IM 250

MECÂNICA DOS FLUIDOS

Prof. Eugênio Spanó Rosa

1º sem/99

ÍNDICE

Revisão

Matemática

1.0 Revisão Matemática

1.1 Operações Vetoriais do ponto de Vista Geométrico

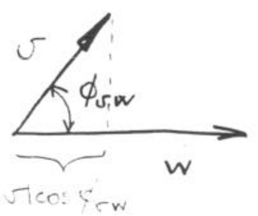
Um vetor $\vec{v}$ é definido como uma quantidade de uma dada magnitude e direção. A magnitude de um vetor é designada por $|\vec{v}|$. Dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são iguais quando suas magnitudes são iguais e q<u>do</u> eles apontam para a mesma direção.

- Produto escalar entre dois vetores

O produto <u>escalar</u> entre dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é a <u>quantidade escalar</u> definida por:

$$(\vec{v} \cdot \vec{w}) = |v||w| \cos \phi_{vw}$$

onde ϕ_{vw} é o ângulo que $\vec{v}$ faz com $\vec{w}$, veja figura



O produto escalar é então a magnitude de $\vec{w}$ multiplicada pela projeção de $\vec{v}$ em $\vec{w}$ ou vice versa.

Note que o produto escalar de um vetor por ele mesmo é o quadrado de sua magnitude,

$$(\vec{v} \cdot \vec{v}) = |\vec{v}|^2$$

Regras que governam produtos escalares

Comutativa $(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\vec{v}\cdot\vec{u})$

Não Associativa $(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w} \neq \vec{u}\,(\vec{v}\cdot\vec{w})$

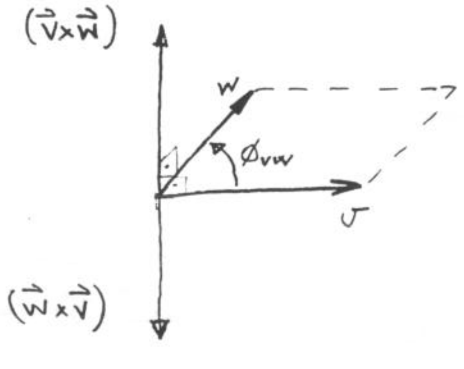
Distributiva $(\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})) = (\vec{u}\cdot\vec{v}) + (\vec{u}\cdot\vec{w})$

- Produto Vetorial entre dois vetores

O produto vetorial entre dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é uma grandeza vetorial definida por:

$$(\vec{v}\times\vec{w}) = \{|v||w|\sin\phi_{vw}\}\,\vec{n}_{vw}$$

onde $\vec{n}_{vw}$ é um vetor de comprimento unitário (vetor unitário) normal ao plano que contém $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e aponta na direção que um parafuso de rosca direita se moveria se fosse girado de $\vec{v}$ para $\vec{w}$ de um ângulo ϕ_{vw}.



Note que a magnitude do vetor resultante é a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Também segue da definição de produto vetorial que:

$$(\vec{v}\times\vec{v}) = 0$$

Regras que governam produtos vetoriais.

Não Comutativa: $(\vec{v} \times \vec{w}) = -(\vec{w} \times \vec{v})$

Não Associativa: $(\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})) \neq ((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w})$

Distributiva: $((\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

1.2 Operações com vetores do ponto de Vista Analítico

Nesta secção um tratamento analítico será dado aos tópicos apresentados na secção anterior. A abordagem estará restrita a um sistema retangular de coordenadas cujos eixos serão denominados por 1, 2 e 3 correspondendo a notação usual p/ x, y e z.

As fórmulas podem ser escritas de forma compacta em termos do delta de Kronecker, δ_{ij} e do símbolo de permutação ε_{ijk}. Estas quantidades são definidas como:

$$\begin{cases} \delta_{ij} = +1 & \text{se } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{ijk} = +1 & \text{se } ijk = 123,\ 231,\ \text{ou } 312 \\ \varepsilon_{ijk} = -1 & \text{se } ijk = 321,\ 213,\ \text{ou } 132 \\ \varepsilon_{ijk} = 0 & \text{se quaisquer dois índices forem iguais} \end{cases}$$

O símbolo de permutação também é dado por:

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$$

Várias relações envolvendo δ_{ij} e ε_{ijk} são úteis para manipular ou demonstrar identidades vetoriais ou tensoriais, entre elas:

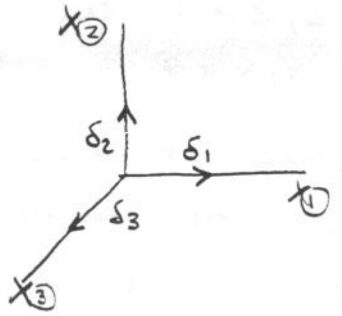
$$^{*}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{hjk} = 2\,\delta_{ih}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\,\delta_{jn} - \delta_{in}\,\delta_{jm}$$

* o símbolo Σ implica que o produto $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{hjk}$ seja somado para todos os valores que o índice de Σ pode assumir

1.2-1 Vetores unitários

Considere $\vec{\delta}_1$, $\vec{\delta}_2$ e $\vec{\delta}_3$ vetores unitários, isto é, vetores com magnitude unitária, na direção dos eixos 1, 2 e 3



Aplicando a definição de produto escalar e vetorial pode-se tabular todos os possíveis produtos

$$\begin{cases} (\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_1) = (\vec{\delta}_2 \cdot \vec{\delta}_2) = (\vec{\delta}_3 \cdot \vec{\delta}_3) = +1 \\ (\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2) = (\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_3) = (\vec{\delta}_2 \cdot \vec{\delta}_3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\vec{\delta}_1 \times \vec{\delta}_1) = (\vec{\delta}_2 \times \vec{\delta}_2) = (\vec{\delta}_3 \times \vec{\delta}_3) = 0 \\ (\vec{\delta}_1 \times \vec{\delta}_2) = \vec{\delta}_3 \quad (\vec{\delta}_2 \times \vec{\delta}_3) = \vec{\delta}_1 \quad (\vec{\delta}_3 \times \vec{\delta}_1) = \vec{\delta}_2 \\ (\vec{\delta}_2 \times \vec{\delta}_1) = -\vec{\delta}_3 \quad (\vec{\delta}_3 \times \vec{\delta}_2) = -\vec{\delta}_1 \quad (\vec{\delta}_1 \times \vec{\delta}_3) = -\vec{\delta}_2 \end{cases}$$

Todas estas relações podem ser sumarizadas em duas relações:

$$(\vec{\delta}_i \bullet \vec{\delta}_j) = \delta_{ij}$$

$$(\vec{\delta}_j \times \vec{\delta}_k) = \sum_{i=1}^{3}{}' \varepsilon_{ijk} \vec{\delta}_i$$

Nas secções subseqüentes, onde serão desenvolvidas expressões para operações vetoriais e tensoriais, tudo que será feito será decompor os vetores ou tensores através dos vetores unitários e aplicar as equações acima. Assim,

$$\vec{v} = \vec{\delta}_1 v_1 + \vec{\delta}_2 v_2 + \vec{\delta}_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3}{}' \vec{\delta}_i v_i$$

$$\vec{v} + \vec{w} = \sum_i{}' \delta_i v_i + \sum_i{}' \delta_i w_i = \sum_i{}' \delta_i (v_i + w_i)$$

1.2-2 O produto escalar entre dois vetores

$$(\vec{v} \bullet \vec{w}) = \left(\left\{ \sum_i{}' \vec{\delta}_i v_i \right\} \bullet \left\{ \sum_j{}' \vec{\delta}_j w_j \right\} \right) = \sum_i{}' \sum_j{}' (\vec{\delta}_i \bullet \vec{\delta}_j) v_i w_j$$

$$= \sum_i{}' \sum_j{}' \delta_{ij} v_i w_j = \sum_i{}' v_i w_i$$

1.2-3 O produto vetorial entre dois vetores

$$(\vec{v}\times\vec{w}) = \left[\left\{\sum_j \vec{\delta}_j v_j\right\}\times\left\{\sum_k \vec{\delta}_k w_k\right\}\right]$$

$$= \sum_j \sum_k (\vec{\delta}_j \times \vec{\delta}_k) v_j w_k = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \vec{\delta}_i v_j w_k$$

$$= \det \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= (v_2 w_3 - v_3 w_2)\vec{\delta}_1 + (v_3 w_1 - v_1 w_3)\vec{\delta}_2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\vec{\delta}_3$$

Note que a componente na direção i de $(\vec{v}\times\vec{w})$ é dada por

$$(\vec{v}\times\vec{w})_i = \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} v_j w_k \quad .$$

Por exemplo, se $i=1$, então

$$(\vec{v}\times\vec{w})_1 = \sum_j \sum_k \varepsilon_{1jk} v_j w_k$$

mas os únicos dois valores que os índices jk podem assumir são $jk = 2,3$ ou $3 2$, caso contrário $\varepsilon_{ijk} \equiv 0$, logo

$$(\vec{v}\times\vec{w})_1 = \varepsilon_{123} v_2 w_3 + \varepsilon_{132} v_3 w_2 = v_2 w_3 - v_3 w_2$$

1.2-4 Multiplas operacões Vetoriais

Expressões para produtos multiplos envolvendo vetores podem ser obtidas usando as expressões analíticas que expressam os produtos escalares e vetoriais. Por exemplo, o produto $(\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}))$ pode ser escrito como

$$(\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})) = \sum_i u_i\,(\vec{v}\times\vec{w})_i = \sum_i\sum_j\sum_k \varepsilon_{ijk}\,u_i v_j w_k$$

ou

$$(\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})) = \det\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

A magnitude de $(\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}))$ é o volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Além disto, se o determinante for nulo implica que os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

Exemplo: Mostre que $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{w}\times\vec{z}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})(\vec{v}\cdot\vec{z}) - (\vec{u}\cdot\vec{z})(\vec{v}\cdot\vec{w})$

$$(\vec{u}\times\vec{v}) = \sum_i\sum_j\sum_k \varepsilon_{ijk}\,\vec{\delta}_i\,u_j v_k \quad \text{e}$$

$$(\vec{w}\times\vec{z}) = \sum_h\sum_\ell\sum_m \varepsilon_{h\ell m}\,\vec{\delta}_h\,w_\ell z_m$$

então

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{w}\times\vec{z}) = \left(\sum_i\sum_j\sum_k \varepsilon_{ijk}\,\vec{\delta}_i\,u_j v_k\right)\cdot\left(\sum_h\sum_\ell\sum_m \varepsilon_{h\ell m}\,\vec{\delta}_h\,w_\ell z_m\right)$$

$$= \sum_i \sum_h (\vec{\delta}_i \cdot \vec{\delta}_h) \left\{ \left(\sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} u_j v_k \right) \cdot \left(\sum_l \sum_m \varepsilon_{hlm} w_l z_m \right) \right\}$$

$$= \sum_i \sum_h \delta_{ih} \left(\sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} u_j v_k \right) \cdot \left(\sum_l \sum_m \varepsilon_{hlm} w_l z_m \right)$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \varepsilon_{ijk} \, \varepsilon_{ilm} \, u_j v_k w_l z_m$$

mas $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}$ e $\varepsilon_{ilm} = -\varepsilon_{mli}$, então

$$= \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \left(\sum_i \varepsilon_{kji} \, \varepsilon_{mli} \, u_j v_k w_l z_m \right)$$

$$= \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \left(\delta_{km} \delta_{jl} - \delta_{kl} \delta_{jm} \right) u_j v_k w_l z_m$$

$$= \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \delta_{km} \delta_{jl} u_j v_k w_l z_m - \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \delta_{kl} \delta_{jm} u_j v_k w_l z_m$$

$$= \left(\sum_k \sum_m \delta_{km} v_k z_m \right) \left(\sum_j \sum_l \delta_{jl} u_j w_l \right) - \left(\sum_k \sum_l \delta_{kl} v_k w_l \right) \left(\sum_j \sum_m \delta_{jm} u_j z_m \right)$$

$$= (\vec{v} \cdot \vec{z}) (\vec{u} \cdot \vec{w}) \quad - \quad (\vec{v} \cdot \vec{w}) (\vec{u} \cdot \vec{z})$$

Outras identidades vetoriais podem ser similarmente demonstradas,

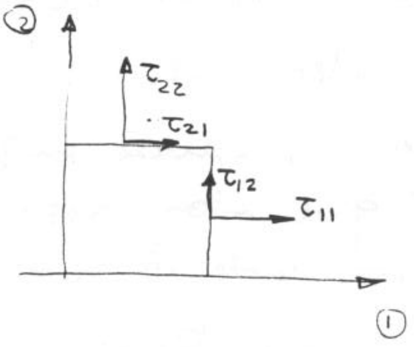
$$(\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})) = \vec{v} \, (\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{w} \, (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{w} \times \vec{z}) = ((\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{z}) \vec{w} - ((\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}) \vec{z}$$

1.3 Tensores

Ao invéz de apresentar uma definição formal de um tensor, vamos buscar algumas situações físicas, relacionadas a mecânica dos fluidos, onde o conceito de tensor emergirá naturalmente.

Considere por exemplo um escoamento bidimensional onde o fluido está sujeito a um estado de tensão bi-dimensional, τ_{ij},



onde o primeiro indice refere-se a superfície onde a tensão atua e o segundo a sua direção. Neste caso τ_{12} representa a tensão que atua no plano (1) na direção do eixo ②

Se desejarmos saber a força resultante no fluido dado o campo de tensões temos que multiplicar cada tensão pela área onde ela atua no elemento. Assim, a força resultante na direção ① será:

$$F_1 = \tau_{11} A_1 + \tau_{21} A_2$$

e na direção ②

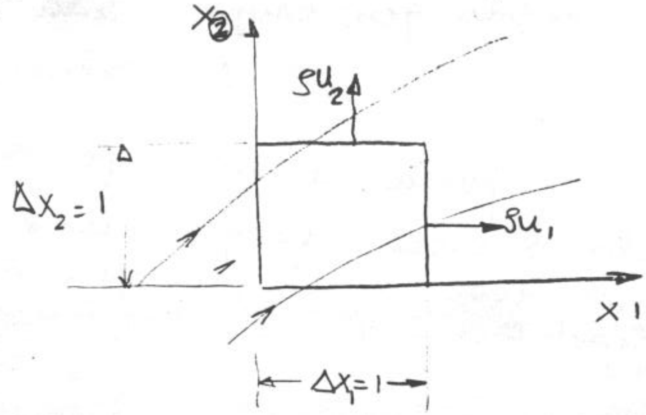
$$F_2 = \tau_{22} A_2 + \tau_{12} A_1$$

Nota-se que a tensão τ_{ij} está associada a um vetor força para cada direção do espaço. Deve-se destacar também que diferentemente dos vetores é necessário associar a uma tensão o plano onde ela atua e sua direção no plano.

Neste ponto podemos dizer que esta tensão é representada por um tensor de ordem 2. Na verdade, um escalar é um tensor de ordem 0, (suas propriedades não dependem de sua orientação espacial, exemplo de escalar: temperatura, energia interna, etc), um vetor é um tensor de ordem 1, (suas propriedades dependem da direção que eles assumem no espaço, exemplo, velocidade $\vec{v}$, momento $m\vec{v}$, etc) e finalmente a tensão é um tensor de ordem 2 porque para defini-la é necessário conhecer a superfície onde ela atua e sua direção.

Existem tensores de ordem superior a 2 entretanto eles raramente ocorrem em fenômenos relacionados à mecânica dos fluidos. As operações tensoriais que serão tratadas neste capítulo serão referentes a tensores de ordem 2.

Antes de introduzir algumas operações e propriedades básicas sobre tensores de ordem 2 é conveniente identificarmos o produto entre dois vetores como sendo uma forma especial de um tensor de segunda ordem. Para isso suponha que você deseja saber o momento que cruza uma superfície, cujos áreas transversais ao escoamento, A_1 e A_2 são mantidas, conforme mostra a Fig. abaixo

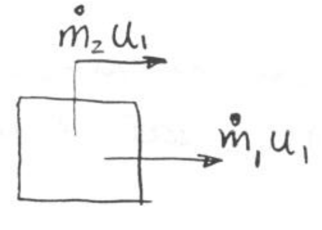


$(\Delta x_3 = 1)$

Nas faces 1 e 2 o fluxo de massa é dado por

$$\dot{m}_1 = \rho u_1 (1) \quad e \quad \dot{m}_2 = \rho v_2 (1)$$

Note que tanto o fluxo de massa que cruza a área 1 assim como o que cruza pela área 2 são transportados pelo escoamento que possui velocidade (u_1, v_2) em cada uma das faces. Então o momento na direção 1,



$$J_1 = (\rho u_1) u_1 + (\rho u_2) u_1$$

analogamente o fluxo de momento na direção 2

$$J_2 = \rho u_1 v_2 + \rho v_2 v_2$$

Observe então que o momento J_i (natureza vetorial) depende do fluxo de massa que cruza cada área do elemento e da direção da velocidade. Então o produto $(u_i u_j)$ possui a natureza de um tensor de segunda ordem porque precisa da especificação de duas direções. A ele se refere o nome de produto diádico.

1.3-1 Tensores de Segunda Ordem: Definições e Notação

Em analogia a um vetor que necessita de três componentes para ser especificado, um tensor de ordem 2 precisa de nove componentes

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

O produto diádico entre dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é também um tensor de segunda ordem. Os elementos da matriz são produtos dos componentes dos vetores

$$v_i w_j = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_2 w_1 & v_3 w_1 \\ v_1 w_2 & v_2 w_2 & v_3 w_2 \\ v_1 w_3 & v_2 w_3 & v_3 w_3 \end{pmatrix}$$

A diádica $\vec{v}\vec{w}$ é em geral diferente da diádica $\vec{w}\vec{v}$. Deve ser enfatizado que o produto diádico é representado escrevendo-se os dois vetores sem nenhum símbolo de multiplicação entre eles.

A transposta de um tensor é obtida invertendo-se a ordem de seus índices; a transposta de τ_{ij} e τ_{ji}. Denota-se a transposta de τ_{ij} por $(\tau^t)_{ij}$,

$$(\tau^t)_{ij} = \tau_{ji} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}.$$

Um tensor é dito ser simétrico se ele for igual ao seu transposto. Q_{ij} é simétrico se

$$Q_{ij} = Q_{ji}$$

Um tensor R_{ij} é dito ser anti-simétrico se ele for igual ao negativo de seu transposto,

$$R_{ij} = -R_{ji}.$$

O primeiro tensor abaixo é simétrico enquanto que o segundo é anti-simétrico:

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad R_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que um tensor simétrico possui seis componentes independentes enquanto que um anti-simétrico possui apenas três. Note que para um tensor anti-simétrico, $R_{ij} = - R_{ji}$, os elementos da diagonal só podem satisfazer esta identidade se eles forem iguais a zero.

Um tensor arbitrário T_{ij} pode sempre ser decomposto em uma parte simétrica e em outra anti-simétrica. Para mostrar isto comecemos com T_{ij} somando e subtraindo-se metade de seu transposto:

$$T_{ij} = \frac{1}{2} T_{ij} + \frac{1}{2} T_{ji} + \frac{1}{2} T_{ij} - \frac{1}{2} T_{ji}$$

Denotando por

$$T_{(ij)} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) \quad e$$

$$T_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right)$$

então

$$T_{ij} = T_{(ij)} + T_{[ij]}$$

mas $T_{(ij)} = T_{(ji)}$ daí $T_{(ij)}$ é simétrico,

$T_{[ij]} = - T_{[ji]}$ daí $T_{[ij]}$ é anti-simétrico.

Vamos ilustrar com um exemplo específico

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2+4}{2} & \frac{3+2}{2} \\ \frac{4+2}{2} & 0 & \frac{5+1}{2} \\ \frac{2+3}{2} & \frac{1+5}{2} & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{2-4}{2} & \frac{3-2}{2} \\ \frac{4-2}{2} & 0 & \frac{5-1}{2} \\ \frac{2-3}{2} & \frac{1-5}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5/2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5/2 & 3 & 3 \end{bmatrix}}_{T_{(ij)}\ \text{simétrica}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1/2 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_{T_{[ij]}\ \text{anti-simétrica}}$$

1.3-2. Operações Analíticas com Tensores

Fazendo um paralelo aos vetores que necessitam de uma direção para serem especificados os tensores de segunda ordem necessitam de duas direções, isto é, uma correspondente à superfície onde ele atua e outro ... [illegible] onde ele atua.

outro [illegible]

[illegible]

[illegible] o produto diádico [illegible] é definido a partir dos vetores unitários,

$$(\vec{\delta}_m \vec{\delta}_n) = \delta_{mi}\delta_{nj} .$$

Existem nove produtos diádicos unitários, a saber

$$\vec{\delta}_1\vec{\delta}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\delta}_1\vec{\delta}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\delta}_1\vec{\delta}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\delta}_2\vec{\delta}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\delta}_2\vec{\delta}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\delta}_2\vec{\delta}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\delta}_3\vec{\delta}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\delta}_3\vec{\delta}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \vec{\delta}_3\vec{\delta}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

As operações com os produtos diádicos unitários são introduzidas formalmente através da relação que elas tem com os vetores unitários.

$$(\vec{\delta}_i\vec{\delta}_j : \vec{\delta}_k\vec{\delta}_\ell) = (\vec{\delta}_j \cdot \vec{\delta}_k)(\vec{\delta}_i \cdot \vec{\delta}_\ell) = \delta_{jk}\delta_{i\ell}$$

$$[\vec{\delta}_i\vec{\delta}_j \cdot \vec{\delta}_k] = \vec{\delta}_i(\vec{\delta}_j \cdot \vec{\delta}_k) = \vec{\delta}_i\,\delta_{jk}$$

$$[\vec{\delta}_i \cdot \vec{\delta}_j\vec{\delta}_k] = (\vec{\delta}_i \cdot \vec{\delta}_j)\,\vec{\delta}_k = \delta_{ij}\,\vec{\delta}_k$$

$$\{\vec{\delta}_i\vec{\delta}_j \cdot \vec{\delta}_k\vec{\delta}_\ell\} = \vec{\delta}_i(\vec{\delta}_j \cdot \vec{\delta}_k)\vec{\delta}_\ell = \delta_{jk}\,\vec{\delta}_i\vec{\delta}_\ell$$

$$\{\vec{\delta}_i\vec{\delta}_j \times \vec{\delta}_k\} = \vec{\delta}_i[\vec{\delta}_j \times \vec{\delta}_k] = \sum_{\ell=1}^{3} \varepsilon_{jk\ell}\,\vec{\delta}_i\vec{\delta}_\ell$$

$$\{\vec{\delta}_i \times \vec{\delta}_j\vec{\delta}_k\} = [\vec{\delta}_i \times \vec{\delta}_j]\,\vec{\delta}_k = \sum_{\ell=1}^{3} \varepsilon_{ij\ell}\,\vec{\delta}_\ell\vec{\delta}_k$$

• Expansão de um tensor em termos de suas componentes

Assim como um vetor é escrito em termos de cada um de seus componentes através dos vetores unitários, com o tensor pode-se fazer o mesmo através dos produtos diádicos unitários,

$$\tau = \vec{\delta}_1\vec{\delta}_1 \tau_{11} + \vec{\delta}_1\vec{\delta}_2 \tau_{12} + \vec{\delta}_1\vec{\delta}_3 \tau_{13}$$
$$+ \vec{\delta}_2\vec{\delta}_1 \tau_{21} + \vec{\delta}_2\vec{\delta}_2 \tau_{22} + \vec{\delta}_2\vec{\delta}_3 \tau_{23}$$
$$+ \vec{\delta}_3\vec{\delta}_1 \tau_{31} + \vec{\delta}_3\vec{\delta}_2 \tau_{32} + \vec{\delta}_3\vec{\delta}_3 \tau_{33}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \vec{\delta}_i \vec{\delta}_j \tau_{ij}$$

O tensor transposto de τ,

$$\tau^t = \sum_i \sum_j \vec{\delta}_i \vec{\delta}_j \tau_{ji}$$

O produto diádico de dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$,

$$\vec{v}\,\vec{w} = \sum_i \sum_j \vec{\delta}_i \vec{\delta}_j v_i w_j$$

1.3.3 O produto tensorial entre dois Tensores

$$\{\sigma \cdot \tau\} = \left\{\left(\sum_i \sum_j \vec{\delta}_i \vec{\delta}_j \sigma_{ij}\right) \cdot \left(\sum_k \sum_e \vec{\delta}_k \vec{\delta}_e \tau_{ke}\right)\right\}$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_e \{\vec{\delta}_i \vec{\delta}_j \cdot \vec{\delta}_k \vec{\delta}_e\} \sigma_{ij} \tau_{ke}$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_e \delta_{jk} \vec{\delta}_i \vec{\delta}_e \sigma_{ij} \tau_{ke}$$

$$= \sum_i \sum_e \vec{\delta}_i \vec{\delta}_e \left(\sum_j \sigma_{ij} \tau_{je}\right)$$

