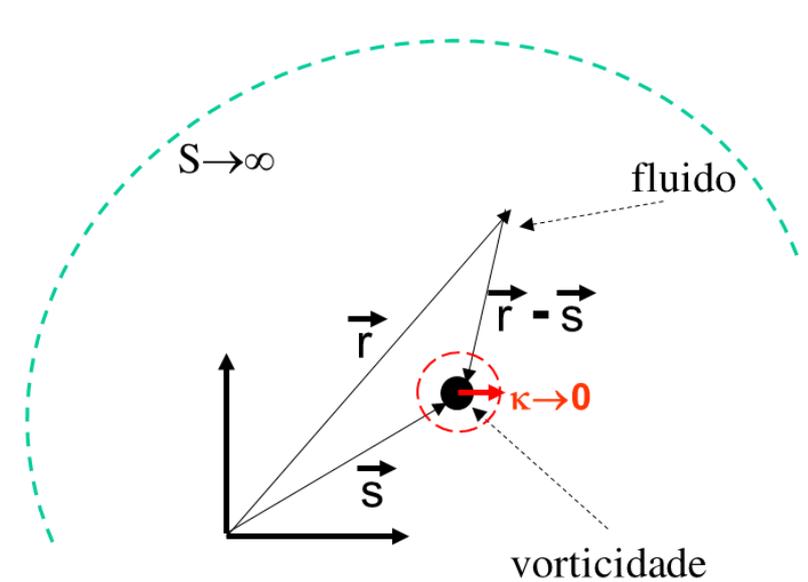
Solução eq. Poisson usando 2ª forma de Green, para componente ω_x

Identities:

$$\vec{V} = \nabla \times \vec{A}; A_x \text{ para } r \rightarrow \infty, A_x = \nabla A_x = 0$$

$$\nabla^2 \phi = -\omega_x \text{ e } \nabla \phi = \nabla A_x$$

$$\nabla^2 \psi = 0 \text{ no domínio entre } \kappa \text{ e } S$$



$$\int_{\nabla} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \lim_{S \rightarrow \infty} \int_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \vec{n} dS - \lim_{\kappa \rightarrow 0} \int_{\rho} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \vec{n} dS$$

$A = c^{te}, A_x = 0$

Simplificando:

$$\int_{\nabla} \frac{\omega_x}{|\vec{r} - \vec{s}|} dV = \int_{\kappa \rightarrow 0} A_x \frac{(\vec{r} - \vec{s}) \cdot \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} \cdot dS \text{ onde: } A_x = c^{te} \text{ e } dS = 4\pi\kappa^2$$

$|\vec{r} - \vec{s}| = \kappa$

Simplificando:

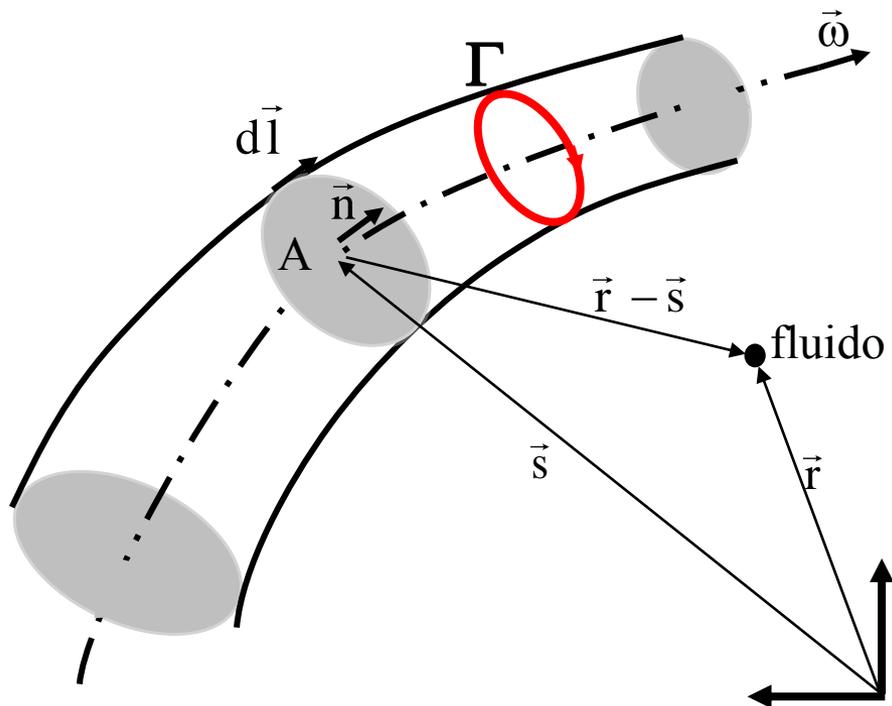
$$\int_{\nabla} \frac{\omega_x}{|\vec{r} - \vec{s}|} dV = A_x \int_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\kappa}{\kappa^3} (\vec{e}_{\vec{\kappa}} \cdot \vec{n}) \cdot (4\pi\kappa^2) = 4\pi A_x \Rightarrow A_x = \frac{1}{4\pi} \int_{\nabla} \frac{\omega_x}{|\vec{r} - \vec{s}|} dV$$