1.3.4 O produto vetorial de um tensor com um vetor

O produto vetorial entre um tensor e um vetor resulta em uma grandeza vetorial,

$$[\tau \cdot \vec{v}] = \left[\left\{\sum_i \sum_j \vec{\delta}_i \vec{\delta}_j \tau_{ij}\right\} \cdot \left\{\sum_k \vec{\delta}_k v_k\right\}\right]$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k [\vec{\delta}_i \vec{\delta}_j \cdot \vec{\delta}_k] \tau_{ij} v_k$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k \vec{\delta}_i \delta_{jk} \tau_{ij} v_k = \sum_i \vec{\delta}_i \left[\sum \tau_{ij} v_j\right]$$

Isto é, a componente i do produto $[\tau \cdot \vec{v}]$ é $\sum_j \tau_{ij} v_j$. Similarmente, a componente i do produto $[\vec{v} \cdot \tau]$ é $\sum_j v_j \tau_{ji}$. Obviamente $[\tau \cdot \vec{v}] \neq [\vec{v} \cdot \tau]$ a menos que τ seja simétrico

$$[\tau \cdot \vec{v}] = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} v_1 + \tau_{12} v_2 + \tau_{13} v_3 \\ \tau_{21} v_1 + \tau_{22} v_2 + \tau_{23} v_3 \\ \tau_{31} v_1 + \tau_{32} v_2 + \tau_{33} v_3 \end{pmatrix}$$

1.3-5 O produto tensorial de um tensor com um vetor

O produto tensorial de um tensor com um vetor resulta em uma grandeza tensorial,

$$\{\tau \times \vec{v}\} = \left\{\left(\sum_i \sum_j \vec{\delta}_i \vec{\delta}_j \tau_{ij}\right) \times \left(\sum_k \vec{\delta}_k v_k\right)\right\} = \sum_i \sum_j \sum_k [\vec{\delta}_i \vec{\delta}_j \times \vec{\delta}_k] \tau_{ij} v_k$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \varepsilon_{jkl} \vec{\delta}_i \vec{\delta}_l \tau_{ij} v_k$$

$$= \sum_i \sum_l \vec{\delta}_i \vec{\delta}_l \left\{\sum_k \sum_j \varepsilon_{jkl} \tau_{ij} v_k\right\}$$

A componente il de $\{\tau \times \vec{v}\}$ é $\sum_j \sum_k \varepsilon_{jkl} \tau_{ij} v_k$. Similarmente a componente lk de $\{\vec{v} \times \tau\}$ é

$\sum_i \sum_j \varepsilon_{ijl} v_i \tau_{jk}$

1.3-6 O produto escalar entre dois tensores

O produto escalar entre dois tensores resulta em uma grandeza escalar,

$$(\sigma : \tau) = \left(\left\{\sum_i \sum_j \vec{\delta}_i \vec{\delta}_j \sigma_{ij}\right\} : \left\{\sum_k \sum_l \vec{\delta}_k \vec{\delta}_l \tau_{kl}\right\}\right)$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l (\vec{\delta}_i \vec{\delta}_j : \vec{\delta}_k \vec{\delta}_l) \sigma_{ij} \tau_{kl}$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \delta_{il} \delta_{jk} \sigma_{ij} \tau_{kl} = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \tau_{ji}$$

Similarmente pode-se mostrar que

$$(\tau : \vec{v}\vec{w}) = \sum_i{}' \sum_j{}' \tau_{ij} v_j w_i$$

$$(uv : wz) = \sum_i{}' \sum_j{}' u_i v_j w_j z_i$$

1.3-7 Invariantes de um tensor

Uma grandeza escalar pode ser formada a partir do produto escalar do vetor $\vec{v}$ com ele mesmo, $(\vec{v}.\vec{v}) = \sum_i{}' v_i v_i$. Esta grandeza é o quadrado da magnitude do vetor $\vec{v}$, e é conhecida como invariante escalar de $\vec{v}$ porque seu valor é independente do sistema de coordenadas ao qual $\vec{v}$ é referido. Para um vetor, somente um único invariante escalar pode ser construido. De um tensor τ pode-se construir três invariantes escalares,

$$I = \sum_i{}' \tau_{ii}$$

$$II = \sum_i{}' \sum_j{}' \tau_{ij} \tau_{ji}$$

$$III = \sum_i{}' \sum_j{}' \sum_k{}' \tau_{ij} \tau_{jk} \tau_{ki}$$

1.4 Operações Diferenciais com Vetores e Tensores

O operador vetorial diferencial ∇, conhecido como "nabla" ou "del" é definido em coordenadas cartesianas retangulares como:

$$\nabla = \vec{\delta}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{\delta}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{\delta}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \sum_i \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

O operador vetorial diferencial ∇ possui as componentes de um vetor mas ele por si só não possui significado ele deve vir acompanhado a sua direita por uma grandeza escalar, vetorial ou tensorial, daí o nome de operador.

1.4-1 O gradiente de um Campo Escalar

Se ϕ é uma função escalar das variáveis x_1, x_2 e x_3 então a operação de ∇ em ϕ é

$$\vec{\nabla}\phi = \vec{\delta}_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \vec{\delta}_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \vec{\delta}_3 \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = \sum_i \vec{\delta}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

O vetor gerado a partir das derivadas de ϕ é designado por $\vec{\nabla}\phi$ ou grad ϕ. Propriedades do gradiente:

$$\nabla(c\phi) = c\nabla\phi$$
$$\nabla(\phi+\psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$$
$$\nabla(\phi.\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi.$$

onde c é uma constante e ϕ e ψ são funções arbitrárias

1.4-2 Divergência de um campo vetorial

Se o vetor $\vec{v}$ é uma função das variáveis x_1, x_2 e x_3 então o produto escalar de $\vec{v}$ com ∇ é:

$$\nabla\cdot\vec{v} = \left(\left\{\sum_i \vec{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right\}\cdot\left\{\sum_j \vec{\delta}_j v_j\right\}\right) = \sum_i\sum_j (\vec{\delta}_i\cdot\vec{\delta}_j)\frac{\partial}{\partial x_i} v_j$$

$$= \sum_i\sum_j \delta_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

A grandeza escalar gerada pela somatória das derivadas do vetor $\vec{v}$ é chamada de divergência de $\vec{v}$, algumas vêzes abreviada por div $\vec{v}$. Propriedades do divergente:

$$\nabla\cdot(c\,\vec{v}) = c\,\nabla\cdot\vec{v}$$
$$\nabla\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \nabla\cdot\vec{v} + \nabla\cdot\vec{w}$$
$$\nabla\cdot(\phi\,\vec{v}) = \phi\,\nabla\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\phi$$

onde c é uma constante, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores e ϕ é uma função escalar

1.4-3 O Rotacional de um campo vetorial.

O produto vetorial entre ∇ e $\vec{v}$ gera um vetor e é definido por

$$\nabla\times\vec{v} = \left[\left\{\sum_j \vec{\delta}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right\}\times\left\{\sum_k \vec{\delta}_k v_k\right\}\right]$$

$$= \sum_j\sum_k (\vec{\delta}_j\times\vec{\delta}_k)\frac{\partial}{\partial x_j} v_k = \sum_i\sum_j\sum_k \epsilon_{ijk}\,\vec{\delta}_i\,\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

$$= \det \begin{vmatrix} \vec{\delta}_1 & \vec{\delta}_2 & \vec{\delta}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{\delta}_1 \left\{ \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right\} + \vec{\delta}_2 \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right\} + \vec{\delta}_3 \left\{ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right\}$$

O produto vetorial $\nabla \times \vec{v}$ é denominado por rotacional de $\vec{v}$, rot $\vec{v}$. Note que a componente i de $\nabla \times \vec{v}$ é $\sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right)$.

Propriedades do Rotacional

$$\nabla \times (c \vec{v}) = c \nabla \times \vec{v}$$
$$\nabla \times (\vec{v} + \vec{w}) = \nabla \times \vec{v} + \nabla \times \vec{w}$$
$$\nabla \times (\phi \vec{v}) = \phi \nabla \times \vec{v} + (\nabla \phi) \times \vec{v} = \phi \nabla \times \vec{v} - \vec{v} \times \nabla \phi$$
$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} (\nabla \cdot \vec{w}) - \vec{w} (\nabla \cdot \vec{v}) + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{w}$$
$$\nabla \times \nabla \times \vec{v} = \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla \cdot (\nabla \vec{v}).$$

onde c é uma constante, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores e ϕ uma função escalar.

Deve-se destacar duas identidades relacionadas com rotacional, divergente e gradiente que são identicamente nulas.

$$\text{rot } (\text{grad } \phi) = (\nabla \times \nabla \phi)_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \equiv 0$$

$$\text{div } (\text{rot } \vec{v}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \equiv 0$$

1.4-4 Gradiente de um Campo Vetorial

Adicionalmente ao produto escalar $\nabla\cdot\vec{v}$ e ao produto vetorial $\nabla\times\vec{v}$ pode-se formar $\nabla\vec{v}$:

$$\nabla\vec{v} = \left\{\sum_i \vec{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right\}\left\{\sum_j \vec{\delta}_j v_j\right\} = \sum_i \sum_j \vec{\delta}_i \vec{\delta}_j \frac{\partial}{\partial x_i} v_j$$

Ele é chamado de gradiente do vetor $\vec{v}$ e pode também ser escrito como $\text{grad}\,\vec{v}$. Ele é um tensor de segunda ordem cuja componente ij é $\frac{\partial}{\partial x_i} v_j$

1.4-5 Divergência de um Campo Tensorial

O produto vetorial entre um tensor e o operador ∇ gera um vetor, ele é definido por:

$$\nabla\cdot\tau = \left[\left\{\sum_i \vec{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right\}\cdot\left\{\sum_j \sum_k \vec{\delta}_j \vec{\delta}_k \tau_{jk}\right\}\right] = \sum_i \sum_j \sum_k \left[\vec{\delta}_i\cdot\vec{\delta}_j\vec{\delta}_k\right] \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_i}$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k \delta_{ij} \vec{\delta}_k \frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{jk} = \sum_k \vec{\delta}_k \left\{\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{ik}\right\}$$

Este produto é chamado de divergência de τ, $\text{div}\,\tau$. A componente k de $\nabla\cdot\tau$ é $\sum_i \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_i}$.

Se τ é o produto $\vec{v}\vec{w}$,

$$\nabla\cdot\vec{v}\vec{w} = \sum_k \delta_k \left\{\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(v_i w_k)\right\}$$

1.4.6 Laplaciano de um Campo Escalar

O divergente do gradiente de uma função escalar ϕ é:

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \left(\left\{ \sum_i{}' \vec{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \cdot \left\{ \sum_j{}' \vec{\delta}_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\} \right)$$

$$= \sum_i{}' \sum_j{}' \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \left\{ \sum_i{}' \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} \right\}$$

A esta combinação de operadores de ϕ é dado o nome de Laplaciano, ∇^2. Em coordenadas cartesianas

$$(\nabla \cdot \nabla) = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

1.4.7 Laplaciano de um Campo Vetorial

O divergente do gradiente de um vetor $\vec{v}$ é:

$$[\nabla \cdot \nabla \vec{v}] = \left[\left\{ \sum_i{}' \vec{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \cdot \left\{ \sum_j{}' \sum_k{}' \vec{\delta}_j \vec{\delta}_k \frac{\partial}{\partial x_j} v_k \right\} \right]$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k [\vec{\delta}_i \cdot \vec{\delta}_j \vec{\delta}_k] \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} v_k$$

$$= \sum_i{}' \sum_j{}' \sum_k{}' \delta_{ij} \vec{\delta}_k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} v_k$$

$$= \sum_k{}' \vec{\delta}_k \left(\sum_i{}' \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i^2} \right)$$

A componente k de $\nabla \cdot \nabla \vec{v}$, em coordenadas cartesianas é $\nabla^2 v_k$.

Identidades Vetoriais - Tensoriais comumente utilizadas em Mecânica dos Fluidos

i) $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}\right) - \vec{v}\times\nabla\times\vec{v}$

ii) $\nabla\cdot\vec{v}\vec{w} = (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{w} + \vec{w}(\nabla\cdot\vec{v})$

iii) $\nabla^2\vec{v} = \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{v})$

iv) $\vec{v}\times\nabla\times\vec{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}\right) - (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$

v) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{v}) = 0$

vi) $\nabla\times(\nabla\phi) = 0$

vii) $\nabla\times\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{v})$

viii) $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = (\vec{v}\cdot\nabla\vec{v})_k = \sum_i v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$

ix) $\nabla\times(\vec{v}\times\vec{\omega}) = \vec{v}(\nabla\cdot\vec{\omega}) - \vec{\omega}(\nabla\cdot\vec{v}) - (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\omega} + (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v}$

x) $\nabla\times(\nabla\times\vec{\omega}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{\omega}) - \nabla^2\vec{\omega}$

Quadro Comparativo das Notações

Notação Vetorial	Notação Indicial	Ordem do Tensor
$\vec{v}$ (vetor)	v_i	1
$\vec{u}.\vec{v}$ (produto escalar)	$u_i v_i$	0
$(\vec{u}\times\vec{v})_i$ (produto vetorial)	$\varepsilon_{ijk} u_j v_k$	1
τ (tensor)	τ_{ij}	2
$\vec{u}\vec{v}$ (produto diádico)	$u_i v_j$	2
$(v.\tau)_i$ (produto vetorial τ com $\vec{v}$)	$v_j \tau_{ji}$	1
$(\tau:\sigma)$ (produto escalar τ com σ)	$\tau_{ij}\sigma_{ji}$	0
$\text{grad}\,\phi = \nabla\phi$ (gradiente campo escalar)	$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$	1
$\text{div}\,\vec{v} = \nabla.\vec{v}$ (divergente)	$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$	0
$\text{rot}\,\vec{v} = (\nabla\times\vec{v})_i$ (rotacional)	$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$	1
$\text{grad}\,\vec{v} = (\nabla\vec{v})_{ij}$ (grad. campo vetorial)	$\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$	2
$\text{div}\,\tau = (\nabla.\tau)_k$ (divergente campo tensorial)	$\frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_i}$	1
$\text{div}\,\vec{v}\vec{w} = (\nabla.\vec{v}\vec{w})_k$ (" " ")	$\frac{\partial}{\partial x_i} v_i w_k$	1
$\nabla^2\phi = \nabla.\nabla\phi$ (Laplaciano campo escalar)	$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}$	0
$\nabla^2\vec{v} = (\nabla.\nabla\vec{v})_k$ (Laplaciano Campo vetorial)	$\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i^2}$	1

Exemplo: Mostrar que a derivada direcional de ϕ ao longo da curva C é dada por

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \text{grad}\,\phi \cdot \vec{T}$$

onde $\vec{T}$ é o vetor unitário tangente a C em qualquer ponto

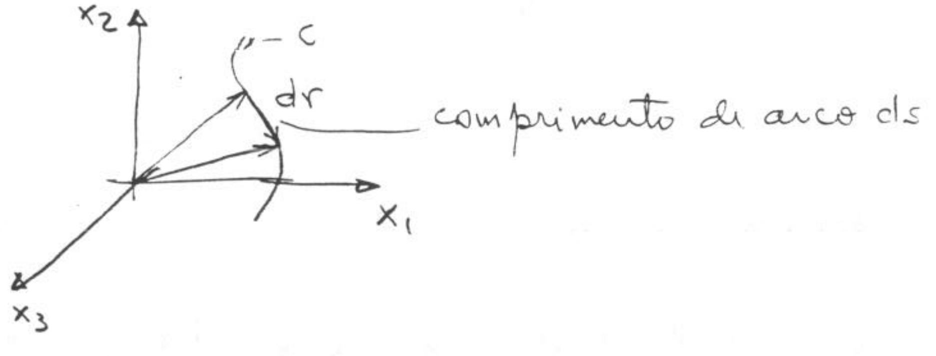
solução: O vetor unitário tangente a curva C é dado em coordenadas cartesianas por

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\delta}_1 \frac{dx_1}{ds} + \vec{\delta}_2 \frac{dx_2}{ds} + \vec{\delta}_3 \frac{dx_3}{ds}$$

onde $\vec{r}$ é o vetor posição,

$$\vec{r} = \vec{\delta}_1 x_1 + \vec{\delta}_2 x_2 + \vec{\delta}_3 x_3$$

e s o comprimento do arco de C, conforme mostra Fig. abaixo:



Do cálculo, a derivada $\frac{\partial\phi}{\partial s}$ é dada por

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial s} + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial s}$$

mas esta soma de produtos é idêntica a operação $\nabla\phi \cdot \vec{T}$ portanto

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \nabla\phi \cdot \vec{T}$$

Exemplo: Mostre que se ϕ é uma função escalar tal que $\phi = \phi(x, y, z, t)$ então

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\vec{r} + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt$$

Solução: O vetor posição $\vec{r}$ em coordenadas cartesianas é dado por

$$\vec{r} = \left(\vec{\delta}_1 x_1 + \vec{\delta}_2 x_2 + \vec{\delta}_3 x_3\right) \quad \text{e}$$

$$d\vec{r} = \left(\vec{\delta}_1 dx_1 + \vec{\delta}_2 dx_2 + \vec{\delta}_3 dx_3\right)$$

Do cálculo, o diferencial de ϕ é:

$$d\phi = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz}_{} + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt$$

mas

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\vec{r} + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt$$

Exemplo 3: Demonstre a identidade:

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla\left(\frac{1}{2} v^2\right) - \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

solução: $$(\nabla \times \vec{v})_k = \varepsilon_{klm} \frac{\partial v_m}{\partial x_l}$$

$$\{\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})\}_i = \varepsilon_{ijk} v_j (\nabla \times \vec{v})_k$$

$$\{\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})\}_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} A_j \frac{\partial \vec{v}_m}{\partial x_l}$$

Definindo o delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{se} \quad i = j$$
$$= 0 \quad \text{se} \quad i \neq j$$

o produto

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \equiv \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \equiv \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

portanto

$$\{\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})\}_i = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) v_j \frac{\partial v_m}{\partial x_l}$$

mas $\delta_{jm} v_j = v_j$ porque $\delta_{jm} = 0$ quando $j \neq m$ e $\delta_{jm} = 1$ quando $j = m$. Procedendo de maneira similar;

$$\{\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})\}_i = v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2} v_j v_j\right) - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

$$= \nabla\left(\frac{1}{2} v^2\right) - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

1.5 Teorema de Stokes

O teorema de Stokes relaciona a integral do vetor $\vec{A}$ ao longo do contorno fechado C com a integral de superfície do rotacional de $\vec{A}$ na superfície S circunscrita pelo contorno C.

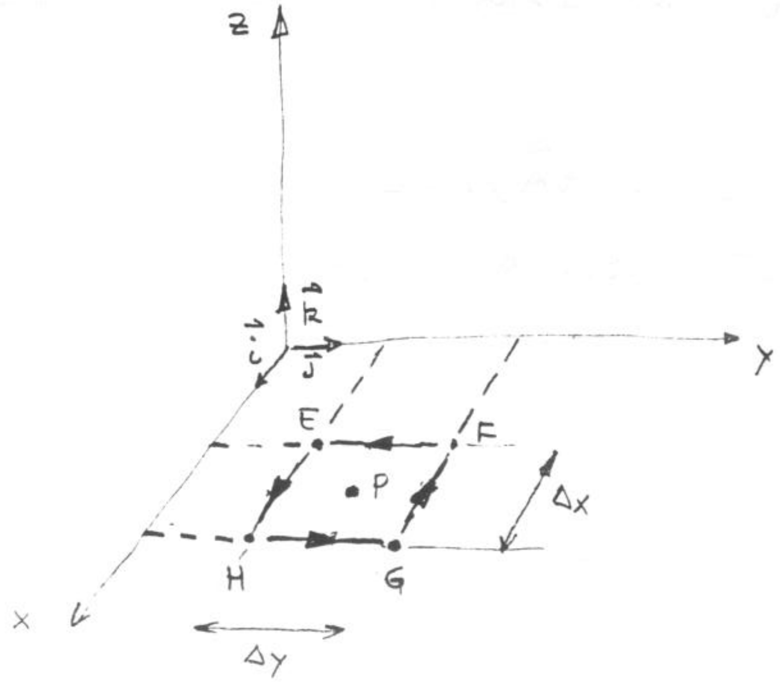
$$\oint_C (\vec{A} \cdot d\vec{L}) = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

A demonstração do teorema de Stokes é uma decorrência do fato que a intensidade do rotacional de $\vec{A}$ num ponto P é o limite da circulação por unidade de área quando a curva C tende para o ponto P,

$$\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{L}$$

Demonstração

Considere o retângulo EFGH com lados Δy e Δx como mostra a figura. $\Delta \vec{S} = \vec{k}\, \Delta x \Delta y$, $\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}$ e $d\vec{L}_z$ representa o contorno EFGH, o subíndice z indica que ele está contido no plano xy



Para o contorno C, [illegible] xy, o produto $\vec{A}\cdot d\vec{L}_z$ é:

lado FE $\Rightarrow$ $d\vec{L} = -\vec{j}\,\Delta y$; $\vec{A}\cdot d\vec{L}_z = \left(A_p - \frac{\partial A_2}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)(-\Delta y)$

lado FG $\Rightarrow$ $d\vec{L} = -\vec{i}\,\Delta x$; $\vec{A}\cdot d\vec{L}_z = \left(A_p + \frac{\partial A_1}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x$

lado GH $\Rightarrow$ $d\vec{L} = +\vec{j}\,\Delta y$; $\vec{A}\cdot d\vec{L}_z = \left(A_p + \frac{\partial A_2}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)(+\Delta y)$

lado HE $\Rightarrow$ $d\vec{L} = +\vec{i}\,\Delta x$; $\vec{A}\cdot d\vec{L}_z = \left(A_p - \frac{\partial A_1}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)(+\Delta x)$.

Somando-se os resultados acima encontra-se

$$\vec{A}\cdot d\vec{L}_z = \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\Delta x\,\Delta y = (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{k}\,\underbrace{\Delta x\,\Delta y}_{\Delta S}$$

Por integração similar em torno de retângulos em planos xz e zy chega-se a:

$$\vec{A}\cdot d\vec{L}_x = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\Delta y\,\Delta z = (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{i}\,\Delta y\,\Delta z$$

e

$$\vec{A}\cdot d\vec{L}_y = \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\Delta x\,\Delta z = (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{j}\,\Delta x\,\Delta z$$

Para um contorno no espaço x, y, z, $d\vec{L} = d\vec{L}_x + d\vec{L}_y + d$[illegible] então

$$\vec{A}\cdot d\vec{L} = (\nabla\times\vec{A})\cdot\Delta\vec{S}$$

onde $\Delta\vec{S}$ é o vetor normal a superfície. Integrando-se a equação acima obtém-se

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{L} = \iint (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}$$

Outras transformações de integrais de superfície para integrais de linha, decorrentes do teorema de Stokes são:

$$\oint_C \phi\, d\vec{r} = \oiint_S d\vec{S} \times \nabla\phi$$

$$\oint d\vec{r} \times \vec{A} = \oiint_S (d\vec{S} \times \vec{\nabla}) \times \vec{A}$$

em notação indicial :

$$\oiint_S -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \cdot n_i \, dS = \oint_C a_i \, dr_i$$

1.6 O Teorema de Gauss

O teorema de Gauss é dado por:

$$\oint\!\!\oint\!\!\oint_{\forall} (\nabla \cdot \vec{v})\, d\forall = \oiint_S (\vec{n} \cdot \vec{v})\, dS$$

onde $\vec{n}$ é o vetor unitário normal a superfície S que limita o volume $\forall$. Sua direção sempre aponta para fora de S.

A integral de volume da divergência do vetor $\vec{v}$ é igual à integral de superfície do vetor $\vec{v}$ sobre a superfície fechada que envolve o volume. A integral de superfície $\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})\, dS$ é definida como o fluxo de $\vec{A}$ que passa através da superfície S. Então a integral $\oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})\, dS$ é o fluxo resultante total que atravessa a superfície fechada S. Logo, o Teorema de Gauss mostra que a divergência de $\vec{A}$ num ponto P é o limite do fluxo resultante total que sai, por unidade de volume, quando S tende ao ponto P.

O teorema de Gauss é demonstrado a partir do fato que a divergência de um vetor $\vec{v}$, div $\vec{v}$ ou $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$, pode ser definida por

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \lim_{\Delta V \to 0} \oint\!\!\oint_S (\vec{n}\cdot\vec{v})\, dS$$

Outras transformações de integrais de volume em integrais de superfície, decorrentes do Teorema de Gauss, são:

$$\iiint_V \nabla\phi \, dV = \oint\!\!\oint_S \vec{n}\cdot\phi \, dS$$

$$\iiint_V \nabla\times\vec{v}\, dV = \oint\!\!\oint_S \vec{n}\times\vec{v}\, dS$$

$$\iiint_V [\nabla\cdot\tau]\, dV = \oint\!\!\oint_S [\vec{n}\cdot\tau]\, dS$$

em notação indicial:

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha v_i)\, dV = \oint\!\!\oint_S n_i\, \alpha v_i \, dS$$

Note que em todas relações de transformação de integral de volume e integral de superfície para integral de volume o vetor normal $\vec{n}$ é substituído pelo operador nabla ∇.

(1.7) Regra de Leibnitz

Frequentemente é necessário lidar com uma função $\varphi(t)$ definida pela integral do tipo

$$\varphi(t) = \int_{A(t)}^{B(t)} f(x,t)\,dx \quad .$$

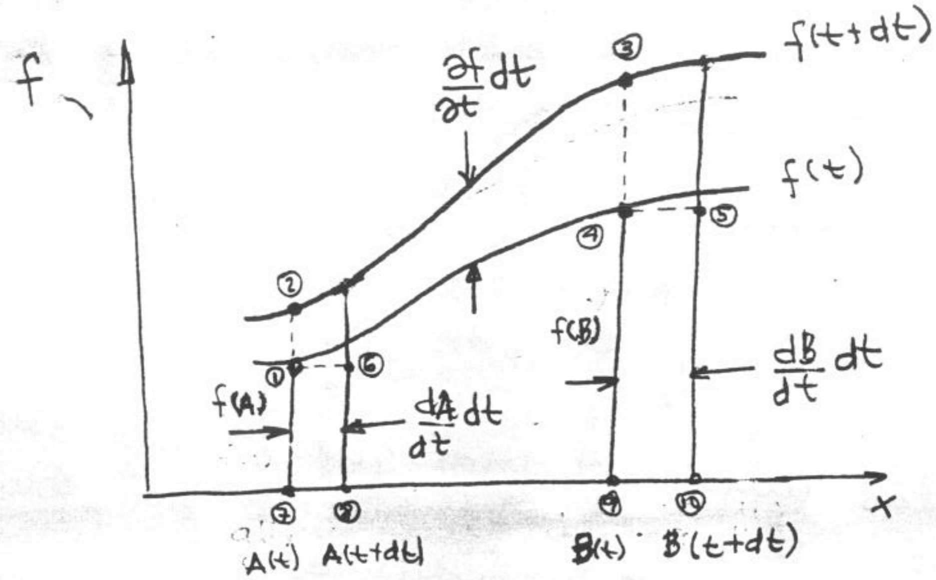
Em particular uma expressão para a derivada $\varphi'(t)$ é requerida. Se os limites A e B são constantes e finitos, a expressão se reduz a:

$$\varphi'(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\int_A^B f(x,t)\,dx = \int_A^B \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx$$

No entanto se os limites não são constantes, pode-se pensar que φ seja diretamente dependente de t e indiretamente dos valores intermediários de A e B. A diferenciação de $\varphi(t)$ pode então ser expressa pela regra de Leibnitz:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{A(t)}^{B(t)} f(x,t)\,dx = \int_A^B \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx + f(B,t)\frac{dB}{dt} - f(A,t)\frac{dA}{dt}$$

Note que a taxa de variação da integral é igual a soma de três termos. O primeiro termo é a contribuição devido ao aumento de $\partial f/\partial t$ entre os limites A e B. O segundo e terceiro termos aparecem porque os limites de integração estão se movendo. Isto decorre do fato que f em $x = A$ e $x = B$ é trazido à integral com uma velocidade dA/dt e dB/dt respectivamente. A Figura seguinte descreve os termos desta equação



Teorema de Leibnitz em uma dimensão

$$\int_A^B \left(\frac{\partial f}{\partial t} dt\right) dx \simeq \text{ÁREA } [1,2,3,4]$$

$$f(A) \cdot \left(\frac{dA}{dt} dt\right) \simeq \text{ÁREA } [1,6,7,8]$$

$$f(B) \cdot \left(\frac{dB}{dt} dt\right) \simeq \text{ÁREA } [4,5,9,10]$$

então

$$\frac{d}{dt} \int_A^B f(x,t)\, dx \simeq \frac{1}{\Delta t} \Big[\text{ÁREA } (1,2,3,4) + \text{ÁREA } (4,5,9,10) - \text{ÁREA } (1,6,7,8)$$

Extenção do Teorema de Leibnitz para uma Integral tripla.

Considere V um volume fechado de superfície S movendo-se no espaço; considere que a velocidade de qualquer elemento da superfície seja v_s. Então, se $s(x,y,z,t)$ é uma função escalar da posição e do tempo,

$$\frac{d}{dt}\iiint_V f\, dV = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t}\, dV + \iint_S f(\vec{v_s}\cdot\vec{n})\, dS$$

Lembre-se que V e S são funções do tempo, isto é: $V = V(t)$ e $S = S(t)$.

Se a superfície estiver se movendo junto com o fluido, $\vec{v_s} \equiv \vec{v}$ então

$$\frac{d}{dt}\iiint_V f\, dV = \iiint_V \frac{Df}{Dt}\, dV + \iiint_V (f\,\nabla\cdot\vec{v})\, dV$$

onde $\frac{Df}{Dt}$ é a derivada substantiva,

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla) f$$

1.8 Transformação de coordenadas

Uma das vantagens da notação vetorial é que ela facilita a transformação entre os vários sistemas de coordenadas. As coordenadas cartesianas foram tratadas nas secções precedentes desta introdução; nesta secção as coordenadas cilíndricas e esféricas serão desenvolvidas.

Um elemento de arco de uma curva é dado pelo produto do vetor unitário tangente a curva vezes o comprimento do arco, em coordenadas cartesianas,

$$d\vec{L} = \vec{T}\, dL = \vec{i}\, dL_x + \vec{j}\, dL_y + \vec{k}\, dL_z = \vec{i}\, dx + \vec{j}\, dy + \vec{k}\, dz$$

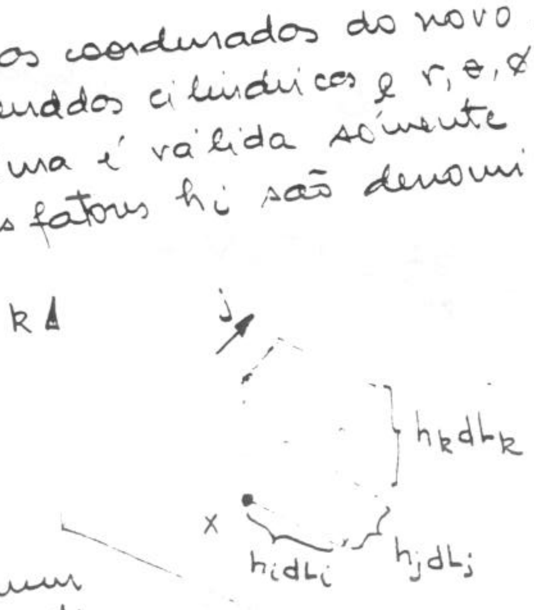
e $|d\vec{L}|^2$ fica sendo

$$(dL)^2 = (dL_x)^2 + (dL_y)^2 + (dL_z)^2 = dL_i\, dL_i$$

Para transformar este elemento de um sistema de coordenadas para outro, a relação fica sendo

$$(dL)^2 = (h_i)^2 (dL_i)^2$$

onde dL_i são as coordenadas do novo sistema (isto é r, θ, ϕ para esféricas e r, θ, z p/ coordenadas cilíndricas). A expressão acima é válida somente para sistemas ortogonais. Os fatores h_i são denominados fatores de escala



Um elemento num sistema genérico de coordenadas ortogonais xemplo 4. O gradiente em um sistema genérico de coordenadas ortogonais

O gradiente de um escalar é o limite da variação da grandeza escalar ao longo das direções do sistema ortogonal

$$(\nabla\phi)_i = \lim_{h_i dL_i \to 0} \left[\frac{\phi(x + h_i dL_i) - \phi(x)}{h_i dL_i} \right] = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial L_i}$$

xemplo 5 O divergente em um sistema genérico de coordenados ortogonais

Utilizando-se da definição de divergente

$$\nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \oiint_S (\vec{A} \cdot \vec{n})\, dS$$

e expressando a integral de superfície para um sistema genérico:

$$\oiint_S (\vec{A} \cdot \vec{n})\, dS = (A_i + dA_i)\left[(h_j + dh_j)dL_j \cdot (h_k + dh_k)dL_k\right]$$

$$- A_i h_j h_k dL_j dL_k$$

desprezando-se os termos de segunda ordem a expressão fica sendo:

$$= (A_i h_j dh_k + A_i h_k dh_j + h_k h_j dA_i)\, dL_k dL_j$$

mas $dh_k = \dfrac{dh_k}{h_i dL_i} h_i dL_i$

$$dh_j = \frac{dh_j}{h_i\,dL_i}\, h_i\,dL_i ,$$

$$e \quad dA_i = \frac{dA_i}{h_i\,dL_i}\, h_i\,dL_i .$$

Substituindo-se as expressões acima na equação anterior:

$$\oiint_S (\vec{A}\cdot\vec{n})\,dS = \frac{\partial(A_i h_j h_k)}{\partial L_i}\cdot dL_i\,dL_j\,dL_k .$$

consequentemente o divergente do vetor $\vec{A}$ fica sendo:

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{h_i h_j h_k}\left[\frac{\partial(A_i h_j h_k)}{\partial L_i}\right]$$

Demonstrações de outras operações vetoriais são análogos porém requerem uma manipulação algébrica maior. Para nossa conveniência essas operações estão na tabela da página a seguir

Cylindrical coordinates:

$$x_1 = R \qquad x_2 = \theta \qquad x_3 = z$$
$$h_1 = 1 \qquad h_2 = R \qquad h_3 = 1$$
$$x = R\cos\theta \qquad y = R\sin\theta \qquad z = z$$

Spherical coordinates:

$$x_1 = r \qquad x_2 = \theta \qquad x_3 = \omega$$
$$h_1 = 1 \qquad h_2 = r \qquad h_3 = r\sin\theta$$
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta\cos\omega \qquad z = r\sin\theta\sin\omega$$

Vector operations:

In the following let ϕ be any scalar and let $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ be any vector.

1 *Gradient:*

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\mathbf{e}_3$$

2 *Divergence:*

$$\nabla\cdot\mathbf{a} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3a_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1h_3a_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1h_2a_3)\right]$$

3 *Curl:*

$$\nabla\times\mathbf{a} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1a_1 & h_2a_2 & h_3a_3 \end{vmatrix}$$

4 *Laplacian:*

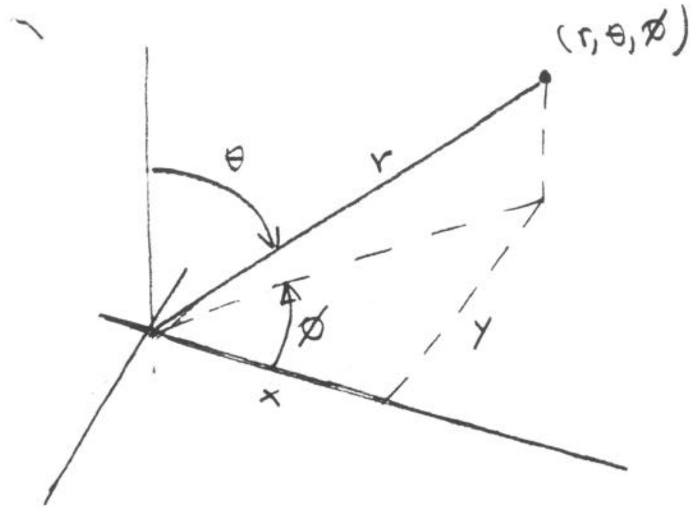
$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2\mathbf{a} = {} & \left[\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla\cdot\mathbf{a}) + \frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\frac{h_2}{h_1h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1a_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(h_3a_3)\right]\right\}\right.\right. \\
& \left.\left. - \frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{h_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2a_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1a_1)\right]\right\}\right)\right]\mathbf{e}_1 \\
& + \left[\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla\cdot\mathbf{a}) + \frac{1}{h_1h_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{h_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2a_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1a_1)\right]\right\}\right.\right. \\
& \left.\left. - \frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\frac{h_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3a_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(h_2a_2)\right]\right\}\right)\right]\mathbf{e}_2 \\
& + \left[\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial x_3}(\nabla\cdot\mathbf{a}) + \frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{h_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3a_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(h_2a_2)\right]\right\}\right.\right. \\
& \left.\left. - \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{h_2}{h_1h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1a_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(h_3a_3)\right]\right\}\right)\right]\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

5 *Lagrangian derivative:*

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a} = {} & \frac{1}{h_1}\left\{\left(a_1\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial a_2}{\partial x_1} + a_3\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) - \frac{a_2}{h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2a_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1a_1)\right]\right. \\
& \left. + \frac{a_3}{h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1a_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(h_3a_3)\right]\right\}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\left\{\left(a_1\frac{\partial a_1}{\partial x_2} + a_2\frac{\partial a_2}{\partial x_2} + a_3\frac{\partial a_3}{\partial x_2}\right)\right. \\
& \left. - \frac{a_3}{h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3a_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(h_2a_2)\right] + \frac{a_1}{h_1}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2a_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1a_1)\right]\right\}\mathbf{e}_2 \\
& + \frac{1}{h_3}\left\{\left(a_1\frac{\partial a_1}{\partial x_3} + a_2\frac{\partial a_2}{\partial x_3} + a_3\frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right) - \frac{a_1}{h_1}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1a_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(h_3a_3)\right]\right. \\
& \left. + \frac{a_2}{h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3a_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(h_2a_2)\right]\right\}\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

Coordenadas esféricas



$$\begin{cases} x = r\,\text{sen}\,\theta\,\cos\varnothing \\ Y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varnothing \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

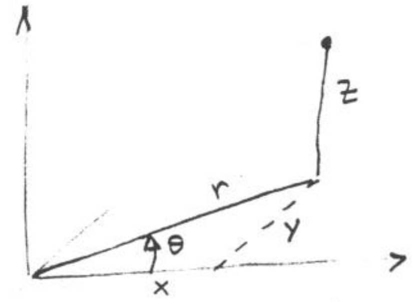
$$(dL)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\text{sen}^2\theta\,(d\varnothing)^2$$

os fatores de escala ficam sendo

$$h_r = 1 \;;\quad h_\theta = r \quad e \quad h_\varnothing = r\,\text{sen}\,\theta$$

Para se obter as transformações resta ainda definir os fatores de escala para os diferentes sistemas de coordenadas.

Coordenadas cilíndricas



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = \cos\theta\, dr - r\,\text{sen}\,\theta\, d\theta \\ dy = \text{sen}\,\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta \\ dz = dz \end{cases}$$

$$(dx)^2 = \cos^2\theta\,(dr)^2 - 2r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,(dr\,d\theta) + r^2\text{sen}^2\theta\,(d\theta)^2$$

$$(dy)^2 = \text{sen}^2\theta\,(dr)^2 + 2r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,(dr\,d\theta) + r^2\cos^2\theta\,(d\theta)^2$$

$$(dz)^2 = (dz)^2$$

$$dL^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + (dz)^2$$

Comparando os valores da expressão acima com a definição dada para os fatores de escala, encontra-se:

$$h_r = 1 \; ; \; h_\theta = r \quad e \quad h_z = 1$$

Cinemática

CAPÍTULO III

CINEMÁTICA

3.1. Descrição do Movimento de um Referencial Lagrangiano

> *"Segue a tragetória de partículas com identidade fixa"*

No referencial Lagrangiano cada partícula do escoamento é identificada, a partir de um tempo referencial, através das suas coordenadas naquele instante. As equações paramétricas da trajetória de uma partícula com identidade fixa são dadas pelas equações:

$$x = x\ (a,\ b,\ c,\ t)$$
$$y = y\ (a,\ b,\ c,\ t)$$
$$z = z\ (a,\ b,\ c,\ t)$$

onde para $t = t_o$, $(x,y,z) \equiv (a,b,c)$. O vetor posição $\vec{r}$, veja Fig. 1, é função apenas do tempo. Suas componentes para cada direção são dadas pelas equações paramétricas que representam a posição ao longo de cada eixo, conforme mostra equação abaixo,

$$\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

onde $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são versores unitários nas direções x, y e z respectivamente.

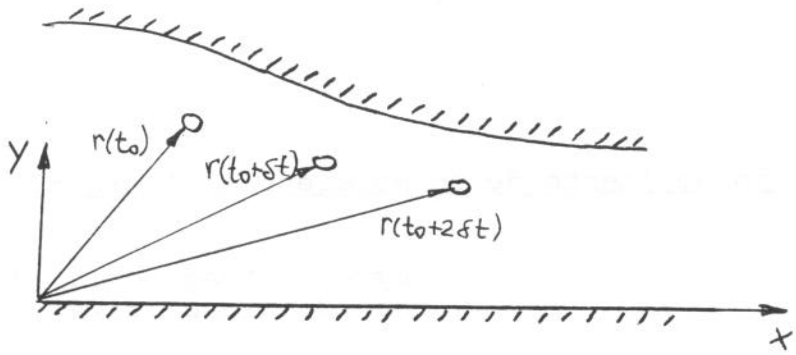


Fig. 1 -Tragetória de uma partícula com identidade fixa.

A velocidade e aceleração são determinados a partir da primeira e segunda derivada temporal do vetor deslocamento $\vec{r}$. Elas são dadas pelo conjunto de equações paramétricas, onde u, v e w são velocidades e a_x, a_y e a_z são as acelerações nas direções x, y e z respectivamente,

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} \quad , \quad a_x = \frac{\partial u}{\partial t} \equiv \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} \quad , \quad a_y = \frac{\partial v}{\partial t} \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$w = \frac{\partial z}{\partial t} \quad , \quad a_z = \frac{\partial w}{\partial t} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

A descrição do escoamento através da identificação da trajetória de cada partícula individual é denominada por descrição de Lagrangiana do escoamento. As coordenadas que descrevem as posições das partículas são conhecidas como coordenadas de Lagrange.

Como exemplo de medidas realizadas em referenciais Lagrangeanos pode-se citar as medidas realizadas através de balões-sonda metereológicos. Usualmente obtêm-se, através dos instrumentos carregados pelo balão, dados sobre pressão e temperatura atmosférica. Estas medidas são obtidas a partir de um referencial Lagrangiano por considerar-se que o balão se move junto com o fluido. A partir deste exemplo, pode-se concluir que medidas baseadas em referenciais Lagrangeanos requerem que o instrumento de medida mova-se junto com uma particula de identidade fixa do fluido. Como consequência da asserção do parágrafo anterior, este tipo de medida torna-se particularmente difícil para testes em laboratórios onde normalmente as dimensões dos equipamentos são várias ordens de grandeza menores que as dimensões dos fenômenos metereológicos, por exemplo.

3.2. Descrição do movimento de um referencial Euleriano

"Descreve o que ocorre em diferentes posições do campo de escoamento"

Do ponto de vista Euleriano, as propriedades escalares ou vetoriais do escoamento, tais como pressão, temperatura, velocidade, aceleração, etc, passam a ser função do espaço, coordenadas x, y, z, e do tempo. Naturalmente, se o escoamento for de caráter permanente a variável tempo não tem influência nas propriedades.

A maioria dos instrumentos utilizados em laboratórios obtêm dados baseados em referências Eulerianos. Por exemplo, um anemômetro fixo em relação as coordenadas do laboratório indicará a velocidade local do escoamento, esta medida dependerá da localização do anemômetro no escoamento, coordenadas x,y e z, assim como do tempo (para escoamento transientes), veja Fig. 2,

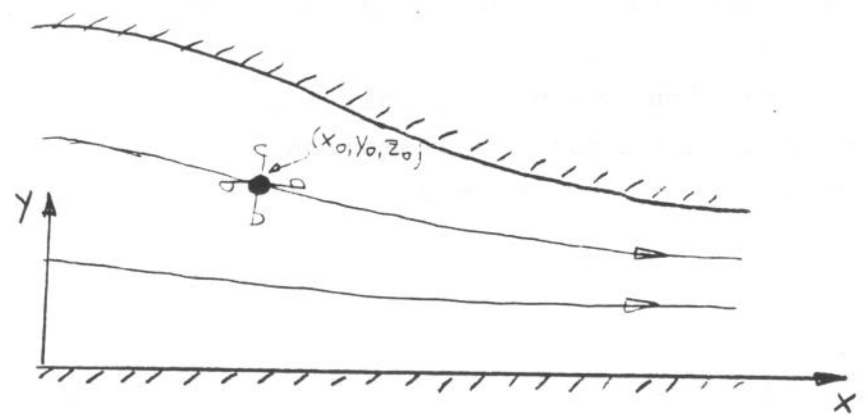


Fig. 2 - Campo local de velocidades de um referencial Euleriano.

A velocidade no ponto (x_o, y_o, z_o) no instante t_o é dada por:

$$u = u\ (x_o,\ y_o,\ z_o,\ t)$$

$$v = v\ (x_o,\ y_o,\ z_o,\ t)$$

$$w = w\ (x_o,\ y_o,\ z_o,\ t)$$

3.3. Relação Entre as Coordenadas de Lagrange e Euler

A velocidade no referencial Euleriano está associada a taxa de deslocamento de uma partícula no referencial Lagrangiano, portanto

$$u = u\ (x,\ y,\ z,\ t) \ = \ dx/dt$$
$$v = v\ (x,\ y,\ z,\ t) \ = \ dy/dt$$
$$w = w\ (x,\ y,\ z,\ t) \ = \ dz/dt$$

As coordenadas de Lagrange podem ser obtidas resolvendo-se o sistema de equações acima dadas as condições iniciais,

$$\left.\begin{array}{l} x = a \\ y = b \\ z = c \end{array}\right\} \text{ para } t = t_o$$

que equivalem a dizer que no instante $t = t_o$ a particula estava na posição (a,b,c).

Para fixar melhor as diferenças entre os conceitos Euleriano e Lagrangiano, considere a analogia com um engenheiro de tráfego e um policial de trânsito. O engenhario de tráfego faz medidas do número de automóveis que passam por um cruzamento (Euler) enquanto que um policial de trânsito segue o carro de um infrator das leis de tráfego (Lagrange).