Na forma vetorial:

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\nabla} \frac{\vec{\omega}}{|\vec{r} - \vec{s}|} dV \text{ e } \vec{V} = \frac{1}{4\pi} \int_{\nabla} \frac{\nabla \times \vec{\omega}}{|\vec{r} - \vec{s}|} dV$$

O campo de velocidades vem do rotacional da velocidade!

Filamento vórtice e a Lei de Biot Savart



Deseja-se conhecer a contribuição de ω no fluido em r .

$$\vec{V} = \nabla \times \vec{A} \Rightarrow \vec{V} = \frac{1}{4\pi} \int_{\forall} \nabla \times \left(\frac{\vec{\omega}}{|\vec{r} - \vec{s}|} \right) d\forall$$

$$\begin{cases} d\vec{l} = \frac{\vec{\omega}}{|\omega|} |d\vec{l}| \\ d\forall = \vec{n} \cdot \mathbf{A} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\forall} \nabla \times \left(\frac{d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{s}|} \right) \\ \vec{\omega} \cdot \vec{n} \cdot \mathbf{A} = \Gamma \end{cases}$$

\vec{V} depende do inverso distância $|\vec{r} - \vec{s}|$. O infinitesimal $d\vec{l}$ é tangente ao filamento.

Lembrando que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, então o rotacional:

$$\nabla \times \left(\frac{d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|} \right) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|} \nabla \times d\vec{l} + \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|} \times d\vec{l} = 0 - d\vec{s} \times \frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|} \equiv +d\vec{s} \times \frac{\vec{r} - \vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}$$

A velocidade no ponto r devido a toda extensão do filamento é obtida pela integração sobre todo o filamento - lei de Biot-Savart (1820)

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}$$

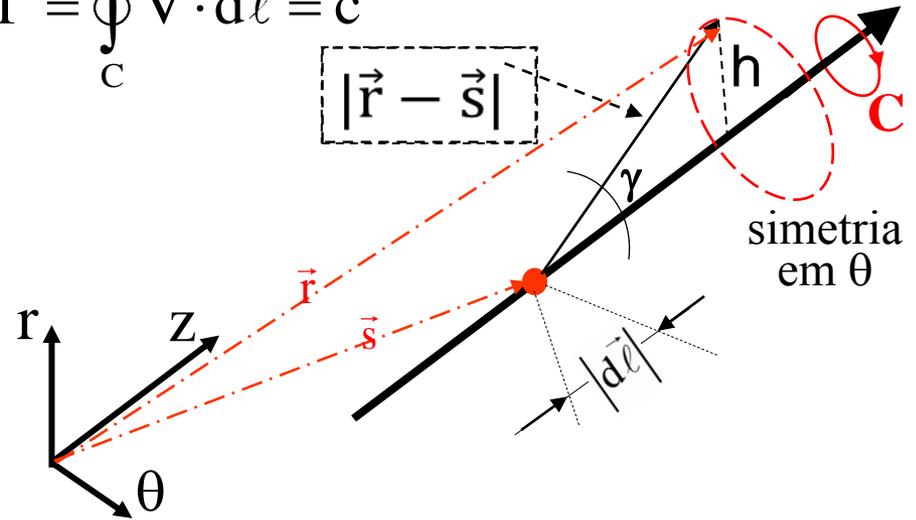
Velocidade gerada por filamento de vórtice retilíneo

Considere um sistema cilíndrico polar (r, θ, z) onde o filamento de vórtice, com circulação Γ , é paralelo com o eixo z .