3.4. Derivada Substantiva ou Derivada Material ou Derivada Total

Considere que B(x,y,z,t) represente uma

grandeza física, escalar ou vetorial, do ponto de vista Euleriano, isto é, B é uma função da posição e do tempo. A variação dB corresponde a uma variação independente e arbritrária em dx, dy, dz, e dt, portanto

$$dB = \frac{\partial B}{\partial t} dt + \frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy + \frac{\partial B}{\partial z} dz$$

Considere agora que se deseja determinar avariação dB seguindo uma particula de identidade fixa. Nestas condições, os incrementos dx, dy, e dz não são arbitrários, mas estão relacionados com a tragetória das partículas e com o tempo da seguinte forma:

$$dx = u\ dt,$$
$$dy = v\ dt,$$
$$dz = w\ dt.$$

Neste caso o incremento dB fica sendo:

$$dB = \frac{\partial B}{\partial t} dt + \frac{\partial B}{\partial x} u\ dt + \frac{\partial B}{\partial y} v\ dt + \frac{\partial B}{\partial z} w\ dt .$$

A derivada substantiva, também citada na literatura como derivada total ou derivada material, é obtida da expressão acima quando se calcula a taxa de variação de B com o tempo,

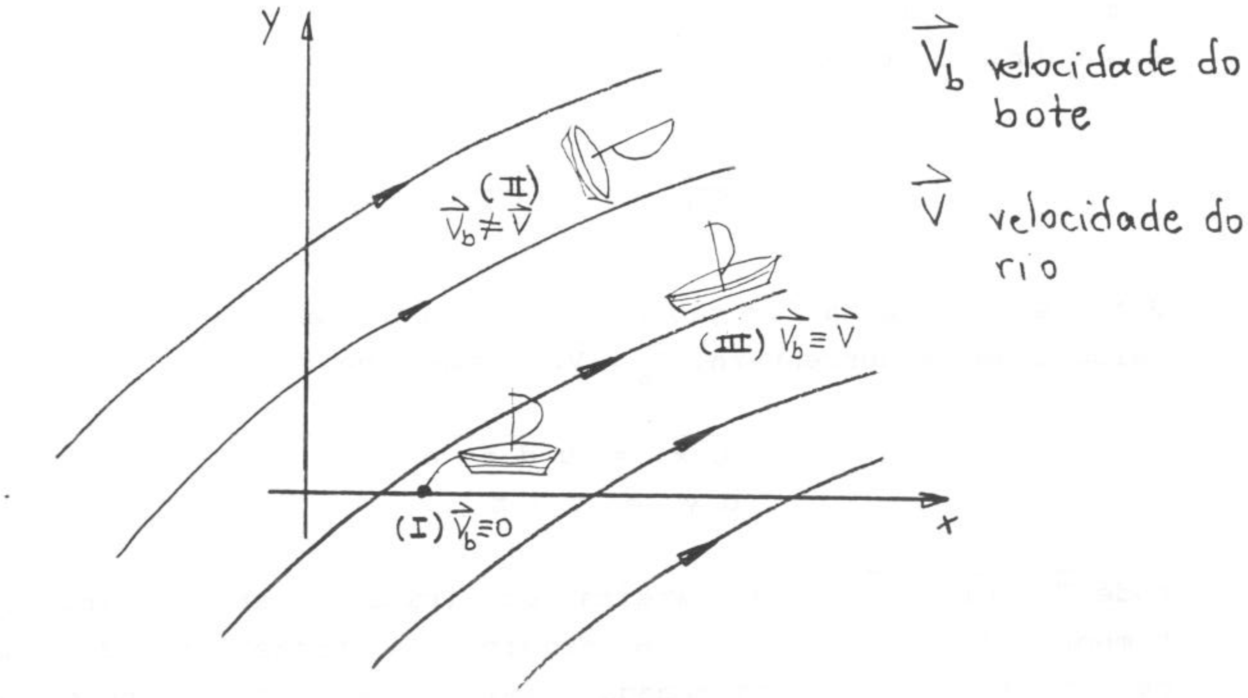
$$\frac{d\ B}{d\ t} \equiv \frac{D\ B}{D\ t} = \frac{\partial B}{\partial t} + u \frac{\partial B}{\partial x} + v \frac{\partial B}{\partial y} + w \frac{\partial B}{\partial t} .$$

que em notação vetorial fica sendo:

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\, B\ .$$

Note que a derivada substantiva expressa a taxa de variação temporal DB/Dt a partir de uma descrição Euleriana mas com conceito Lagrangiano. Isto porque ela representa a taxa de variação de uma partícula com identidade fixa por definição, isto é os incrementos dx, dy e dz não são independentes entre si mas estão relacionados com o tempo.

Para melhor compreender o significado físico desta derivada, suponha que B represente a concentração de um poluente num rio. Através de um instrumento adequado e um bote você irá medir esta concentração. Considere três casos:



(I) Bote estacionário as margens do rio:
$dx = dy = 0 \Rightarrow$ bote estacionário. Você observará apenas a derivada parcial da concentração em relação ao tempo

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t}$$

(II) Bote se desloca com velocidade $\vec{V}_b$
Neste caso os incrementos dx e dy estão relacionados com a velocidade do bote V_b através de:

$$dx = u_b \, dt \text{ , e}$$
$$dy = v_b \, dt \text{ ,}$$

onde $\vec{V}_b = u_b \vec{i} + v_b \vec{j}$. Dessa maneira a variação da concentração observada é:

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + u_b \frac{\partial B}{\partial x} + v_b \frac{\partial B}{\partial y}$$

(III) Bote se desloca na direção e sentido da correnteza com a velocidade da correnteza, $\vec{V}_b \equiv \vec{V}$. Dessa maneira

$$dx = u \, dt \text{ e}$$
$$dy = v \, dt \text{ ,}$$

onde $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$. Dessa maneira você irá observar a variação temporal da concentração B seguindo a tragetória de uma partícula que é carregada pela correnteza (conceito

Lagrangiano), portanto

$$\frac{D\,B}{D\,t} = \frac{\partial\,B}{\partial\,t} + u\,\frac{\partial\,B}{\partial\,x} + v\,\frac{\partial\,B}{\partial\,y}$$

As equações que descrevem o balanço de força no escoamento (equações da conservação do momento) são derivadas a partir da segunda lei de Newton,

Força = Massa x Aceleração

que baseia-se em um conceito Lagrangiano, isto é a força é igual ao produto massa aceleração de uma partícula de identidade fixa. Utilizando-se o conceito da derivada total pode-se determinar a aceleração de uma partícula (conceito Lagrangiano) a partir de dados de velocidade obtidos num referencial Euleriano, assim

$$\vec{a} = \frac{D\,\vec{V}}{D\,t} = \underbrace{\frac{\partial\,\vec{V}}{\partial\,t}}_{\substack{\text{acel.}\\ \text{local}}} + \underbrace{(\vec{V}.\vec{\nabla})\,\vec{V}}_{\substack{\text{aceleração}\\ \text{convectiva}}}$$

A aceleração convectiva, último termo da expressão acima, pode ser reescrito utilizando-se a identidade vetorial

$$(\vec{V}.\vec{\nabla})\,\vec{V} = \vec{\nabla}\,(\frac{V^2}{2}) - \vec{V} \times \vec{\nabla} \times \vec{V}\,.$$

Introduzindo-se a definição de vorticidade

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$$

a aceleração de uma partícula pode ser reescrita da forma:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V} \times \vec{\omega} .$$

Esta forma será útil para o tratamento da equação da quantidade de movimento.

3.5. Padrões de Escoamentos - Linhas de corrente (streamlines) e tragetórias de Partículas (pathlines)

A linha de corrente é definida como sendo uma linha tangente ao vetor velocidade em qualquer instante, portanto

$$\frac{d\ r}{v} = \frac{d\ x}{u} = \frac{d\ y}{v} = \frac{d\ z}{w}$$

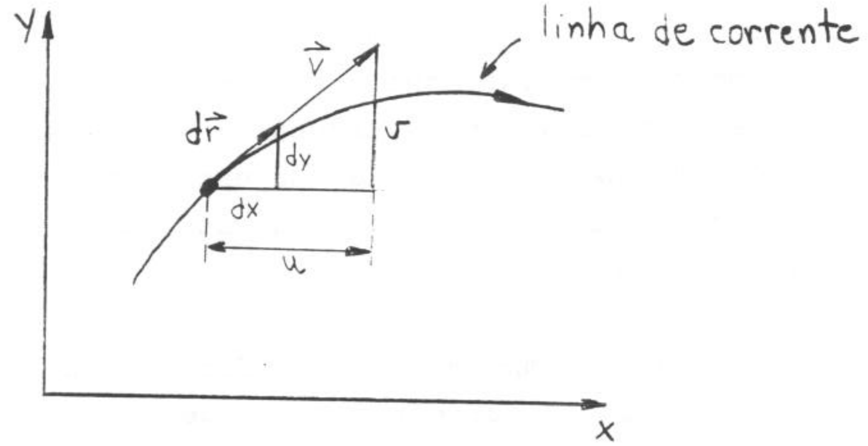


Fig. 4 - Representaçãō de uma linha de corrente, do vetor velocidade, $\vec{v}$, e do vetor deslocamento, $\vec{r}$.

A tragetória da partícula é o caminho percorrido por uma partícula de fluido com identidade fixa (Lagrange). A tragetória das partículas pode ser reconstruída a partir de um campo de velocidades obtido do ponto de vista Euleriano,

$$\frac{d\ x}{d\ t} = u\ (x,\ y,\ z,\ t),$$

$$\frac{d\ y}{d\ z} = v\ (x,\ y,\ z,\ t) \qquad \text{e}$$

$$\frac{d\ z}{d\ t} = w\ (x,\ y,\ z,\ t)$$

Integrando-se as equações acima de um tempo t_o , onde para $t = t_o$ $(x,y,z) = (a,b,c)$, a um tempo t, obtêm-se a trajetória da particula que no instante $t = t_o$ estava na posição $(x,y,z) = (a,b,c)$. Note que a equação que descreve a trajetória não depende do tempo.

Como observação final deve-se destacar que as linhas de corrente são convenientes de se calcular matemáticamente, enquanto que a trajetória das partículas é mais fácil de se determinar experimentalmente (através de injeção de corantes ou adição de partículas no escoamento). Note que a linha de corrente é uma linha instantânea enquanto que a tragetória é gerada ao longo do tempo.

Exemplo 1: Dada o campo de velocidades $u = kx$ e $v = -ky$ calcule as linhas de corrente e a tragetória das partículas. (k é uma constante)

Note que $u(x, y, z, t) = kx$ e $v(x, y, z, t) = - ky$ fornecem informações sobre todo o campo de escoamento (Euler) . Por definição, as linhas de corrente são dadas por

$$\frac{d\,x}{k\,x} = -\frac{d\,y}{k\,y} \Rightarrow x\,y = C$$

As linhas de corrente, tangente ao vetor velocidade em todo campo, são hipérbolas deslocadqs pela constante C. Para a linha de corrente que passa pelo ponto (x_o, y_o) a constante $C = (x_o\, y_o)$.

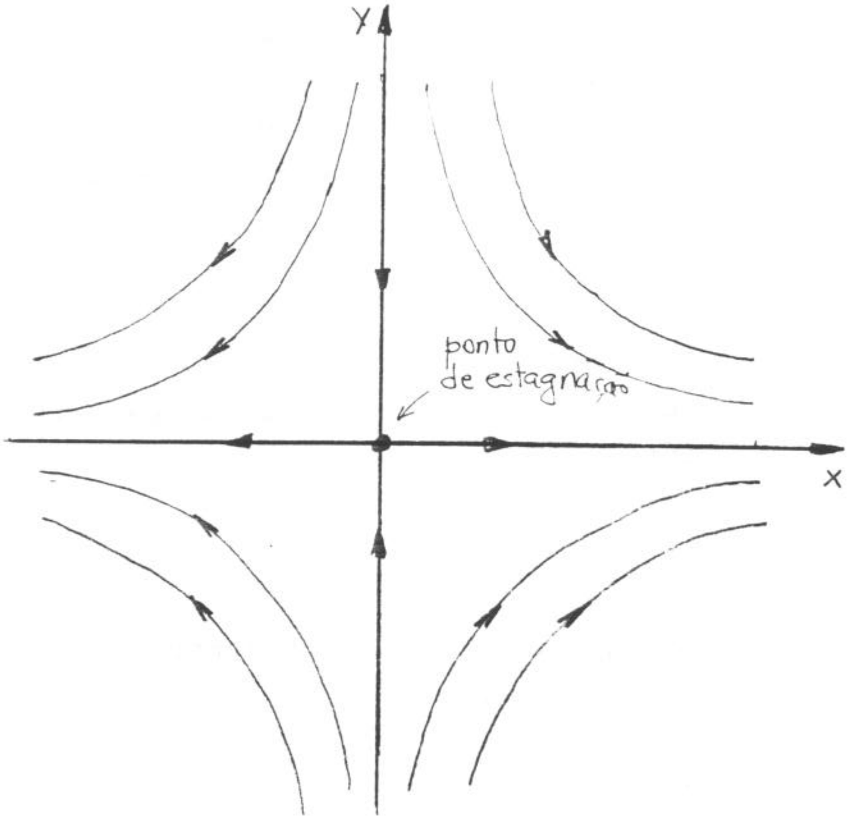


Fig. 5 -

A tragetória de uma partícula é determinada através das relações:

$$\frac{d\,x}{d\,t} = u = k\,x$$

$$\frac{d\,y}{d\,t} = v = -\,k\,y$$

integrando-se encontra:

$$x = C_1 e^{kt} \text{ e } y = C_2 e^{-kt}$$

Estas equações paramétricas representam todas as trajetórias das particulas do escoamento. Em particular, se a trajetória da particula que passou pelo ponto (1,1) no instante t=0 for requerida, as constantes passam a ser $C_1 = C_2 = 1$ e as equações paramétricas se reduzem a:

$$x = e^{kt} \text{ e } y = e^{-kt}$$

Eliminando-se o tempo das equações encontra-se a equação que descreve a trajetória da particula que passou pelo ponto (1,1),

$$xy = 1$$

Note que para regime permanente as linhas de corrente são coincidentes com as trajetórias das particulas. Isto não é necessáriamente válido para regime transitórios ou periódicos.

Exemplo 2: Quanto tempo leva uma particula que no instante t=0 está no ponto $(0,y_o)$ para atingir o eixo x ?
Do exemplo 1, $y = C_2 e^{-kt}$, mas para t=0, $y=y_o$ então $C_2 = y_o$, logo

$$t = - \ln (y/y_o)$$

de onde se conclui que o tempo necessário para uma particula em $(0,y_o)$ atingir o eixo x, isto é, para $y \to 0$, $t \to \infty$.

3.6 Decomposição do Movimento

O movimento <u>relativo</u> de uma partícula pode ser decomposto em:

i) Translação Pura
ii) Rotação de Corpo Rígido
iii) Dilatação Volumétrica
iv) Deformação Angular

Para regime permanente, uma variação infinitesimal de velocidade é dada por

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

usando as definições de rotação de corpo rigido, dilatação volumétrica e deformação angular dadas pelas equações abaixo,

$$\left\{\text{rotação de corpo rígido}\right. \quad \xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \; ; \; \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \; \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\left\{\text{dilatação volumétrica}\right. \quad \dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \; ; \; \dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \; ; \; \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\left\{\text{deformação ângular}\right. \quad \dot{\epsilon}_{yz} = \dot{\epsilon}_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \; ; \; \dot{\epsilon}_{xz} = \dot{\epsilon}_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \; ;$$

$$; \; \dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\epsilon}_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

onde o índice duplo indica o plano onde a deformação ocorre, a variação do campo de velocidades, $d\vec{V}$, pode ser reescrita usando-se as definições acima,

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = \left\{ \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_{zz} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{dilatação} \\ \text{volumétrica}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & 0 & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{deformação} \\ \text{ângular}}}}_{\substack{\text{MATRIZ} \\ \text{SIMETRICA}}} + \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\zeta & \eta \\ \zeta & 0 & -\xi \\ -\eta & \xi & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{rotacão de} \\ \text{corpo rígido}}}}_{\substack{\text{MATRIZ} \\ \text{ANTI-SIMÉTRICA}}} \right\} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

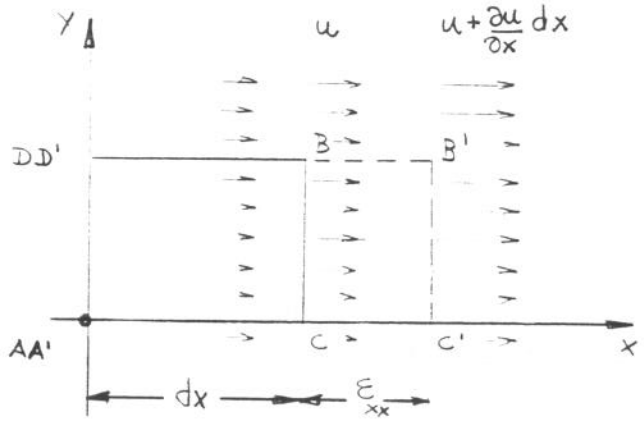
3.7 <u>Interpretação Cinemática da Decomposição do Movimento</u>

Analizando-se o movimento <u>relativo</u> de uma particula com relação a sua vizinhança pode-se mostrar que qualquer movimento pode ser decomposto em: movimento de dilatação, deformação e rotação podem ser

Tomando-se como origem uma particula situada em um ponto A e dx, dy e dz como coordenadas das particulas vizinhas ao ponto A, a velocidade do ponto A relativa a sua vizinhança é dada pelo conjunto de equações descrito na secção 3.6. A interpretação deste campo de velocidade relativa é dada a seguir para cada um dos movimentos isoladamente,

i) Dilatação

O diagrama da figura abaixo representa um elemento de fluido ABCD num campo de velocidades sómente na direção x nos instantes t e t + δt,



O retângulo de vértices ADBC terá sua face BC deslocada após um instante $(t + \delta t)$ de uma distância proporcional a sua velocidade relativa ao ponto A. Chamando-se de ε_{xx} o deslocamento relativo da face BC então,

$$\varepsilon_{xx} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dt$$

consequentemente a taxa de deslocamento na direção x é dada por

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx \right) .$$

Este deslocamento pode ocorrer nas outras duas direções ortogonais e, de maneira análoga a taxa de deslocamento para as direções y e z é dada pelas equações abaixo respectivamente,

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \quad e$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \left(\frac{\partial w}{\partial z} dz \right) .$$

Se o elemento expande-se nas três direções simultâneamente a variação em volume produzida pela variação linear de cada face do elemento no lapso de tempo δt é dada por $\Delta \mathbb{V}$ onde

$$\Delta \mathbb{V} = \mathbb{V}(t + \delta t) - \mathbb{V}(t) \qquad \text{e}$$

$$\mathbb{V}(t) = dx.dy.dz$$

$$\mathbb{V}(t + \delta t) = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx.dt \right) . \left(dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy.dt \right) . \left(dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz.dt \right)$$

A taxa de expansão volmétrica é dada pelo limite,

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\mathbb{V}(t)} \lim_{\delta t \succ 0} \left(\frac{\mathbb{V}(t+\delta t) - \mathbb{V}(t)}{\delta (t)} \right)$$

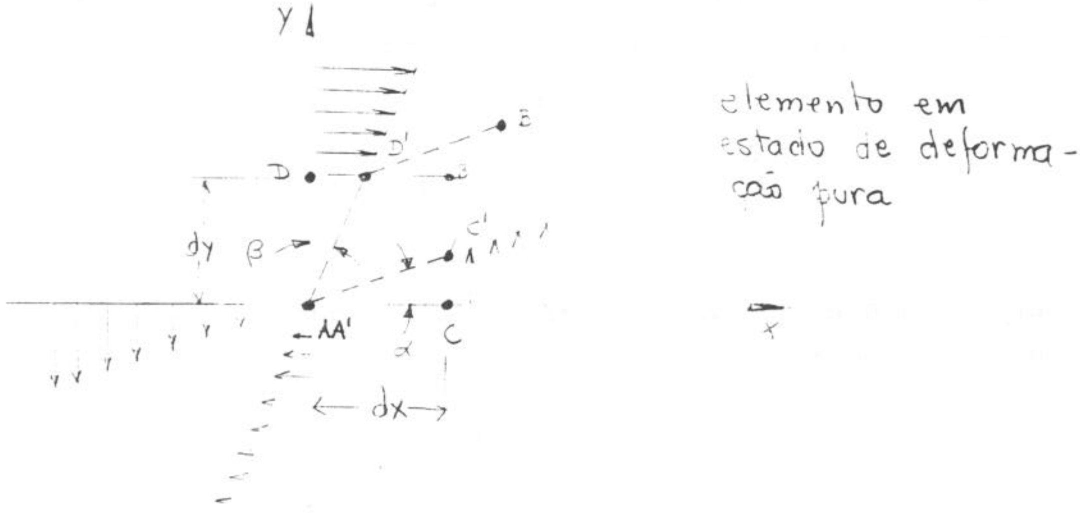
Substituindo-se as expressões para $\mathbb{V}(t+\delta t)$ e $\mathbb{V}(t)$ e tomando-se o limite para $\delta t \succ 0$, a taxa de expansão volumétrica fica sendo,

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \equiv \vec{\nabla}.\vec{V}$$

ou seja, a taxa de expansão volumétrica é igual ao divergente do campo de velocidades, $\vec{\nabla}.\vec{V}$.

ii) Deformação:

O diagrama da Figura abaixo representa o elemento ABCD num campo de velocidade nos instantes t e t + δt.



O elemento retangular se ABCD está sujeito a um estado de deformação pura, isto é, ele se deforma num paralelograma A'B'C'D' após um lapso de tempo δt porém seu volume é preservado, como indica a figura. O ângulo original do vértice A se deforma proporcionalmente aos ângulos α e β.

$$\tan\alpha \simeq \alpha = \frac{\overline{C'C}}{\overline{AC}} = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\, dx\right) dt}{dx}$$

$$\tan\beta \simeq \beta = \frac{\overline{D'D}}{\overline{AD}} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\, dy\right) dt}{dy}$$

A taxa de variação dos ângulos α e β é dada por

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{e} \quad \dot{\beta} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

A taxa de deformação do vértice A é dada pela soma das taxas de variação dos ângulos α e β porém, pela conveniência algébrica que traz a decomposição do campo de velocidades em uma matriz simétrica e outra anti-simétrica, define-se que a taxa de deformação angular ocorrida no plano xy da figura como sendo metade da soma de $\dot{\alpha}$ e $\dot{\beta}$,

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \dot{\varepsilon}_{yx} = \frac{1}{2}\left(\dot{\alpha} + \dot{\beta}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

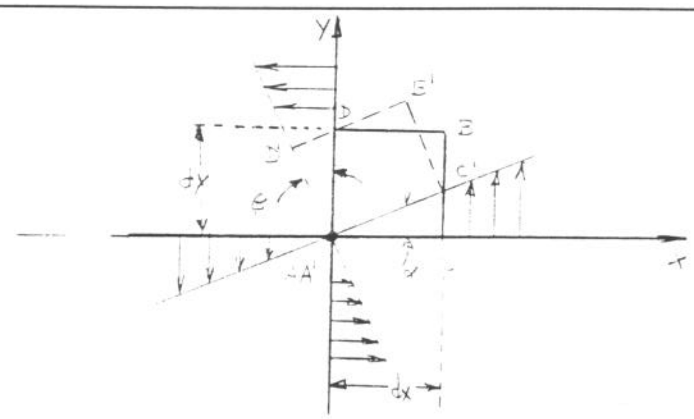
Análogamente, a taxa de deformação angular nos planos yz e xz é definida por:

$$\dot{\varepsilon}_{yz} = \dot{\varepsilon}_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\dot{\varepsilon}_{xz} = \dot{\varepsilon}_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

iii) Rotação

Um elemento de fluido em estado de rotação pura possui o seu volume preservados assim como os ângulos formados entre seus vértices, isto é, eles não se deformam angularmente. A rotação de ABCD é proporcional aos ângulos α e β indicados na figura,



elemento em estado de rotação pura

$$\tan \alpha \simeq \alpha = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\, dx\right) dt}{dx}$$

$$\tan \beta \simeq \beta = \frac{DD'}{AD} = - \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\, dy\right) dt}{dy}$$

Como o elemento possui apenas rotação o ângulo do vértice A preserva-se e portanto $\alpha = \beta$. Neste caso a taxa de rotação do elemento no plano xy é dada por:

$$\zeta = \frac{1}{2} (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Para os planos yz e zx a taxa de rotação é obtida de maneira análoga, seus valores são:

$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$ e $\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ respectivamente.

Note que a taxa de rotação é idêntica à metade do valor do rotacional do campo de velocidades,

$$\frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{V}) = (\xi\,\vec{i}\ ,\ \eta\,\vec{j}\ ,\ \zeta\,\vec{k})$$

3.8 O Tensor de Deformações

Após decompor e interpretar cinemáticamente o movimento relativo de uma partícula e sua vizinhança é útil, para posterior manipulação na equação do movimento, apresentar estes resultados na forma tensorial.

Os resultados da secção 3.6 mostram que pode-se definir o movimento relativo de uma partícula de fluido através de três estados: dilatação volumétrica, deformação ângular e rotação. Esta decomposição, expressa em forma matricial pode ser reescrita em uma notação tensorial de forma mais compacta. Definindo o tensor de deformações $\dot{\epsilon}_{ij}$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad .$$

$\dot{\epsilon}_{ij}$ pode ser decomposto em uma parte simétrica composta pelo estado de dilatação pura e deformação pura (6 componentes independentes) e por outra parte anti-simétrica composta pelo estado de rotação pura (3 componentes independentes), assim:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Para finalizar, o diferencial do campo de velocidades, apresentado na figura matricial na secção 3.6 pode ser

$$T_{ij} \equiv \underbrace{\frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right)}_{\text{SIMÉTRICO}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right)}_{\text{ANTI-SIMÉTRICO}}$$

Taxa Variação de Velocidade

$$du_j = dr_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \rightarrow d\vec{V} = d\vec{r} \cdot \nabla \vec{V}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\nabla \vec{U} + (\nabla \vec{U})^T\right) + \frac{1}{2}\left(\nabla \vec{U} - (\nabla \vec{U})^T\right)$$

simétrico c/
6 elementos $\neq$

anti-simétrico
3 elementos $\neq$

$\downarrow$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Def}(\vec{U}) + \frac{1}{2} \mathrm{Rot}(\vec{U})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$d\vec{r} \cdot Rt(\vec{v}) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & -\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ -\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & -\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

$$-\vec{\omega} \times d\vec{r} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

onde

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}; \quad \omega_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

um tensor anti-simétrico possui somente 3 escalares distintos → sugere que na "essência" ele é um vetor

$$B_{ij} = T_{ij} - T_{ji}$$

$$\vec{c} \cdot B = \vec{b} \times \vec{c}$$

relação entre B e $\vec{b}$ p/ um vetor $\forall \vec{c}$

Para um elemento em estado de rotação pura, $\vec{\Omega}$

$$d\vec{U} = \frac{1}{2} d\vec{r} \cdot Rot(\vec{U}) = \frac{1}{2} \underbrace{(\nabla \times \vec{U})}_{\text{vorticidade } \vec{\omega}} \times d\vec{r} = \vec{\Omega} \times d\vec{r}$$

$$\therefore \ |\vec{\omega}| = 2 |\vec{\Omega}|$$

O módulo da vorticidade = 2 rotação

escrito em notação tensorial como

$$du_i = \dot{\epsilon}_{ij}\, dx_j$$

REFERÊNCIAS:

[1] The National Committee for Fluid Mechanics Films, *"Ilustrated Experiments in Fluid Mechanics"*; MIT Press (1984).

[2] Schichting, Herman; *"Boundary Layer Theory"* Mc Graw Hill (1968).

[3] Panton, Ronald; *"Incompressible Flow"*, John Wiley (1984).

[4] White, Frank M.; *"Fluid Mechanics"*, Mc Graw Hill(1986).

Formulação Integral

CAPÍTULO IV

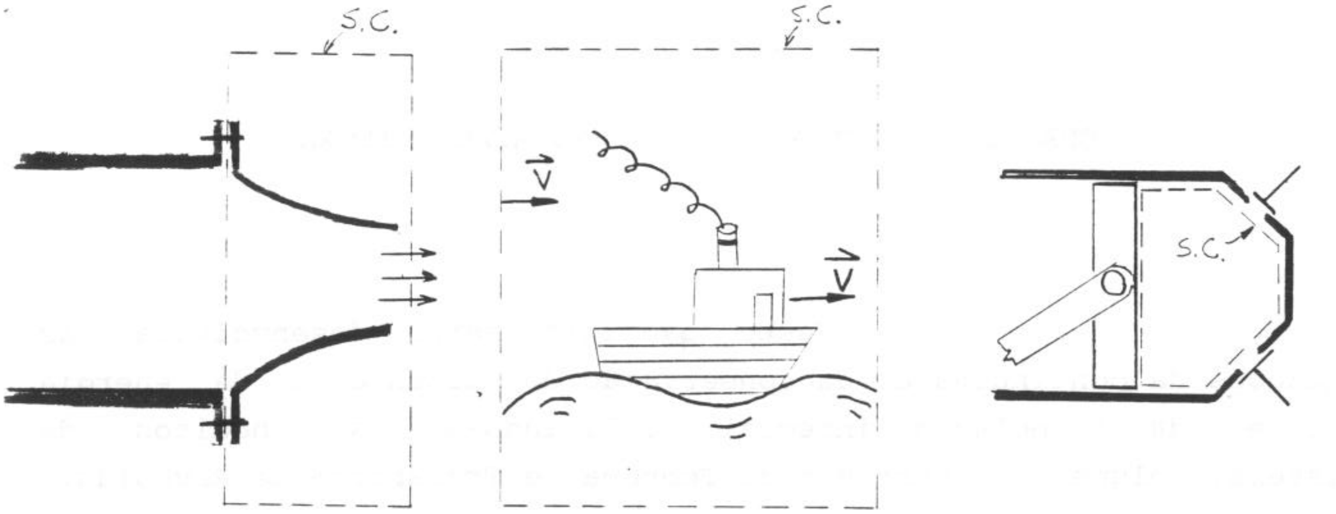
EQUAÇÕES DO MOVIMENTO - FORMULAÇAO INTEGRAL

Neste capítulo serão desenvolvidas as equações da continuidade, da conservação do momento e da energia através da formulação integral utilizando-se os conceitos de Sistema, Volume de Controle e do Teorema de Transporte de Reynolds.

4.1. Teorema_de_Transporte_de_Reynolds

Sistema: Todas as leis da mecânica são escritas para sistemas (volume material), que são definidos como uma quantidade de massa arbitrária porém de idêntidade fixa. As propriedades do sistema podem variar (como exemplo: pressão, temperatura, velocidade etc), assim como sua fronteira (superficie material) com o meio envolvente pode deformar entretanto sua massa é <u>fixa</u> durante qualquer transformação.

Volume de Controle: Uma certa região do espaço, estacionário ou não, deformável ou não, onde as propriedades do fluido podem variar, assim como a massa. Isto é, o volume de controle admite fluxo de massa através de sua fronteira (superficie de controle), contrariamente ao que ocorre para sistemas.



V.C. Estacionário

V.C. fixo no local, aplicado p/ análise de esforços no local

V.C. Móvel

V.C. movendo-se a velocidade do navio Análise das forças de arrasto.

V.C. deformável

dentro do cilindro Análise da variação de Pressão.

Fig. 1 - Tipos de Volume de Controle (V.C) estacionário, móvel (velocidade constante ou não) e deformável. A fronteira do V.C. é denominada Superfície de Controle (S.C.)

Para que se converta a análise de sistema para uma análise de volume de controle, deve-se estender a formulação matemática para uma região específica do espaço (o V.C), ao invés do conjunto de massas individuais. O teorema de Transporte de Reynolds faz esta conversão.

Considere B uma propriedade extensiva do sistema (tal como massa, M, ou quantidade de movimento, $M\vec{V}$, ou energia interna, U, ou entalpia H, etc). O teorema de transporte de Reynolds (TTR) relaciona a variação da propriedade B do sistema com a variação de B tomado num volume de controle, seu enunciado diz que: a taxa de variação da propriedade B do sistema é igual à variação de B dentro do volume de controle mais o fluxo líquido de B que cruza a superfície de controle.

Para demonstrar o Teorema, considere um volume de controle (V.C.) num instante $t = t_o$, coincidente com o sistema, situação descrita na Figura 2 abaixo. No instante $t = t_o + \delta t$ o sistema e o volume de controle assumem uma diferente posição no espaço (representação de um caso genérico onde o volume de controle é móvel com fronteiras deformáveis).

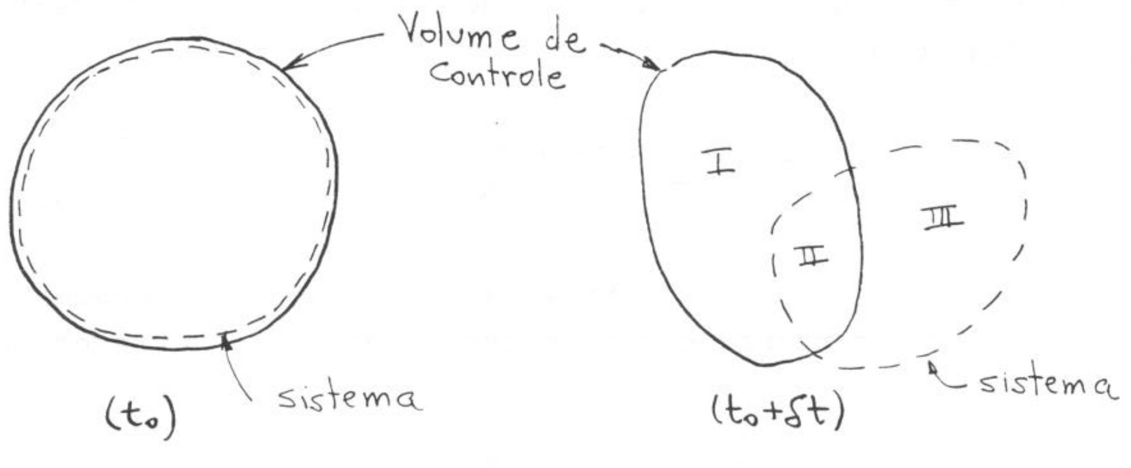


Fig. 2 Movimento relativo entre o sistema e o V.C. móvel com fronteira deformável.

Os algarismos romanos I, II e III indicam os volumes de três regiões: própria do V.C. (I); do sistema (III) e conpartilhado pelo sistema e o V.C. (II). A taxa de variação, com o tempo, de B no sistema é

$$\frac{DB}{Dt}_{sist} = \lim_{\delta t \to o} \left(\frac{B_{III}(t_o + \delta t) + B_{II}(t_o+\delta t) - B(t_o)}{\delta t} \right)$$

Somando-se e subtraindo-se $B_I(t_o + \delta t)$ da expressão acima tem-se

$$\left.\frac{DB}{Dt}\right|_{sis} = \lim_{\delta t \to o} \left[\frac{B_I(t_o+\delta t) + B_{II}(t_o+\delta t) - B\,(t_o)}{\delta t} + \frac{B_{III}(t_o+\delta t)}{\delta t} - \right.$$

$$\left. - \frac{B_I(t_o+\delta t)}{\delta t} \right]$$

O primeiro termo do lado direito da equação está relacionado com a variação temporal de B dentro do Volume de Controle,

$$\lim_{\delta t \to o} \left[\frac{B_I\ (t_o+\delta t) + B_{II}(t_o+\delta t) - B(t_o)}{\delta t} \right] = \frac{d}{dt}\,(B)$$

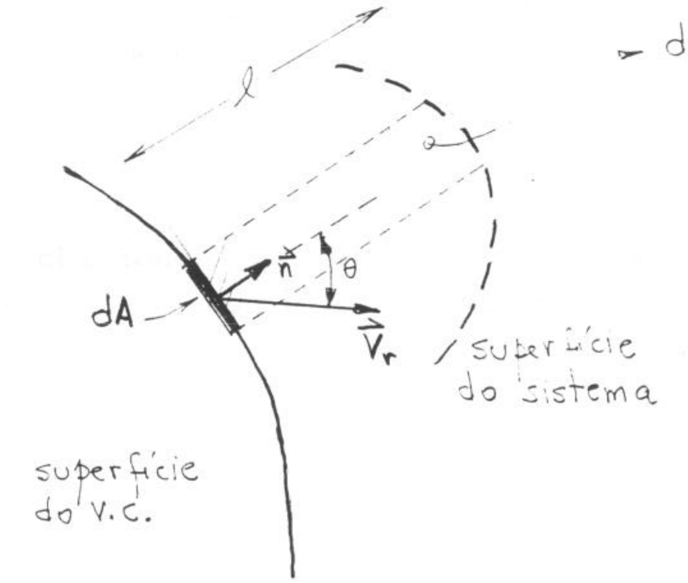
A propriedade B não é necessáriamente uniforme no V.C., portanto é conveniente expressar B através de:

$$B = \iiint_{v.c.} \beta\ \rho\ dV$$

onde β tem dimensões de [unidades de B/massa] . Dessa maneira o limite fica sendo:

$$\lim_{\delta t \to o} \left[\frac{B_I(t_o+\delta t) + B_{II}(t_o+\delta t) - B(t_o)}{\delta t} \right] = \frac{d}{dt} \iiint_{v.c.} \beta\ \rho\ \ dV$$

O segundo e terceiro termos estão relacionados com o fluxo da propriedade B que cruza a S.C., isto é fluxo de B que sai e/ou que entra no V.C. Note que $B_{III}(t_o+\delta t)$ é a quantidade de B, transportada pelo sistema, que cruzou o V.C. num lapso de tempo δt. Considere δA um elemento da superfície do volume de controle. A propriedade B do sistema cruza o elemento de área δA com uma velocidade relativa $\vec{V}_r$, como indicado na Fig. 3,



$d\forall = \ell\, dA = (V_r\, \delta t \cos\theta)\, dA$

Fig. 3 -Fluxo através da superfície dA durante um lapso de tempo δt.

A velocidade com que o fluido cruza a S.C., $\vec{V}_r$, difere da velocidade do fluido $\vec{V}$, devido a velocidade da fronteira $\vec{V}_b$, então

$$\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_b .$$

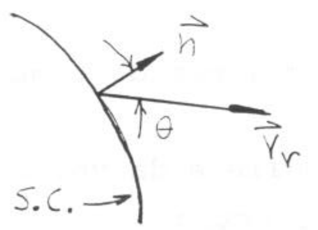
Deve-se ressaltar que tanto a velocidade do fluido $\vec{V}$ como a velocidade da fronteira $\vec{V}_b$ devem ser obtidas de um <u>mesmo</u> referencial de velocidades. Baseado nos argumentos acima,

$$\lim_{\delta t \to o} \frac{B_{II}\,(t_o + \delta t)}{\delta t} = \iint\limits_{\substack{\text{área de}\\ \text{saída}\\ \text{do v.c.}}} \beta\,\rho\,(\vec{V}_r . \vec{n})\,dA = \left[\begin{array}{l}\text{Fluxo de B}\\ \text{que sai do}\\ \text{V.C.}\end{array}\right]$$

análogamente

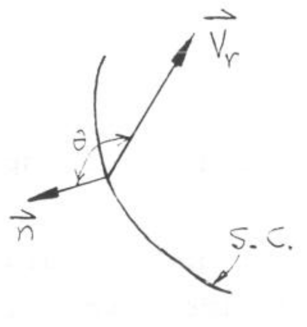
$$\lim_{\delta t \to o} - \frac{B_{I}(t_o + \delta t)}{\delta t} = \iint\limits_{\substack{\text{área de}\\ \text{entrada}\\ \text{do v.c.}}} B\,\delta\,(\vec{V}_r . \vec{n})\,d\,A \qquad \left[\begin{array}{l}\text{Fluxo de B}\\ \text{que entra}\\ \text{no v.c.}\end{array}\right]$$

Note que o sinal negativo em frente de $B_I(t_o+\delta t)$ é absorvido na integral de área pelo produto escalar entre $\vec{V}_r$ e $\vec{n}$ que é o vetor normal a superfície do V.C. apontado para fora.



$\vec{V}_r \cdot \vec{n} > 0$

saída de fluxo



$\vec{V}_r \cdot \vec{n} < 0$

entrada de fluxo

Somando-se os resultados dos limites encontra-se:

$$\lim_{\delta t \to o} \left\{ \frac{B_{III}(t_o+\delta t)}{\delta t} - \frac{B_I(t_o+\delta t)}{\delta t} \right\} = \iint_{S.C.} \beta \, \rho (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) \, dA$$

Com estes resultados pode-se escrever a variação da propriedades B do sistema em termos de quantidades relacionados ao V.C.

$$\underbrace{\left.\frac{DB}{Dt}\right|_{sis}}_{\text{Taxa de variação de B no sistema}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_{V.C.} \beta \, \rho \, dV}_{\text{Taxa de variação de B no V.C.}} + \underbrace{\iint_{S.C.} \beta \, \rho \, (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) \, dA}_{\text{Fluxo líquido de B que cruza A superfície do v.c.}}$$

Esta é a forma geral do Teorema de Transporte de Reynolds. Ela permite algumas simplificações, dependendo da escolha do V.C. que serão vistas a seguir,

i) V.C. não deformável

Se o V.C. não se deforma, isto é a posição relativa entre os pontos de sua fronteira, S.C., não varia com o tempo, a diferenciação com relação ao tempo pode ser efetuada dentro da integral (regra de Leibnitz):

$$\left.\frac{DB}{Dt}\right|_{sist.} = \iiint_{V.C.} \frac{d}{dt} (\rho \, \beta) \, d \, V + \iint_{S.C.} \beta \, \rho \, (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) \, d \, A$$

ii) V.C. deformável

Se a fronteira é deformável, a diferenciação com relação ao tempo da integral de volume pode ser decomposta usando-se a regra de Leibnitz,

$$\left.\frac{DB}{Dt}\right|_{sist} = \iiint_{V.C} \frac{d}{dt}(\rho\beta)\, dV + \underbrace{\iint_{S.C.} \beta\rho(\vec{V}_b \cdot \vec{n})\, dA}_{\substack{\text{termo de fluxo} \\ \text{devido à velo-} \\ \text{cidade da fron-} \\ \text{teira}}} + \underbrace{\iint_{S.C.} \beta\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA}_{\substack{\text{termo de fluxo} \\ \text{devido ao movi-} \\ \text{mento relativo} \\ \text{entre fluido e} \\ \text{fronteira}}}$$

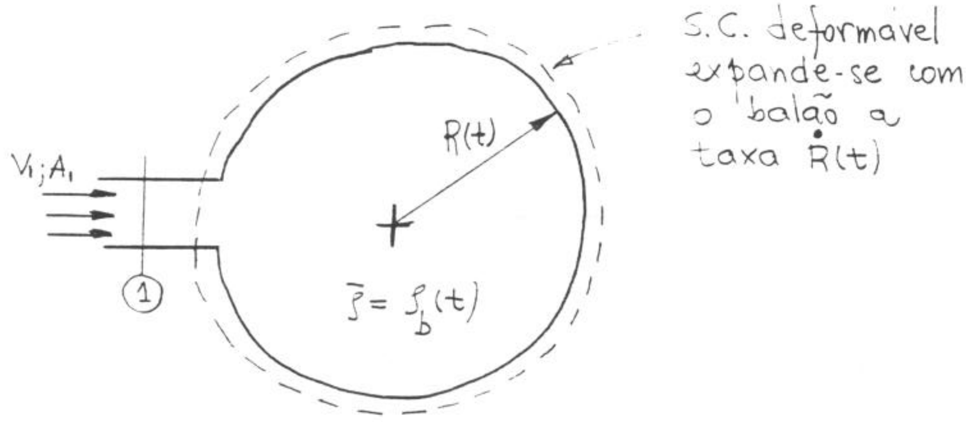
4.2. A Equação da Conservação da Massa

Se a propriedade extensiva genérica B passa a ser massa, M, então β=1. Como a massa de um sistema é conserva por definição então,

$$\left.\frac{DM}{Dt}\right|_{sist} \equiv 0 \equiv \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V.C.} \rho\, dV}_{\substack{\text{taxa de variação} \\ \text{de massa dentro} \\ \text{do V.C.}}} + \underbrace{\iint_{S.C.} \rho\, (\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA}_{\substack{\text{fluxo de massa que} \\ \text{cruza a S.C.}}}$$

Exemplo 1 Um balão está sendo enchido através da secção 1 de área A_1 com ar à velocidade V_1 e densidade ρ_1. Considere a densidade média do ar no interior do balão $\rho_b(t)$.

Determine uma expressão para a taxa de variação de ρ_b e R com o fluxo de ar de entrada.



$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} \rho \, d V}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\iint_{S.C.} \rho \, (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) \, d A}_{\mathrm{II}} = 0$$

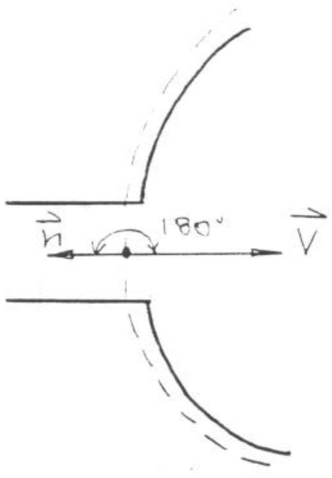
O termo (I) é a taxa de varição de massa dentro do balão. Uma densidade média ρ_b é assumida, então a integral tripla de volume fica sendo

$$\iiint_{v.c.} \rho \, d V = \rho_b \frac{4}{3} \Pi R^3(t)$$

e portanto

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} \rho \, d V = \frac{4}{3} \Pi \frac{d}{dt} (\rho_b \dot{R}^3)$$

O termo (II)é o fluxo de massa que cruza a S.C. Note que o V.C.é deformável, mas na secção 1, por onde o ar entra, não se deforma portanto, $\vec{V}_b = 0$ e $\vec{V}_r \equiv \vec{V}$



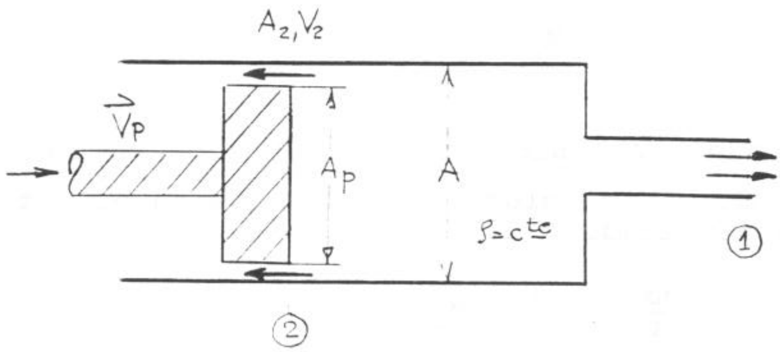
$$\iint_{v.c.} \rho\ (\vec{V} \cdot \vec{n})\ d\,A \ = \ - \rho_1\ V_1\ A_1$$

somando-se os termos (I) e (II)

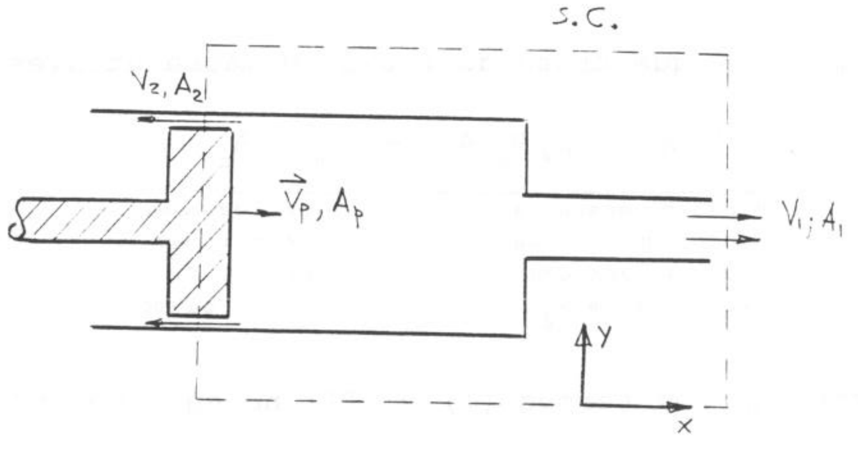
$$\frac{d}{dt}\ (\rho_b\ \dot{R}^3) \ = \ \frac{3}{4\ \Pi}\ \rho_1\ V_1\ A_1$$

Esta é uma equação diferencial de primeira ordem que constitui parte da análise do enchimento de balões. Ela não pode ser resolvida sem os valores de ρ_b e ρ_1 que são obtidos de relações termodinâmicas. A pressão e temperatura assim como a tensão elástica do balão também devem ser envolvidas na análise.