O campo de velocidade é dado por:

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}$$

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = c^{te}$$

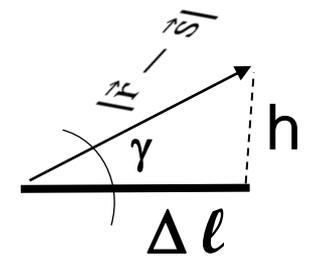


O argumento da integral possui termos que precisam ser determinados:

- i. $d\vec{l}$ é o comprimento infinitesimal tangente ao filamento;
- ii. $\mathbf{e}_{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|}$ é um vetor unitário na direção do vetor $(\mathbf{r}-\mathbf{s})$;
- iii. γ é o ângulo medido de $d\mathbf{l}$ para $|\mathbf{r}-\mathbf{s}|$

$$\frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|^2} \cdot \left[d\vec{l} \times \frac{(\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|} \right] = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|^2} \cdot \left[d\vec{l} \times \mathbf{e}_{|\vec{r}-\vec{s}|} \right]$$

Continuação Precisamos resolver $d\vec{\ell}$, e o produto $d\vec{\ell} \times \mathbf{e}_{|\vec{r}-\vec{s}|}$ em função do ângulo θ e da altura, h , normal ao filamento (somente para este caso). Considere o triângulo ao lado:



$$|\vec{r} - \vec{s}| = h / \sin(\gamma) = \operatorname{cosec}(\gamma) \cdot h$$

O $|d\vec{\ell}|$ é tangente ao filamento mas precisa ser expresso em função de h e γ . O segmento $\Delta \ell$ é paralelo ao vetor $d\vec{\ell}$, usando similaridade de triângulos:

$$|\vec{r} - \vec{s}| = h / \Delta \ell = \operatorname{tg}(\gamma) \rightarrow \Delta \ell = h \cdot \operatorname{cotg}(\gamma) \quad \text{diferenciando:} \quad d\ell = h \cdot \operatorname{cosec}^2(\gamma) d\gamma$$

O produto vetorial $d\vec{\ell} \times \mathbf{e}_{|\vec{r}-\vec{s}|}$ aponta para direção θ :

$$d\vec{\ell} \times \mathbf{e}_{(\vec{r}-\vec{s})} = \left\{ |d\vec{\ell}| \cdot 1 \right\} \cdot \sin(\gamma) \mathbf{e}_{d\vec{\ell}} \times \mathbf{e}_{(\vec{r}-\vec{s})} = h \cdot \operatorname{cosec}^2(\gamma) \cdot \sin(\gamma) \cdot \mathbf{e}_\theta$$

Retornando ao integrando da lei de Biot Savart:

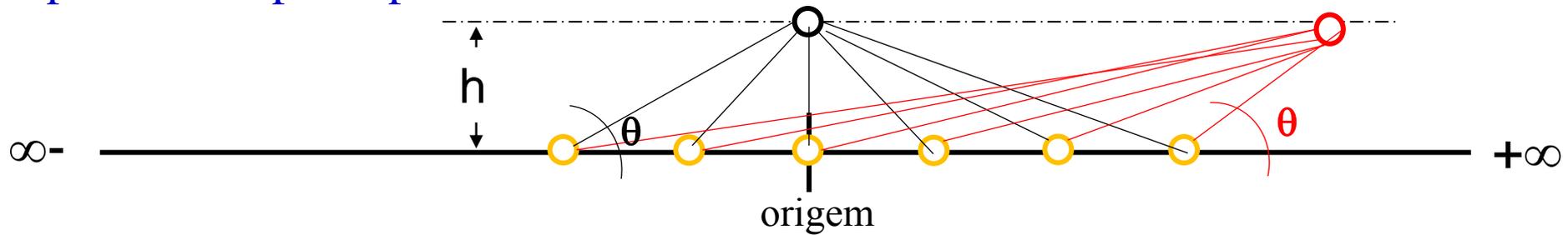
$$\frac{d\vec{\ell} \times \mathbf{e}_{\vec{r}-\vec{s}}}{|\vec{r} - \vec{s}|^2} = \left(\frac{1}{h^2 \cdot \operatorname{cosec}^2(\gamma)} \right) h \cdot \operatorname{cosec}^2(\gamma) \cdot \sin(\gamma) d\gamma \cdot \mathbf{e}_\theta = \frac{\sin(\gamma) d\gamma}{h} \cdot \mathbf{e}_\theta$$

A lei de Biot-Savart para um filamento vórtice paralelo ao eixo z

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{\sin(\gamma) d\gamma}{h} \cdot \mathbf{e}_\theta$$

Continuação Precisamos definir os limites de integração que dependem se o segmento é infinito, finito ou semi-infinito.