Exemplo 2 Considere uma ampola de injeção onde ocorre um vazamento de fluido no êmbolo. Faça uma análise usando um V.C. não deformável e outra usando V.C. deformável, compare seus resultados.



i) Análise com um V.C. não deformável:



$$\underbrace{\iiint_{v.c.} \frac{\partial}{\partial t} \rho \, d V}_{\substack{\text{variação da} \\ \text{massa no v.c.} \\ \text{(I)}}} + \underbrace{\iint_{s.c.} \rho \, (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) \, d A}_{\substack{\text{fluxo de massa que} \\ \text{cruza a s.c.} \\ \text{(II)}}} = 0$$

O termo (I) trata da variação da massa dentro do V.C.. Notando-se que o V.C. contém tanto fluido como parte da massa do embolo, a densidade do V.C. fica sendo

$$\rho = \frac{M_f + M_p}{V}$$

onde M_f = massa de fluido no V.C.; M_p = massa do êmbolo dentro do V.C. e V = volume do V.C. constante. A taxa de variação da densidade ρ é:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{V} (\dot{M}_f + \dot{M}_p)$$

então

$$\iiint_{v.c.} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\,V = \dot{M}_f + \dot{M}_p$$

O termo (II) que trata do fluxo de massa através da S.C.,

$$\iint_{v.c.} \rho \, (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dA = \underbrace{\rho_f V_1 A_1 + \rho_f V_2 A_2}_{\substack{\text{fluxo de massa de} \\ \text{fluido que sai do} \\ \text{v.c. através das} \\ \text{secções } A_1 \text{ e } A_2.}} - \underbrace{\rho_p V_p A_p}_{\substack{\text{fluxo de massa} \\ \text{do êmbolo que} \\ \text{entra no v.c.} \\ \text{através da secção 2.}}}$$

Substituindo os termos (I) e (II) na equação integral:

$$\dot{M}_f + \dot{M}_p + (\rho_f V_1 A_1 + \rho_f V_2 A_2) - (\rho_p V_p A_p) = 0$$

Portanto, a variação da massa de fluido dentro do v.c. é igual ao fluxo de fluido através das superfícies A_1 e A_2.

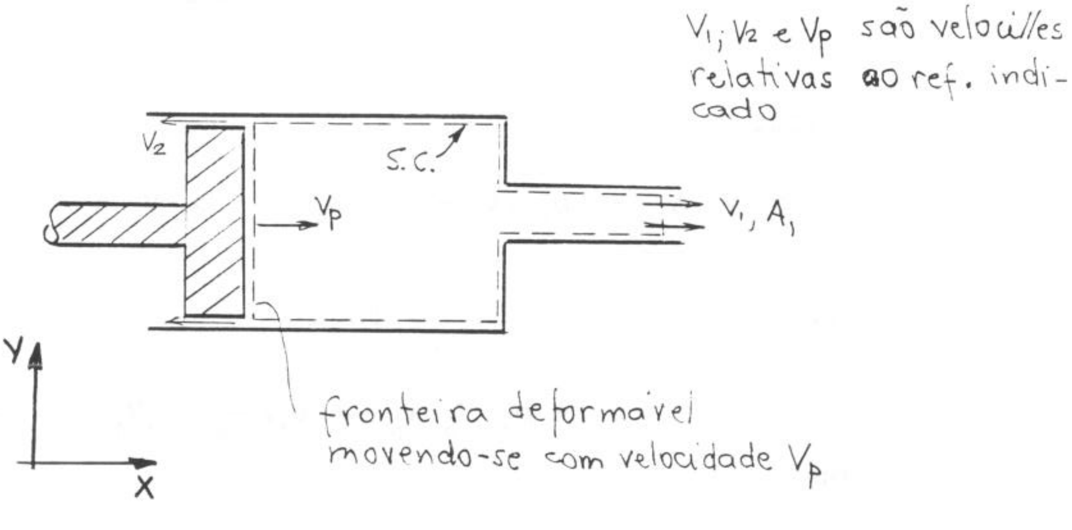
$$\dot{M}_f = - (\rho_f V_1 A_1 + \rho_f V_2 A_2)$$

note o sinal negativo no lado direito da equação indicando que a massa de fluido dentro do V.C. decresce com o tempo. Da parte do êmbolo,

$$\dot{M}_p = + \rho_p V_p A_p$$

indicando que a taxa de aumento da massa do êmbolo dentro do v.c. é igual ao fluxo dessa massa que entre pela S.C. A equação também mostra que $\dot{M}_p > 0$ o que indica que a massa do pistão dentro do v.c. sempre aumenta, conforme era de se esperar.

ii) Análise com um V.C. deformável



É necessário observar que comumente ocorrem situações onde uma fronteira do v.c. é deformável (neste problema, a secção 2) e outra é fixa (neste problema, a secção 1) e sendo necessário tomar precauções ao utilizar as equações corretas para cada fronteira. A equação da conservação da massa fica sendo:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{v.c.} \rho \, d V + \iint_{s.c.} \rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n}) \, d A = 0$$

A variação da massa dentro do V.C.

$$\frac{d}{dt} \iiint \rho_f \, d V = \rho_f \frac{d}{dt} \iiint d V = - \rho_f V_p A$$

O fluxo de massa que cruza a S.C.

$$\iint_{s.c.} \rho_f(\vec{v} \cdot \vec{n}) \, d A = \rho_f \underbrace{(V_2+V_p)}_{\substack{V_r \text{ = vel. relativa} \\ \text{com que o fluido} \\ \text{cruza s.c.}}} A_2 + \rho_f V_1 A_1$$

então

$$- \rho_f V_p A + \rho_f (V_2 + V_p) A_2 + \rho_f V_1 A_1 = 0$$

mas $\quad A = A_p + A_2$, logo

$$- \rho_f V_p A_p + \rho_f V_2 A_2 + \rho_f V_1 A_1 = 0$$

ou

$$\underbrace{\rho_f V_p A_p}_{\substack{\text{taxa de varia-} \\ \text{ção de massa} \\ \text{dentro do v.c.}}} = \underbrace{(\rho_f V_2 A_2 + \rho_f V_1 A_1)}_{\substack{\text{fluxo de massa que} \\ \text{cruza a s.c.}}}$$

Este exemplo indica a importância da escolha e do posicionamento do V.C.. No primeiro caso estudado, as respostas indicam os fluxos de massa do fluido e do êmbolo dentro do V.C. como sendo:

$$\dot{M}_f = -(\rho_f V_1 A_1 + \rho_f V_2 A_2)$$

$$\dot{M}_p = \rho_p V_p A_p$$

No entanto, não relacionam um com o outro. Já para um V.C. deformável, cuja fronteira move-se com o êmbolo encontrou-se que o fluxo de fluido que cruza a S.C. é diretamente proporcional a área do êmbolo e sua velocidade de avanço.

$$\rho_p V_p A_p = (\rho_f V_1 A_1 + \rho_f V_2 A_2)$$

4.3. Conservação do Momento

A segunda lei de Newton aplicada ao movimento de um sistema para um referencial inercial é dada pela equação abaixo:

$$\frac{D}{Dt} (m \vec{V})_{sist} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Ela estabelece que a variação de momento do sistema é igual a somatória das forças externas que atuam neste sistema.

Um termo adicional de aceleração relativa deve ser incorporado para referencias não inerciais. Considere um referencial (x, y, z) não inercial que se desloca e gira com uma taxa de $d\vec{R}/dt$ e $\vec{\Omega}$ respectivamente a um referencial inercial (X, Y, Z,), veja Fig. 4

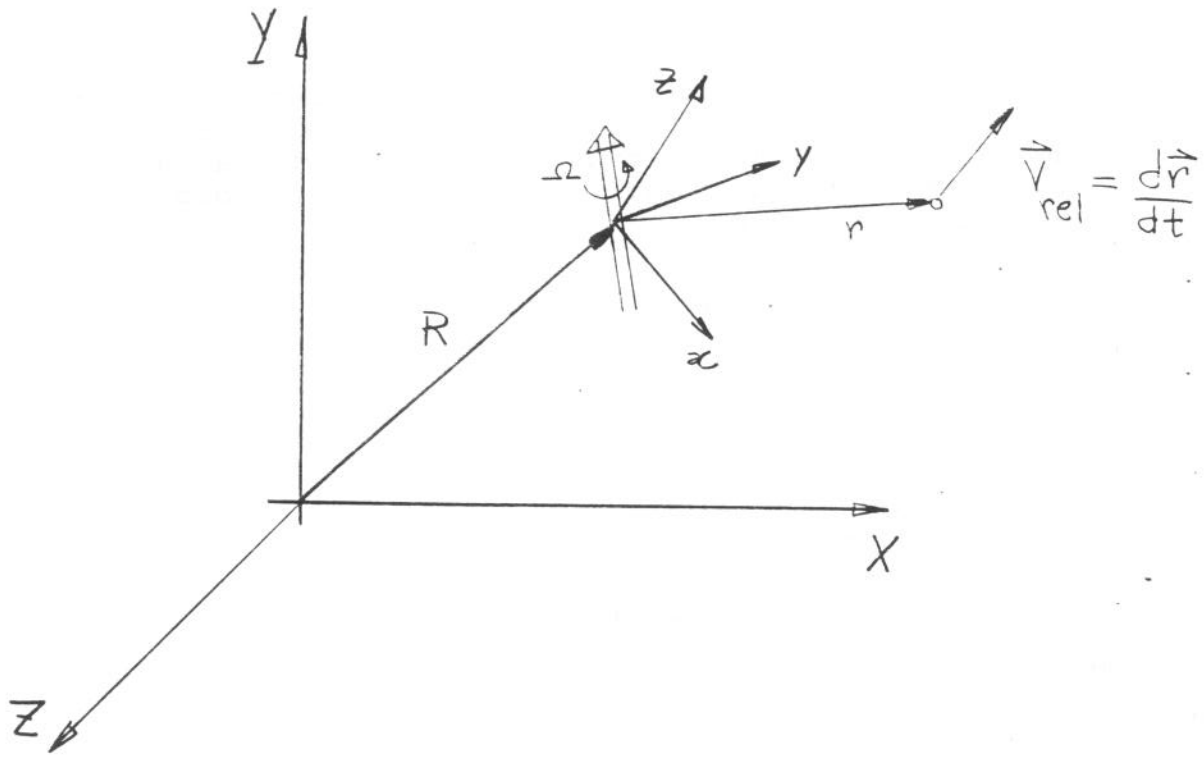


Fig. 4 - Referencial não inercial (x,y,z) deslocando e girando com velocidades $\frac{d\vec{R}}{dt}$ e $\vec{\Omega}$ com relação a um referencial inercial (XYZ).

A aceleração relativa a_{rel} é a aceleração do referencial (x,y,z) em relação ao referencial inercial (X,Y,Z). Ela é dada por:

$$\vec{a}_{rel} = \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\,\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

aceleração inercial do ref. (x,y,z)

aceleração angular do ref. (x,y,z)

aceleração de Coriolis do ref. (x,y,z). Atua num plano sempre normal ao plano da rotação e velocidade

aceleração centrípeta

Onde $\vec{R}$ vetor posição emtre refs. (x,y,z) e (X,Y,Z).
$\vec{r}$ vetor posição entre uma partícula e o ref. (x,y,z).
$\vec{\Omega}$ rotação do ref. (x,y,z).
$\vec{V}$ velocidade da partícula relativa ao ref. (x,y,z).

Portanto, para referencias não inerciais, a segunda lei de Newton escreve:

$$\frac{D}{Dt}(m\vec{V})_{sist} = \sum \vec{F}_{ext} - M_{sist} \cdot \vec{a}_{rel}$$

O procedimento para expressar esta equação do sistema em termos de volume de Controle é através do Teorema de Transporte de Reynolds. Considere B = m $\vec{V}$ e $\beta = \vec{V}$ (equivalente a momento por unidade de massa), então a segunda lei de Newton, para um referencial não inercial, na forma de volume de controle escreve:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V.C.} \rho\, \vec{V}\, dV + \iint_{S.C.} \vec{V} \cdot \rho\, (\vec{V}_r \cdot n)\, dA = \sum \vec{F}_{ext} - \iiint_{V.C.} \rho \vec{a}_{rel} dV$$

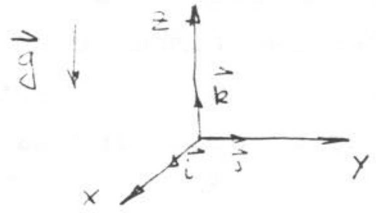
Deve-se destacar que a equação acima exprime a variação de uma grandeza vetorial, o momento, e portanto ela é uma equação vetorial que pode ser decomposta em três escalares, uma para cada direção do sistema de coordenadas adotado. O próximo passo no desenvolvimento da equação do momento é determinar a natureza da somatória das forças externas que atuam no sistema, $\sum \vec{F}_{ext}$. Elas podem ser classificadas em quatro categorias:
forças de campo, forças normais a S.C., forças tangenciais a S.C. e forças mecânicas que cruzam a S.C.

i) <u>As forças de campo</u> ou forças de corpo, $\vec{F}_B$, atuam em todo o sistema simultaneamente. Por exemplo, elas podem ser de origem gravitacional, eletroestática, eletromagnética etc. Elas, sendo de origem conservadoras, podem ser expressas em função do gradiente do seu potencial Φ

$$\sum \vec{F}_B = \nabla \Phi \cdot \text{(massa do sistema)} \equiv \iiint_{sist.} \nabla \Phi\, \rho\, dV \equiv \iiint_{V.C.} \nabla \Phi\, \rho\, dV$$

lembre-se que $V_{sist} \equiv V_{v.c.}$ no tempo $t = t_o$. Em Mecânica dos Fluidos a força de campo que usualmente ocorre é a força gravitacional, $\Phi = -gz$ então para este caso,

$$\vec{F}_B = -g\,\vec{k} \iiint_{V.C.} \rho \, dV \qquad \vec{g} \downarrow$$



ii) <u>As forças normais a S.C.</u>, $\vec{S}_N$, e <u>as forças tangenciais a S.C.</u> $\vec{S}_T$, são forças que atuam <u>sómente na superfície do Volume de Controle</u>. A elas estão associados os efeitos da tensão normal (p) e da tensão de cizalhamento τ atuantes na S.C.. $\vec{S}_N$ e $\vec{S}_T$ são os vetores que representam as forças normais e de cisalhamento que agem num elemento de superfície. As forças normais $\vec{S}_N$ podem ser expressas através de uma componente das forças viscosas e outra da pressão estática do fluido,

$$S_N \equiv \sigma_{ii} = \underbrace{-p}_{\substack{\text{pressão}\\ \text{estatica}}} - \underbrace{\frac{2}{3}\,\mu\,\nabla\cdot\vec{V} + \mu\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i}}_{\substack{\text{força normal de}\\ \text{origem viscosa}}}$$

Para a maioria das aplicações, as forças normais, provindas de termos de pressão estática, é muitas vêzez maior que dos termos viscosos. Exceção se faz a fluidos não Newtonianos, e a escoamentos compressíveis com ondas de choque. Fora estas restrições, é razoável aproximar as forças normais pelo termo de pressão estática,

$$\vec{S}_N \equiv - \iint_{S.C.} p\,\vec{n}\,d\,A$$

onde $\vec{n}$ é o vetor unitário normal à superfície do V.C. apontando para fora do volume.

As forças tangenciais são uma consequência direta da ação da viscosidade do fluido há entretanto fenômenos de interface onde a tensão supercial também passa a ser uma das forças tangenciais dominantes. O enfoque será apenas para forças tangencias provenientes da ação viscosa que serão representadas pelo produto escalar entre o vetor normal $\vec{n}$ e o tensor das tensões τ,

$$\vec{S}_T = \iint_{s.c.} [\vec{n} \cdot \tau] \, d\,A \, .$$

A magnitude destas forças tangencias depende diretamente da primeira derivada do campo de velocidades do fluido o que impossibilita sua avaliação numa análise integral a menos que se tenha uma estimativa de seu valor. Estas estimativas de τ, veja tabela 1, podem ser realizadas para algumas geometrias conhecidas através de fatores de atrito definidos por:

$$f = \frac{8 \; \tau}{\rho \; V^2} \, ,$$

onde ρ e V são respectivamente a densidade e velocidade média do fluido e τ é a tensão que o fluido exerce na parede.

	Laminar	Turbulento
Tubo Circular	$\dfrac{64}{Re_D}$	$\dfrac{0.316}{Re_D^{1/4}}$ (†)
Placa Plana	$\dfrac{2.576}{Re_x^{1/2}}$	$\dfrac{0.236}{Re_x^{1/5}}$ (††)

Tabela 1 - Fatores de Atrito para tubos circulares e placas planas. Reynolds do tubo é definido por por $Re_D = (VD/\nu)$ onde V é a velocidade média do tubo, ν é a viscosidade cinemática do líquido e D o diâmetro do tubo. Reynolds da placa plana é definido por $Re_x = (V_\infty x/\nu)$, onde V_∞ é a velocidade da corrente livre e x a distância do bordo de ataque da placa. (†) relação empírica de Blasius válida para tubos lisos com $Re_D \leq 10^5$. (††) válida para $Re_x \leq 10^7$.

Os fatores de atrito para tubos circulares podem ser extendidos para tubos de geometrias não circulares calculando Re_D empregando a aproximação de diâmetro hidráulico,

$$D_h = \frac{4 \times \text{área}}{\text{perímetro molhado}}$$

Esta aproximação resulta em valores de f com incertezas de ± 15% para regimes turbulentos e ± 40% para regimes laminares. Maiores detalhes sobre os fatores de atrito podem ser encontrados nas referências [3] e [4] .

iii) <u>Forças</u> <u>Mecânicas</u>, F_{MEC}, representam todos os outros tipos de forças, não gerados pelo fluido, que cruzam a S.C.. Usualmente é a força de reação que aparece no material (por exemplo a tubulação) causada pela força que o fluido exerce nele. Note que para que o sistema material e fluido esteja em equilíbrio mecânico é necessário que estas forças se cancelem. Um dos erros mais comuns na aplicação da equação do momento é, na escolha de um V.C. que atravessa tubulações, eixos ou qualquer outro material que não seja o fluido, não levar em conta as forças que existem no material.

Substituindo os termos *i, ii e iii* na equação do momento para um referencial não inercial obtêm-se:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V.C.}\rho\vec{V}dV+\iint_{S.C.}\rho v(\vec{V}_r\cdot\vec{n})dA = \vec{g}\iiint_{V.C.}\rho dV - \iint_{S.C}p\vec{n}dA+\iint_{S.C}\hat{n}\cdot\vec{\tau}dA + \vec{F}_{MEC}-\iiint_{V.C}\rho\vec{a}_{rel}dV$$

[variação de momento dentro do v.c.]

[Fluxo de momento através da S.c.]

[força da gravidade]

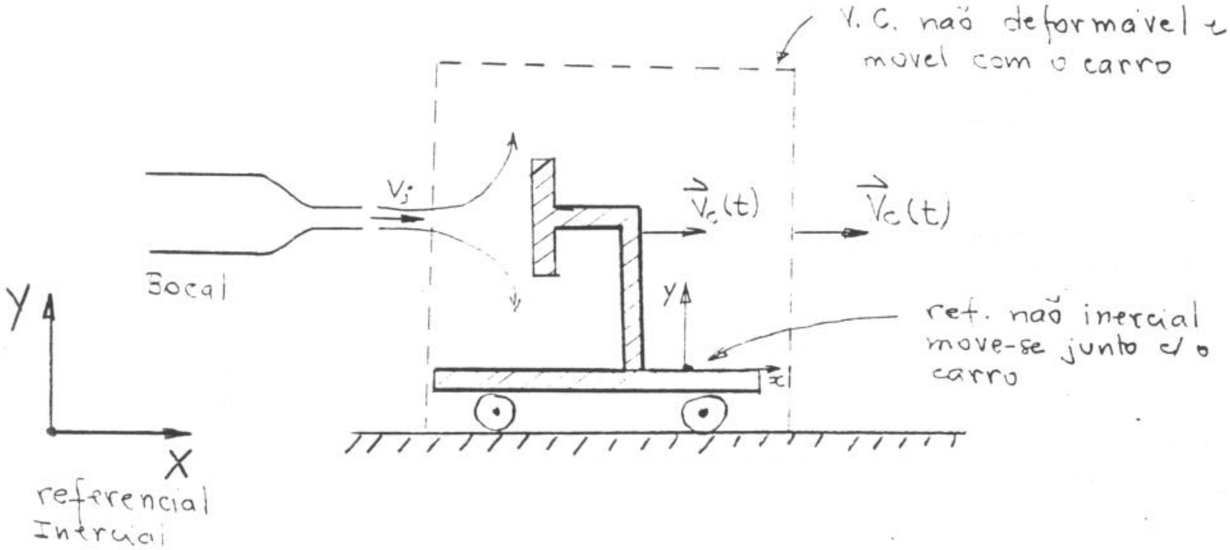
[Força normal a S.C. P. estatíca]

[Força tangencial a S.C.]

[Força mecânica que cruza a S.C.]

[Aceleração relativa]

Exemplo 3 O carro mostrado na Figura abaixo desliza sem atrito e é acelerado para direita com o impacto do jato. Derive uma equação para o momento do carro e estime o tempo necessário para que ele atinja 95% da velocidade do jato.



Para um V.C. fixo no carro, a equação da conservação do momento na direção x é:

$$\sum F_x - \iiint_{V.C.} \rho \; a_{x_{rel}} \, dV = \iiint_{V.C.} \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_x) \, dV + \iint_{S.C.} \rho \, V_x (\vec{V}_r \cdot \vec{n}_x) \, dA$$

(i) (ii) (iii) (iv)

Note que a equação escalar acima representa o balanço de forças na direção x. O termo de força normal atuando na S.C. se cancela porque a pressão que atua na S.C. é uniforme. As forças tangenciais atuantes na S.C. serão desprezadas.

i) Como não há nenhum tipo de eixo, alavanca ou mecanismo que cruza a S.C. a $\sum F_x \equiv 0$.

ii) Como o referencial se move com o V.C., aparece um termo de aceleração relativa ao referencial inercial XY,

$$a_{rel} = \frac{d\, x^2}{d\, t^2}.$$

Assim a integral do volume

$$\iiint_{V.C.} \rho\; a_{rel}\; dV \;=\; (M_c + M_f(t)\; \frac{d^2x}{dt^2}$$

onde M_c é a massa do carro e $M_f(t)$ é a massa do fluido dentro do V.C..

iii) A variação do momento dentro do V.C. é dada pelo termo

$$\iiint_{V.C.} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\; V_x)\; d\,V \;=\; \rho \iiint \frac{\partial\, V_x}{\partial t}\; d\,V$$

onde V_x é a velocidade do jato medida do referencial não inercial (x y). Este termo representa a variação da quantidade do movimento do fluido contido no V.C. Note que a massa do carro M_c não entra na análise poque para o ref. (xy) o carro está estacionário.

(iv) Considerando-se que após o impacto do jato com a superfície plana do carro, o fluido defletivo não possua componente de velocidade na direção x, o fluxo de momento que cruza a S.C.,

$$\iint_{S.C.} \rho\; V_x\; (\vec{V}_r \cdot \vec{n}\;)\; d\,A \;=\; \rho\; V_x\; (\vec{V}_r \cdot \vec{n}\;)\; A_j$$

onde A_j é a área do jato. Do ref. não inercial (x y) V_b=0 (V.C não deformável), $V_r = V_j - V_c$) portanto

$$(\vec{V}_r \cdot \vec{n}\;) \;=\; -\; (V_j - V_c)$$

Para o referencial não inercial (x y) a velocidade do jato V_j que cruza V_x que cruza a S.C. é

$$V_x = V_j - V_c$$

portanto o fluxo de momento através de S.C.

$$\iint_{S.C.} \rho\, V_x (V_r \cdot n)\, dA = -\rho (V_j - V_c)^2 A_j$$

Substituindo-se os termos dos itens i, ii, iii e iv na equação da consevação do momento

$$-(M_c + M_f)\frac{d^2X}{dt^2} = \rho \iiint_{V.C.} \frac{\partial V_x}{\partial t}\, dV - \rho (V_j - V_c)^2 A_j$$

A equação acima requer informação sobre a massa de fluido dentro do v.c. e também da velocidade do fluido na direção x, V_x medida do referencial não inercial (xy). Considerando-se que a massa do carro M_c é muitas vezes maior que a Massa de fluido dentro do V.C. então

$$(M_c + M_f(t))\frac{d^2X}{dt^2} \simeq M_c \frac{d^2X}{dt^2} \qquad \text{e}$$

$$\frac{\rho \iiint_{V.C} \frac{\partial V_x}{dt}\, dV}{M_c \frac{d^2X}{dt^2}} << 1$$

portanto a equação aproximada do movimento fica sendo:

$$M_c \frac{d^2X}{dt^2} \simeq \rho \, (V_j - V_c)^2 \, A_j$$

mas $\quad V_c \ (t) = \dfrac{dX}{dt} \quad$ então

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{\rho \, A_j}{M_c} \, (V_j - V_c)^2 \ .$$

integrando-se a equação acima

$$\int_0^{V_c} \frac{d \, V_c}{(V_j - V_c)^2} = \frac{\rho \, A_j}{M_c} \int_0^t dt$$

Obtem-se a velocidade do carro em função do tempo, da velocidade e área do jato e da densidade do fluido.

$$\frac{V_c(t)}{V_j} = \frac{\left(\dfrac{\rho A_j}{M_c}\right) V_j \ t}{1 + \left(\dfrac{\rho A_j}{M_c}\right) V_j \ t}$$

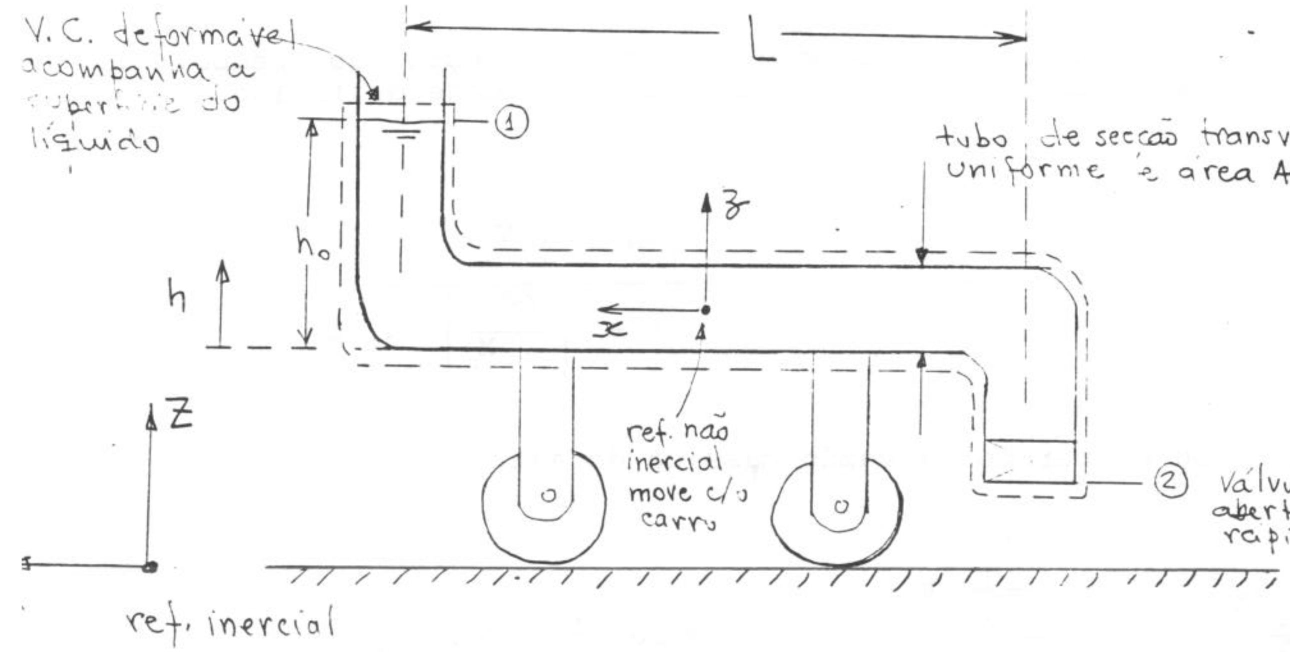
ou em termos da vazão mássica do jato $\dot{m}_j$

$$\frac{V_c(t)}{V_j} = \frac{\dfrac{\dot{m}_j}{M_c} \ t}{1 + \dfrac{\dot{m}_j}{M_c} \ t} \qquad \text{onde} \quad \dot{m}_j = \rho \, A_j \, V_j$$

O tempo necessário para que a velocidade do carro atinja 95% da velocidade do jato é:

$$\frac{V_c}{V_j} = 0,95 = \frac{\frac{\dot{m}_j}{M_c}\ t}{1 + \frac{\dot{m}}{M_c}\ t} \quad \therefore \quad t = 19\ \frac{M_c}{\dot{m}_j}$$

Exemplo 4 Usando a equação integral da conservação do momento determine a equação do movimento do carro em termos da altura da coluna de líquido h (t).



Considera-se que a força de atrito nas rodas é nula e que a pressão que atua nas secções (1) e (2) é uniforme, portanto $\sum F_{ext} \equiv 0$, Adotando-se um V.C. deformável cuja fronteira móvel acompanha o nível do líquido da secção (1), a equação da conservação do momento para a direção x fica sendo:

$$-\rho\underset{\text{V.C.}}{\iiint} a_{x_{rel}}\, dV \;=\; \rho\underset{\text{V.C.}}{\iiint} \frac{\partial V_x}{\partial t}\, d\,V + \rho\underset{\text{S.C.}}{\iint} V_x\,(\vec{v}_b\cdot\vec{n})\, dA + \rho\underset{\text{S.C.}}{\iint} V_x(\vec{V}_r\cdot\vec{n})\,dA$$

$$\text{(i)} \qquad\qquad \text{(ii)} \qquad\qquad \text{(iii)} \qquad\qquad \text{(iv)}$$

i) Como o carro movimenta-se sómente na direção x, o único termo de acel. relativa é referente ao movimento de translação do referencial não inercial xy ao referencial inercial XY,

$$a_{xrel} = \frac{d^2X}{dt^2}$$

então

$$-\rho\underset{\text{V.C.}}{\iiint} a_{x_{rel}}\, dV = -\Big[\underbrace{\rho\, A\, h\,(t)}_{\text{massa de fluido na coluna h(t)}} + \underbrace{M_c}_{\text{massa do carro}} + \underbrace{\rho\, A\, L}_{\text{massa de fluido na secção horizontal}} + \underbrace{M_f}_{\text{massa de fluido na secção vertical (2)}}\Big]\,\frac{d^2X}{dt^2}$$

ii) A variação do momento dentro do V.C. na direção x depende diretamente da componente de velocidade do fluido na direção x medido do referencial não inercial xy. Restringindo a análise para $h_o > 0$, V_x só não é nula na secção horizontal L do carro. Desde que a secção transversal do tubo possui uma área constante A e assumindo-se uma velocidade uniforme na secção A, V_x pode ser relacionado com a altura do nível do líquido através da equação da continuidade, portanto

$$V_x = \frac{dh}{dt} \quad \text{e}$$

$$\rho \iiint_{V.C.} \frac{d\,V_x}{d\,t} = \rho\, AL\, \frac{d^2h}{dt^2}$$

iii) A velocidade da fronteira na direção (x), V_{bx}, é nula e portanto

$$\rho \iint_{S.C} V_{bx}\, (\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, d\,A \equiv 0$$

iv) A velocidade do fluido na direção x, V_x, que sai do V.C. através da secção (2) é nula, consequentemente

$$\rho \iint_{S.C.} V_x\, (\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, d\,A = 0$$

Substituindo-se os termos (i), (ii), (iii) e (iv) na equação da conservação do movimento chega-se a:

$$-\,(\rho\, A\, h\,(t) + M_c + \rho\, A\, L + M_f)\, \frac{d^2X}{dt^2} = \rho\, A\, L\, \frac{d^2h}{dt^2}$$

O movimento do carro relativo ao referencial inercial xy é dado em função do nível de líquido h (t) do carro:

$$\frac{d^2X}{dt^2} = - \frac{\left(dh^2/dt^2 \right)}{\left[\frac{h(t)}{L} + \frac{M_c+M_f}{\rho \ AL} + 1 \right]}$$

4.4. Equação da Energia

A primeira lei da termodinâmica aplicada a um sistema é dada por:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{D\,E}{D\,t} \text{ sistema.}$$

$\dot{Q}$ e $\dot{W}$ referem-se a taxa de transferência de calor e trabalho, respectivamente entre o sistema e o ambiente. Na convenção empregada nos textos de termodinâmica a <u>taxa de transferência de calor $\dot{Q}$ para o sistema é positiva</u> e a <u>taxa de trabalho realizada pelo sistema é positiva</u>. E é a energia do sistema. Serão considerados três formas de energia. Para uma partícula de massa dm elas serão: energia cinética $\frac{1}{2}\,V_I^2\,dm$, energia potencial g z dm e energia interna $\hat{u}$ dm. V_I é a velocidade relacionada a um referencial inercial e estacionário (a palavra estacionário significa que o referencial não se move, isto é conveniente para evitar uma condição de energia cinética infinita). Z refere-se a uma cota específica. Estas três formas de energia são suficientes para a maioria dos problemas de engenharia. Para fenomenos onde ocorrem reações químicas ou que energia potencial está associada com campos elétricos ou magnéticos novos termos deverão ser adicionados ao termo da energia E do sistema para representar estes novas parcelas de E.

Com estas restrições para representação da energia E do sistema a equação integral da energia para um V.C. não deformável é obtida a partir do Teorema de Transporte de Reynolds e pode ser escrita ($B = E$; $\beta = e = V_I^2/2 + g\,z + \hat{u}$) como:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\iiint_{v.c.}\left(\frac{V_I^{\,2}}{2} + gz + \hat{u}\right)\rho\, dV + \iint_{s.c.}\left(\frac{V_I^{\,2}}{2} + gz + \hat{u}\right)\rho(\vec{V}_r\cdot\vec{n})dA$$

$\vec{V}_r$ é a velocidade relativa do fluido. Os termos $\dot{Q}$ e $\dot{W}$ representam as trocas de energia térmica e mecânica entre o sistema e o ambiente. As parcelas que compõe cada um dos termos $\dot{Q}$ e $\dot{W}$ serão discutidas a seguir.

i) Fluxo de Calor $\dot{Q}$

O calor pode ser transferido de ou para o sistema através de radiação ou condução. problemas a taxa de transferência de calor será dada mas a sua natureza não será especificada.

ii) Taxa de transferência de trabalho $\dot{W}$

A parcela de trabalho na equação da energia pode ser subdividida em quatro termos: trabalho de eixo $\dot{W}_s$, trabalho das tensões normais (pressão) $\dot{W}_p$, trabalho das tensões de cisalhamento ou também conhecido como trabalho das forças viscosas $\dot{W}_V$ e o trabalho inercial $\dot{W}_I$, assim

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \dot{W}_p + \dot{W}_v + \dot{W}_I$$

O trabalho de eixo $\dot{W}s$ é a porção de trabalho dada pelo eixo de uma máquina (rotor de uma bomba, pás do ventilador, pistão etc) que cruza a S.C.

O trabalho de pressão $\dot{W}p$ é o trabalho realizado pelas forças normais a S.C. Pelos fatos argumentados na secção 4.3, considera-se que as forças normais originam-se sómente do termo estático de pressão. A taxa de trabalho realizada pelas forças de pressão ocorre sómente na superfície do V.C.. No seu interior ela se cancela. $\dot{W}_p$ é igual a força de pressão num elemento de área δA vêzes a componente de velocidade normal a S.C.,

$$\dot{W}_p = \iint_{S.C.} p \, (\vec{V} . \vec{n}) \, d A$$

onde $\vec{V}$ é a velocidade do fluido medida de um referencial ligado ao V.C.

O trabalho Viscoso $\dot{W}v$ é o trabalho realizado no V.C. pelas tensões viscosas que agem na S.C. O trabalho realizado pelas tensões viscosas no interior do V.C. é nulo porque as tensões internas se cancelam. $\dot{W}_v$ é dado pelo produto das tensões de cisalhamento e a velocidade do fluido na S.C.,

$$\dot{W}_v = - \iint_{S.C.} \hat{n}.(\tau \cdot \vec{V}) \, dA$$

onde ($\vec{\tau}$ dA) é um vetor força que representa a ação da tensão de cisalhamento agindo no elemento de área dA

Nota: $\dot{W}_v$ pode ser nulo ou desprezível de acordo com o tipo particular de fronteira do V.C.

. Para S.C. coincidindo com uma fronteira sólida $\vec{V} = 0$ devido a condição de não deslizamento imposta pela ação da viscosidade, e portanto para este caso $\dot{W}_v = 0$.

. Para S.C. que são aproximadamente normais ao fluxo (entradas e saídas do V.C.) as tensões cisalhantes são normais a velocidade, portanto $\vec{n}.(\tau \cdot \vec{V})dA \cong 0$ e $\dot{W}_v = 0$.

O trabalho inercial $\dot{W}_I$ é parcela da energia associada com o movimento do V.C. em relação a um referencial inercial e estacionário.

A diferença entre a taxa de trabalho associada ao movimento do fluido e ao movimento do V.C. é observada notando-se que

$$\vec{V}_I = \vec{V} + \frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

onde $\frac{d\vec{R}}{dt}$ é $\vec{\Omega}$ são respectivamente as velocidades de translação e rotação do referencial do V.C. com relação ao referencial inercial e estacionário e $\vec{V}$ é a velocidade do fluido com relação ao referencial do V.C.

A taxa de trabalho transferido de ou para o V.C. deve ser determinada através do referencial inercial estacionário, consequentemente o trabalho realizado pelas forças normais e tangenciais deve ser redefinido em termos da velocidade relacionada a um referencial inercial e estacionário,

$$\dot{W}_{Ip} = \iint_{S.C.} p \; (\vec{V}_I \cdot \vec{n}) \; d\,A \qquad e$$

$$\dot{W}_{IV} = - \iint_{S.C.} \hat{n}.(\tau \cdot \vec{V}_I) \; d\,A \quad .$$

Substituindo-se o valor de V_I nas equações acima encontra-se

$$\dot{W}_{IP} = \iint_{S.C.} p \; (\vec{V} \cdot \vec{n}) \; d\,A + \iint_{S.C.} p \left[\left(\frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right) \cdot \vec{n} \right] d\,A \qquad e$$

$$\dot{W}_{IV} = - \iint_{S.C.} \hat{n}.(\tau \cdot \vec{V}) \; d\,A - \iint_{S.C.} \hat{n} \cdot \left[\tau \cdot \left(\frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right) \right] d\,A \; .$$

Uma vez que $\dot{W}_p$ e $\dot{W}_v$ foram definidos baseando-se na velocidade do fluido medida de um referencial do V.C., estes termos devem ser corrigidos para compensar os movimentos de translação e rotação que o referencial do V.C. pode vir a ter em relação ao referencial inercial estacionário. O termo para correção deste déficite é o trabalho inercial definido por:

$$\dot{W}_I = \iint_{S.C.} p \left[\left(\frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right) \cdot \vec{n} \right] d\,A - \iint_{S.C.} \vec{\tau} \cdot \left(\frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right) d\,A$$

Substituindo-se os termos $\dot{W}_p$, $\dot{W}_v$ e $\dot{W}_I$ na equação integral da energia para um V.C. não deformável obtêm-se:

$$\dot{Q} - \dot{W}_S - \dot{W}_V - \dot{W}_I = \frac{d}{dt}\iiint_{V.C.} \rho \left(\frac{V_I^2}{2} + g\,z + \hat{u} \right) dV$$

$$+ \iint_{S.C.} \left(\frac{V_I^2}{2} + g\,z + \hat{u} + \frac{p}{\rho} \right) \rho \,(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$$

4.5 Equação de Bernoulli

É util identificar na equação da Energia os termos de:energia potencial (g z), energia cinética ($V_I^2/2$) e o fluxo de trabalho das forças normais (p/ρ) como os termos mecânicos da equação e a anergia interna $\hat{u}$ e o fluxo de calor $\dot{Q}$ como os termos térmicos.

Desta maneira pode-se re-escrever a equação da energia isolando-se os termos mecânicos e os termos térmicos,

$$- \dot{W}_s - \dot{W}_v - \dot{W}_I = \underbrace{\frac{d}{dt}\iiint_{V.C.} \left(\frac{V_I^2}{2} + gz \right) \rho dV + \iint_{S.C.} \left(\frac{V_I^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho \,(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA}_{\text{termos mecânicos}} +$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\iiint_{V.C.} \hat{u}\, \rho \, dV + \iint_{S.C.} \hat{u}\, \rho \,(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA - \dot{Q}}_{\text{termos térmicos}}$$

A equação de Bernoulli é obtida aplicando-se a equação da energia para um escoamento uniforme (as propriedades do fluido não variam ao longo das áreas de entrada e saída de fluxo da S.C.) e em regime permanente através de um V.C. estacionário mostrado na Fig. 5

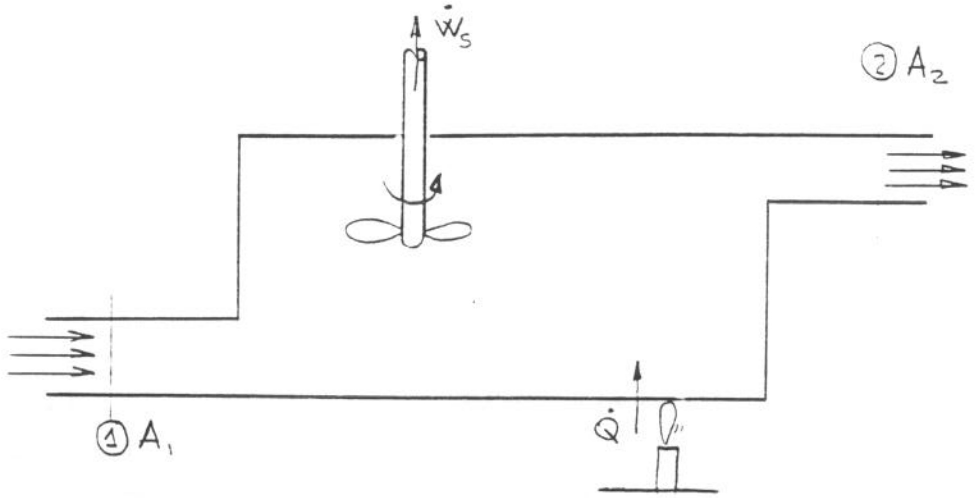


Fig. 5 - Escoamento uniforme através das secções (1) e (2) em regime permanente e V.C. estacionário.

Neste caso a equação da energia fica sendo:

$$-\dot{W}_s = \iint_{S.C} \left(\frac{V_I^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho \, (\vec{V}_r \cdot \vec{n}\,)dA + \iint_{S.C.} \hat{u}\, \rho \, (\, \vec{V}_r \cdot \vec{n}\,)\, dA - \dot{Q}$$

Como o escoamento é uniforme, isto é, a velocidade, pressão, densidade e energia interna são constantes ao longo das secções (1) e (2), as integrais passam a ser

$$-\frac{\dot{W}_s}{\dot{m}} = \left(\frac{V_I^2}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho} \right)_2 - \left(\frac{V_I^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right)_1 + (u_2 - u_1) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$$

onde $\dot{m} = \rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2$. Denotando por w_s o trabalho de eixo por unidade de massa $\dot{W}_s/\dot{m}$ e por q o calor por unidade de massa $\dot{Q}/\dot{m}$ e rearranjando-se os termos, chega-se à forma da Equação de Bernoulli:

$$\underbrace{\left(\frac{V_I^{\,2}}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho} \right)_1 = \left(\frac{V_I^{\,2}}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho} \right)_2}_{\text{energia mecânica}} + \underbrace{w_s}_{\text{trabalho de eixo}} + \underbrace{(u_2 - u_1) - q}_{\text{energia térmica}}$$

Os termos de energia térmica podem ser analisados utilizando-se a primeira e segunda lei da termodinâmica,

$$du - Tds = - pd(1/\rho).$$

Substituindo-se o termo Tds pela desigualdade de Clausius, $Tds \geq đq$, na equação da primeira lei,

$$du - đq \geq - pd(1/\rho),$$

ou em termos dos estados (1) e (2),

$$(u_2 - u_1) - q + \int_1^2 pd(1/\rho) \geq 0$$

Então a equação da energia em termos da desigualdade fica sendo

$$\left(\frac{V_I^{\,2}}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho}\right)_1 - \left(\frac{V_I^{\,2}}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho}\right)_2 - w_s + \int_1^2 p\,d(1/\rho) \geq 0$$

o que indica que a conversão em energia mecânica em trabalho de eixo ou vice versa nunca é integral, sempre parte da energia total é transformada em energia térmica irreversível. Este processo de irreversibilidade está diretamente associado aos efeitos viscosos através do termo de dissipação viscosa e será novamente abordado na forma diferencial da equação da energia. A desigualdade cessa quando o fluido não tiver viscosidade; consequentemente o escoamento torna-se reversível.

A fim de eliminar o sinal de desigualdade pode-se adicionar um termo do lado direito da equação que passará a representar as perdas de energia mecânica. Usualmente representa-se estas perdas através de uma constante multiplicada pela energia cinética do fluido assim,

$$(u_2 - u_1) - q + \int_1^2 p\,d(1/\rho) \equiv K\,\frac{V_I^2}{2}$$

Os valores de K para vários acessórios de tubulações tais como válvulas, tes, curvas, expasões e contrações graduais encontram-se nas refs. [3] e [4]. Substituindo a equação acima na equação da energia,

$$\left(\frac{V_I^{\,2}}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho}\right)_1 - \left(\frac{V_I^{\,2}}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho}\right)_2 - w_s + \int_1^2 p\,d(1/\rho) \equiv K\,\frac{V_I^2}{2}$$

Nota-se que para escoamentos incompressíveis o termo

$$\int_1^2 p\,d(1/\rho)$$

é nulo então os termos mecânicos representam a energia útil, no sentido que tanto a energia cinética ou potencial ou o trabalho de pressão podem ser convertidos entre si sem haver degradação da energia total. Os termos térmicos referem-se a dissipação viscosa que converte parte da energia mecânica e trabalho de eixo em energia interna e fluxo de calor que se dissiparão, de maneira irreversível, para o ambiente. Já para escoamentos compressíveis o termo

$$\int_1^2 p\,d(1/\rho)$$

é diferente de zero significando que uma parcela dos termos térmicos é reversível, mais especificamente, uma parcela da energia total devido a adição ou remoção de calor é convertida em trabalho de pressão.