Segmento Infinito – exemplo com cálculo de velocidade induzida a uma distância h do filamento, pontos com cor preta e vermelha; o filamento é representado pelos pontos amarelos.



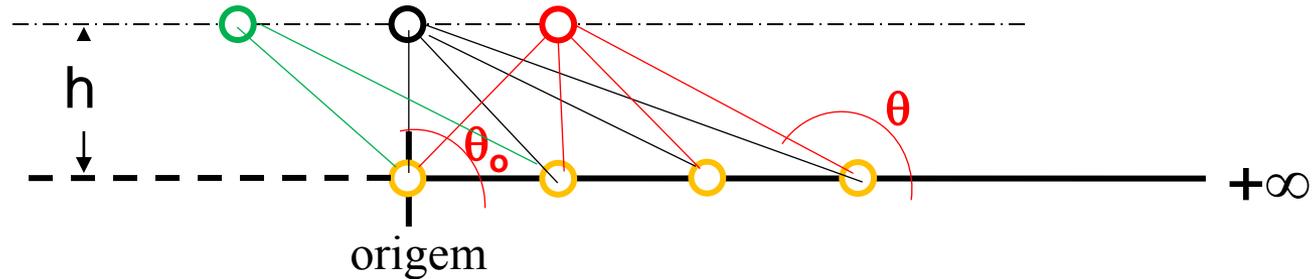
Fica claro que o domínio de integração para qualquer ponto no fluido é $\pi \leq \theta \leq 0$ sendo que π e 0 correspondem a um ponto no filamento dl está a $+\infty$ e $-\infty$ da origem, integração é:

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen}(\theta) d\theta}{h} \cdot \vec{e}_\theta = + \frac{\Gamma}{2\pi h} \cdot \vec{e}_\theta$$

O campo de velocidade possui componente v_θ somente, num plano ortogonal a direção do filamento de vórtice. O resultado concide com o campo gerado pelo vórtice na origem! Como era de se esperar.

Continuação

Segmento semi-infinito – exemplo com cálculo de velocidade induzida a uma distância h do filamento, pontos com cor preta e vermelha; o filamento é representado pelos pontos amarelos.



Fica claro que o domínio de integração é $\theta_0 \leq \theta \leq \pi$, $\theta_0 \leq \pi/2$ e a integração é:

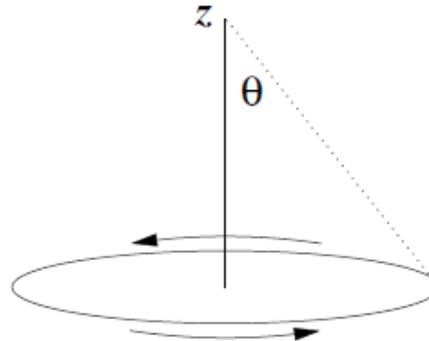
$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\pi}^{\theta_0} \frac{\text{sen}(\theta) d\theta}{h} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi h} [1 - \cos(\theta_0)] \cdot \vec{e}_\theta$$

O campo de velocidade possui componente v_θ somente, num plano ortogonal a direção do filamento de vórtice. O resultado concide com o campo gerado pelo vórtice na origem! Como era de se esperar.

C

13.3.1 Field of a ring of current

The Biot-Savart law allows us to work out the magnetic field of an interesting special case: a ring of current.



Take the ring to have radius R , and consider a current of magnitude I circulating as shown. What is the magnitude and direction of the current a point z above the ring's center?

Set up Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{I}{c} \int_{\text{around ring}} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}.$$

The distance r is easy — $r = \sqrt{z^2 + R^2}$. Likewise, the magnitude $|d\vec{l}|$ is easy — $|d\vec{l}| = R d\phi$, where ϕ is an angle around the perimeter of the ring. The cross product $d\vec{l} \times \hat{r}$ is a little bit trickier. A good way to understand it is to consider a special case: when $z = 0$, $d\vec{l} \times \hat{r}$ points in the vertical \hat{z} direction. Moving away from this case, we see that it *always* points along \hat{z} , but is reduced by a factor of $\sin \theta$ in general:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} \frac{R \sin \theta d\phi}{R^2 + z^2} \hat{z} \\ &= \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\phi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} \\ &= \frac{2\pi I}{c} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}. \end{aligned}$$

Notice that the direction, \hat{z} , could have been predicted by the right-hand rule: curl your fingers of your right hand in the direction of the current, and your thumb points along the field. Note also that it points in the same direction above and below the loop.