4.6. Equação da Energia para um V.C. Deformável

A possibilidade da superfície do Volume de Controle ser deformável introduz modificações na equação da energia desenvolvida na secção 4.4. Entretanto, várias considerações aplicam-se tanto para V.C. não deformáveis quanto para V.C. deformáveis e não serão duplicadas. Usando o Teorema de Transporte de Reynolds a equação da energia para um V.C. deformável fica sendo

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\iiint_{V.C.}\left(\frac{V_I^2}{2} + gz + \hat{u}\right)\rho dV + \iint_{S.C}\left(\frac{V_I^2}{2} + gz + \hat{u}\right)\rho(\vec{V}_r\cdot\vec{n})\, d\,A$$

Notando-se que a velocidade inercial $\vec{V}_I$ é expressa por

$$\vec{V}_I = \vec{V}_r + \vec{V}_b + \frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r}\ ,$$

os termos de trabalho de pressão e das tensões de cisalhamento transformam-se para:

$$\dot{W}_{Ip} = \iint_{S.C.} p\ (\vec{V}_r\cdot \vec{n})\ d\,A + \iint_{S.C.} p\ (\vec{V}_b\cdot\vec{n})\ dA + \iint_{S.C.} p\left[\left(\frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{\Omega}x\vec{r}\right)\cdot\ \vec{n}\right] d\,A$$

e

$$\dot{W}_{IV} = -\iint_{S.C.} \vec{n}\cdot(\tau\ \cdot\ \vec{V}_r)\ dA - \iint_{S.C} \vec{n}\cdot(\tau\ \cdot\ \vec{V}_b)\ dA - \iint_{S.C.} \vec{n}\cdot\left[\tau\cdot\ \left(\frac{d\ \vec{R}}{d\ t} + \vec{\Omega}\ x\ \vec{r}\right)\right] dA$$

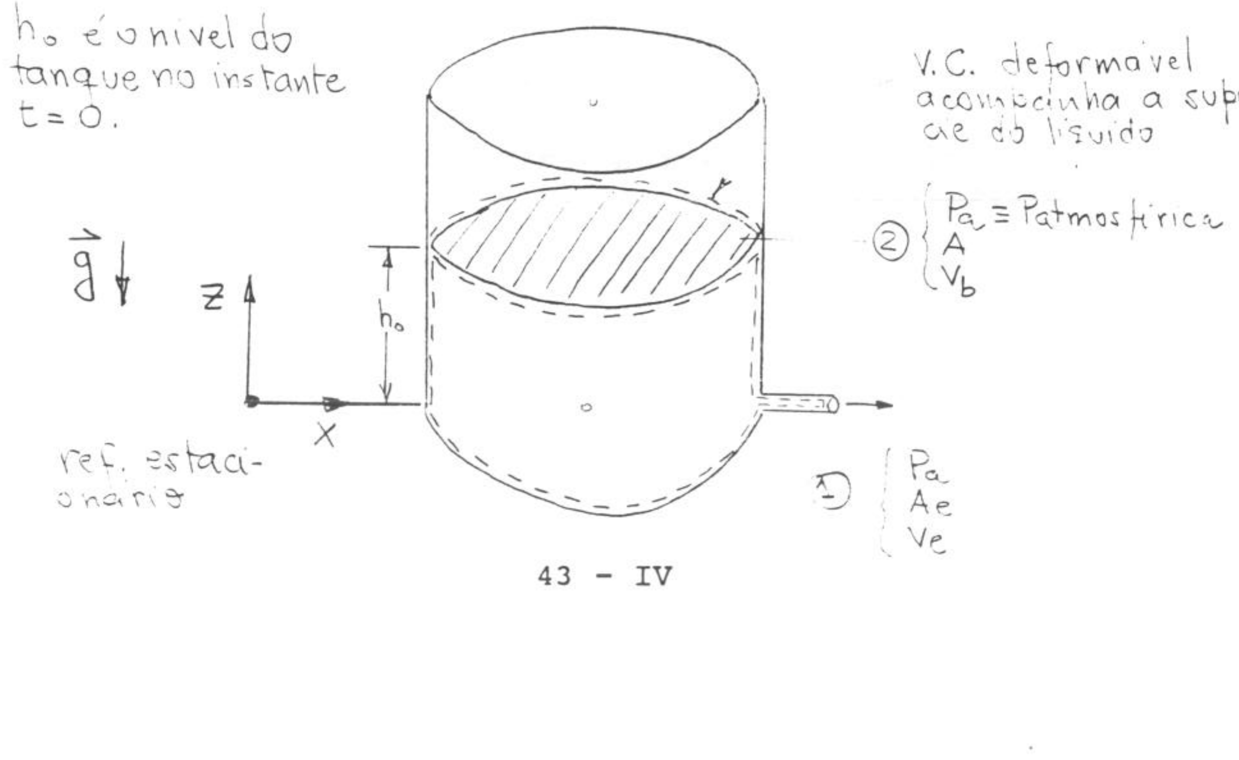
mantendo-se a definição dada para $\dot{W}_I$, a equação da energia para um V.C. deformável fica sendo:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_V - \dot{W}_I = \iiint_{V.C.} \frac{d}{dt}\left[\rho\left(\frac{V_I^{\,2}}{2} + g\,z + \hat{u}\right)\right] d\,V \; +$$

$$\iint_{S.C.} \left[\frac{V_I^{\,2}}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho} + \hat{u}\right] \rho\,(\vec{V}_b \cdot \vec{n})\, d\,A \; +$$

$$\iint_{S.C.} \left[\frac{V_I^{\,2}}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho} + \hat{u}\right] \rho\,(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, d\,A$$

Exemplo 5 Água escoa para fora de um tanque através de uma pequena abertura lateral. A área transversal do tanque é A. O escoamento se contrai quando passa pelo orifício lateral saindo para a atmosfera com uma área efetiva A_e. Determine uma expresão para a variação da altura do nível de água no tanque em função do tempo.



Utilizando-se a equação da continuidade:

$$\iiint_{V.C.} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d V + \iint_{S.C.} \rho\, (\vec{V}_b \cdot \vec{n})\, d A + \iint_{S.C.} \rho\, (\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, d A = 0$$

Como a água é incompressível, $\partial\rho/\partial t \equiv 0$. Será considerado propriedade uniforme nas secções (1) e (2) portanto a eq. da conservação da massa se reduza a:

$$- |V_b|\, A + |V_e| A_c = 0 \ .$$

Como $\vec{V}_b$ é a velocidade de deformação da S.C. , consequentemente ela está diretamente relacionada com o nível do reservatório:

$$\vec{V}_b = \frac{d h}{d t}\, \vec{k}$$

para simplificar a notação a derivada temporal será indicada pelo superescrito (·) , assim

$$\vec{V}_b = \dot{h}\, \vec{k} \quad e$$

$$\vec{V}_r \cong \vec{V}_e = - \frac{A}{A_e}\, \dot{h}\, \vec{i}$$

A equação da energia para um volume de controle deformável:

$$\dot{Q} - \dot{W}_S - \dot{W}_V - \dot{W}_I = \iiint_{V.C.} \frac{d}{dt}\left[\rho\left(\frac{V_I^{\,2}}{2} + g\,z + \hat{u}\right)\right] d\,V +$$

$$\iint_{S.C} \left(\frac{V_I^{\,2}}{2} + gz + \frac{p}{\rho} + \hat{u}\right)\rho(\,\vec{V}_t\cdot\vec{n}\,)\,dA + \iint_{S.C.} \left(\frac{V_I^{\,2}}{2} + gz + \frac{p}{\rho} + \hat{u}\right)\rho(\vec{V}_r\cdot\vec{n})\,dA$$

. $\dot{W}_s \equiv 0$ não há trabalho de eixo cruzando a S.C.

. $\dot{W}_I \equiv 0$ V.C. é estacionário, isto é, $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\Omega} = 0$.

. $\dot{W}_V \equiv 0$ Parte da S.C. coincide com as paredes sólidas do tanque, nas secções (1) e (2) o fluxo é normal e uniforme.

Antes de avaliar os termos da eq. da Energia será feita uma hipótese simplificadora considerando que a taxa de fluxo da energia interna e o fluxo de calor são despreziveis. Esta condição é razoavelmente satisfatória uma vez que os efeitos no interior do tanque estão confinados próximo a parede e, se $\dot{h}$ não for muito elevado, estes efeitos também não serão. Se o cano de descarga for longo ou tiver um diâmetro muito pequeno capaz de causar uma perda de carga (energia) elevada, a hipótese deixa de ser válida.
Fazendo uso destes argumentos, será considerado que $\dot{Q} \cong 0$ e que os termos de fluxo e a taxa de variação da energia interna se auto-cancelem.

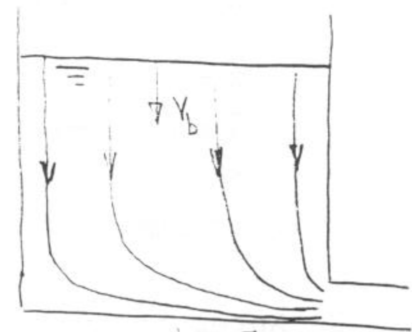
Com estas hipóteses a equação da energia reduz a:

$$\iiint_{V.C.} \frac{d}{dt}\left[\rho\left(\frac{V_I^2}{2} + gz\right)\right] d\,V + \iint_{S.C.}\left(\frac{V_I^2}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho}\right)\rho\ (\vec{V}_b \cdot n)\ d\,A$$

$$+ \iint_{S.C.}\left(\frac{V_I^2}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho}\right)\rho\ (\vec{V}_r \cdot \vec{n})\ d\,A = 0$$

i) A avaliação da taxa de energia dentro do V.C.

Será considerada que dentro do V.C. a velocidade média do fluido é a taxa de variação do nível $\dot{h}$. Esta aproximação não é válida nas proximidades do orifício porque o escoamento acelera. Considerando que o volume de fluido acelerado émuito menor que o volume de fluido que escoa com velocidade V_b, pode-se afirmar que a velocidade média dentro do V.C. é $\dot{h}$.



representação esquemática das linhas de corrente dentro do tanque

A coordenada z não é função do tempo portanto

$$\frac{d}{dt}\ (g\ z) \equiv 0$$

Assim o termo

$$\iiint_{V.C.} \frac{d}{dt}\left[\rho\left(\frac{V_I^2}{2} + gz\right)\right]dV = \iiint_{V.C.}\left(V_I \cdot \frac{d\,\vec{V}_I}{dt}\right)\rho\ d\ V \cong (\vec{V}_b \cdot \dot{\vec{V}}_b)\ \rho\ h\ A$$

ii) O fluxo de energia devido a deformação da fronteira,

$$\iint_{S.C.} \left(\frac{V_I^{\,2}}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho} \right) \rho\ (\vec{V}_b \cdot \vec{n})\ dA \;=\; -\left(\frac{V_b^{\,2}}{2} + gh + \frac{p_a}{\rho} \right) \cdot\ \rho\,|\vec{V}_b|\,A$$

iii) O fluxo de energia devido a velocidade relativa do fluido,

$$\iint_{S.C.} \left(\frac{V_I^{\,2}}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho\ (\vec{V}_r \cdot \vec{n})\ dA = + \left[\left(\frac{A}{A_e} \right)^2 \frac{V_b^{\,2}}{2} + \frac{p_a}{\rho} \right] \rho\ |\vec{V}_b|\ A$$

Obs.: considerou-se cota $z = 0$ o nível do orifício.

Somando-se os itens (i), (ii), e (iii) para compor a equação da energia encontra-se:

$$(\vec{V}_b \cdot \dot{\vec{V}}_b)\,\rho h A - \left(\frac{V_b^{\,2}}{2} + gh + \frac{p_a}{\rho} \right) \rho\,|\vec{V}_b|\,A + \left[\left(\frac{A}{A_e} \right)^2 \frac{V_b^{\,2}}{2} + \frac{p_a}{\rho} \right] \rho\,|\vec{V}_b|\,A = 0$$

ou

$$\left\{ \frac{(\vec{V}_b \cdot \vec{V}_b)\ h}{|\vec{V}_b|} - \left(\frac{V_b^{\,2}}{2} + gh + \cancel{\frac{p_a}{\rho}} \right) + \left[\left(\frac{A}{A_e} \right)^2 \frac{V_b^{\,2}}{2} + \cancel{\frac{p_a}{\rho}} \right] \right\} \rho\,|\vec{V}_b|\ A = 0$$

cancelam

$\vec{V}_b$ está diretamente relacionado com o nível do reservatório, então

$$\vec{V}_b = \dot{h}\ \vec{k}$$

como o reservatório está esvaziando,

$$|\vec{V}_b| = -\ \dot{h} \quad \text{porque } \dot{h} < 0.$$

Substituindo o valor de $\vec{V}_b$ na equação da energia:

$$- h \ddot{h} + \frac{1}{2} \dot{h}^2 \left(\left(\frac{A}{A_e} \right)^2 - 1 \right) - g h = 0 \qquad \text{ou}$$

$$h \ddot{h} + \frac{1}{2} \dot{h}^2 \left[1 - \left(\frac{A}{A_e} \right)^2 \right] + g h = 0$$

O fator $\ddot{h}$ é proporcional a aceleração da água no tanque $d V_b/dt$. Se for considerado que a aceleração é muito pequena este termo pode ser desprezado. Geralmente este tipo de aproximação é arriscado porque se joga fora o termo de maior ordem da equação diferencial e consequentemente ela perde a capacidade de satisfazer as duas condições de contorno. Este tipo de problema é abordado em teoria das pertubações. Felizmente a solução de primeira ordem, obtida quando $\ddot{h}$ é desprezada, fornece uma boa aproximação. A equação diferencial reduz a

$$\frac{1}{2} \dot{h}^2 \left[1 - \left(\frac{A}{A_e} \right)^2 \right] + g h = 0$$

ou

$$\frac{d h}{d t} = \frac{\sqrt{2 g h}}{\sqrt{1 - (A / A_e)^2}}$$

mas da equação da continuidade, $V_e = -(A/A_e)\dot{h}$. Substituindo o valor de $\dot{h}$ encontra-se a fórmula de Torricelli para a velocidade de descarga de um tanque,

$$V_e = \frac{\sqrt{2\,g\,h}}{\sqrt{1 - (A_e/A)^2}}$$

ou integrando com relação ao tempo

$$\frac{h}{h_o} = \left[1 - \frac{t\sqrt{g/2h_o}}{\sqrt{(A/A_e)^2 - 1}}\right]^2$$

Exemplo 6 No exemplo 4 uma expressão foi desenvolvida relacionando a posição x(t) do carro com a altura h(t) da coluna de líquido. A equação do momento e da continuidade foram usadas para chegar na expressão:

$$-\frac{d^2x}{dt^2}\,(M_c + \rho\,A\,h + \rho\,A\,L + M_f) = \rho\,A\,L\,\frac{d^2h}{dt^2}$$

Do ponto de vista analítico esta equação é indeterminada pelo fato que há duas incógnitas e uma equação. A segunda equação virá da equação da energia.
Efeitos de transferência de calor e variações da energia interna $\hat{u}$ serão agrupados no termo de perda; o trabalho de eixo, $\dot{W}_s$, é nulo. Será desconsiderado a contribuição da força de arrasto que o ar exerce no carro no termo de trabalho. A equação da energia fica sendo,

$$0 = \iiint_{V.C.} \frac{d}{dt}\left[\rho\left(\frac{V_I^{\,2}}{2} + gz\right)\right] dV + \iint_{S.C.} \left[\frac{V_I^{\,2}}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right] \rho\, \vec{V}_b.\vec{n}\; d\,A$$

$$+ \iint_{S.C.} \left[\frac{V_I^{\,2}}{2} + g\,z + \frac{p}{\rho}\right] \rho\,(\vec{V}_r\cdot\vec{n})\; d\,A \;+\; (\text{perdas})$$

onde a velocidade V_I indica a velocidade medida a partir de um referencial estacionário. Neste problema V_I pode ser escrito:

$$\vec{V}_I = \vec{V} + \frac{dx}{dt}\,\vec{i}$$

onde $\vec{V}$ é a velocidade do fluido medida do referencial não inercial (xy), no caso, sómente a velocidade do fluido em escoamento

$$V_I^{\,2} = \vec{V}_I \cdot \vec{V}_I = V^2 + 2\,\frac{dx}{dt}\,(\vec{V}\cdot\vec{i}) + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

assim os termos de energia cinética do problema podem ser calculados como:

$$\iiint_{V.C.} \frac{d}{dt}\left(\frac{V_I^{\,2}}{2}\right)\rho\, dV + \iint_{S.C.} \rho\,\frac{V_I^{\,2}}{2}\,(\vec{V}_b\cdot\vec{n})\; dA + \iint_{S.C.} \rho\,\frac{V_I^{\,2}}{2}\,(\vec{V}_r\cdot\vec{n})\; d\,A =$$

cancelam

$$\iiint_{V.C.} \frac{d}{dt}\left[\frac{V^2}{2} + (\vec{V}\cdot\vec{i})\,\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]\rho\, d\,V$$

Da continuidade, $\vec{V}_b\cdot\vec{n} = -\ \vec{V}_r\cdot\ \vec{n}$ e consequentemente os últimos dois termos do lado esquerdo da equação se cancelam. A magnitude da velocidade $\vec{V}$ é dada por $|\vec{V}| = -\frac{dh}{dt}$ e o produto $(\vec{V}\cdot\vec{i})\ \frac{dx}{dt}$ é diferente de zero sómente na secção horizontal de comprimento L. Usando $\dot{h} = dh/dt$, $\ddot{h} = dh^2/dt^2$ etc. por simplicidade, o integrando torna-se:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{V^2}{2} - V\,\dot{x} + \frac{\dot{x}^{\,2}}{2}\right] = \dot{h}\,\ddot{h} + \dot{h}\,\ddot{x} + \dot{x}\,\ddot{h} + \dot{x}\,\ddot{x}$$

Lembrando-se que $|\vec{V}| = -\,\dot{h}$ é diferente de zero somente para água, então pode-se escrever

$$\iiint_{V.C.} \frac{d}{dt}\left(\frac{V_I^{\,2}}{2}\right)\rho\, d\,V =$$

$$\underbrace{\dot{h}\,\ddot{h}\,(\rho Ah + \rho AL + {}_fM)}_{\substack{\text{taxa de variação de}\\ \text{energia do referen-}\\ \text{cial não inercial.}}} + \underbrace{\rho AL\left[\dot{h}\,\ddot{x} + \dot{x}\,\ddot{h}\right]}_{\substack{\text{taxa de variação da}\\ \text{Energia cinética da}\\ \text{secção horizontal.}}} + \underbrace{\dot{x}\,\ddot{x}\left[\rho Ah + \rho AL + M_c + M_f\right]}_{\substack{\text{taxa de variação da}\\ \text{Energia cinética do}\\ \text{referencial Incercial.}}}$$

onde M_f é a massa de fluido na secção vertical (2), veja desenho no exemplo 4.
A energia potencial é calculada através de:

$$\iiint_{V.C.} \frac{d}{dt}(\rho \cancel{g} z)\, dV + \iint_{S.C.} \rho\, g\, z(\vec{V}_b\cdot\vec{n})dA + \iint_{S.C.} \rho\, g\, \cancel{z}(\vec{V}_r\cdot\vec{n})dA = -\rho g h|\vec{V}_b|$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{l}\text{z não função}\\ \text{do tempo}\end{array}\right)}_{0} \qquad (-\rho\, g\, h\, |\vec{V}_b|) \qquad \underbrace{(\text{na secção (2) } z = 0)}_{0}$$

mas $|\vec{V}_b| = -\dot{h}$ então a equação da Energia torna-se:

$$\dot{h}\,\ddot{h}\left[\rho Ah + \rho AL + M_f\right] + \rho AL\left[\dot{h}\,\ddot{x} + \dot{x}\,\ddot{h}\right] + \dot{x}\,\ddot{x}\left[\rho Ah + \rho AL + M_c + M_f\right]$$

$$+ \rho\, g\, h\, \dot{h}\, A + (\text{perdas}) = 0$$

Frequentemente as perdas são colocadas na forma

$$(\text{perdas}) = (\rho\, A\, V)\,\frac{k\, V^2}{2}\ .$$

Nesta fórmula K é uma constante que se refere as perdas devido a geometria, comprimento do duto ou por regiões de separação.

REFERÊNCIAS:

[1] Hansemn, Arthur G.; *"Fluid Mechanics"*, John Wiley & Sons, 1967.

[2] Potter, Merle C. e Foss, John F.; *"Fluid Mechanics"*, Great Lake Press, 1982.

[3] White, F. *"Fluid Mechanics"*, Mc Graw Hill (1986).

[4] Fox, R.W. e McDonald, A.T., *"Introdução a Mecânica dos Fluidos"*, Mc GrawHill (1974).

Equações Constitutivas p/ Fluido Newtoniano & Introd. Fluidos Não Newtonianos

6.0 Equação Constitutiva p/ Fluido ...

As equações constitutivas relacionam o tensor dos tensões com o tensor de deformações do fluido.

6.1 O Fluido estacionário

Para um fluido estacionário somente as tensões normais são exercidas. A direção destas tensões normais é independente da direção da normal da superfície do elemento através da qual ele age. Neste caso, o tensor de tensões assume a forma:

$$\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij} \tag{1}$$

onde p é a pressão termodinâmica do fluido. Como p depende somente de sua posição espacial, implica em dizer que a tensão normal é invariante em relação ao referencial a qual ela esta sendo medida, consequentemente p deve estar associado ao primeiro invariante* τ_{ij}

$$I_1 = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} \tag{2}$$

* Invariantes são combinações especiais das componentes de τ_{ij} que são independentes da orientação do sistema de referência.

Para um campo hidrostático, $\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33}$, a pressão termodinâmica é definida:

$$p = -\frac{1}{3}\tau_{ii} \qquad (3$$

ela representa o possível estado de tensões num fluido estacionário, isto é sem movimento relativo entre as partículas. A pressão termodinâmica depende somente da densidade e da temperatura do fluido, de acordo com sua equação de estado.

6.2 O Fluido em Movimento

É conveniente tratar do tensor de tensões τ_{ij}, para um fluido em movimento, como a soma do tensor de tensões do fluido estático $-p\delta_{ij}$ e de um tensor de tensões τ'_{ij} que se vincula unicamente a deformação do fluido devido ao seu movimento.

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau'_{ij} \qquad (4$$

O tensor τ'_{ij} é também denominado de "desvio do tensor de tensões", (stress-deviation tensor)

Postulado sobre o tensor τ'_{ij} para um fluido Newtoniano

i) τ'_{ij} é linearmente relacionado ao tensor de deformações $\dot{E}_{kl}$ (hipótese de fluido Newtoniano)

ii) Não há direções preferenciais no fluido, as propriedades são funções apenas da temperatura e pressão. Dizendo mais precisamente o fluido é isotrópico.

Usando o postulado i, pode-se escrever τ'_{ij} como uma combinação linear dos nove elementos do tensor de deformação $\dot{E}_{kl}$:

$$
\begin{bmatrix} \tau'_{11} \\ \tau'_{12} \\ \vdots \\ \\ \tau'_{33} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
K_{1111} & K_{1112} & K_{1113} & K_{1121} & K_{1122} & K_{1123} & K_{1131} & K_{1132} & K_{1133} \\
K_{1211} & K_{1212} & K_{1213} & K_{1221} & \cdots & & & & \\
\vdots & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
K_{3311} & K_{3312} & K_{3313} & \cdots & & & & &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{12} \\ \vdots \\ \\ \dot{E}_{33} \end{bmatrix}
$$

Ou

$$\tau'_{ij} = \beta_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \qquad (5$$

Onde β_{ijkl} é um tensor de ordem 4. Aparentemente, como mostra eq. (4) ou sua equivalente forma matric é necessário que se determine 81 constantes para que se possa relacionar τ'_{ij} com $\dot{\varepsilon}_{kl}$. No entanto, pode-se mostrar que para fluidos isotrópicos (Postu do ii) o número necessário de constantes para definir β_{ijkl} se reduz à precisamente duas!

O tensor genérico β_{ijkl} de ordem quatro pode entao ser escrito através das constantes λ e μ como:

$$\beta_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \qquad (5$$

A característica fundamental da eq. (5) é que as componentes do tensor isotrópico β_{ijkl} se mantém inalteradas para qualquer transformaçã ortogonal de coordenadas (translação, rotação ou reflexão dos eixos das coordenadas). Isto implica que a forma da equação constitutiva permanece também inalterada para qualquer transformaçã de coordenados.

Substituindo-se eq. (5) em eq. (4) chega-se a:

$$\tau'_{ij} = \left[\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})\right] \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \qquad (($$

* Para demonstração veja "A first course in continuum mechanics"

O Tensor de deformações $\partial V_k/\partial x_\ell$ pode ser decomposto em uma parte simétrica (dilatação e deformação pura) e em outra anti-simétrica (rotação pura)

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial V_\ell}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} - \frac{\partial V_\ell}{\partial x_k}\right)$$

Mas devido ao fato que τ'_{ij} deve ser simétrico, cap. 5 secção 5.5, τ'_{ij} será proporcional somente a componente simétrica do tensor de deformações. Consequentemente não há tensões associados a um fluido em rotação pura. O desvio do tensor de tensões, τ'_{ij} pode então ser escrito com

$$\tau'_{ij} = \frac{1}{2}\left[\lambda\delta_{ij}\delta_{k\ell} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}\right)\right]\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial V_\ell}{\partial x_k}\right)$$

Substituindo eq (8) na eq. (4) chega-se a equação constitutiva para um fluido Newton.

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\frac{\partial V_k}{\partial x_k} + \mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$$

Tomando por Δ_{ij} a parte simétrica do tensor de deformaçõ

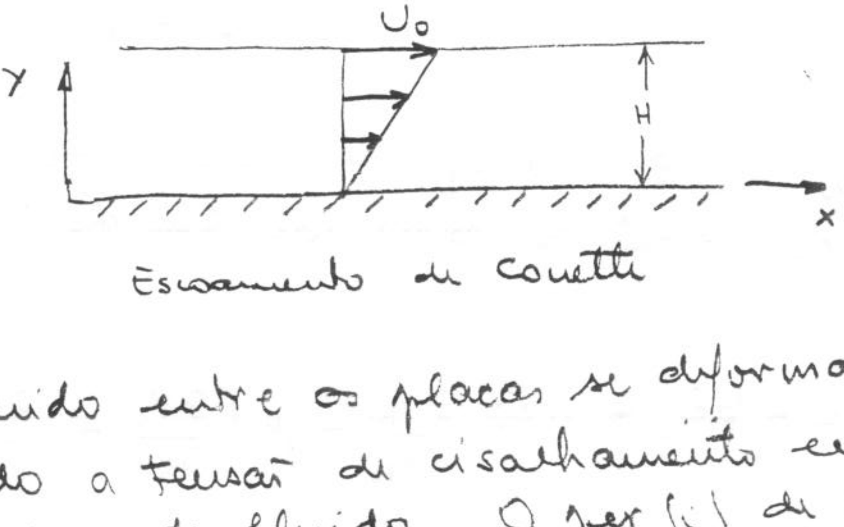
isto é, $2\Delta_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$, equação (9) p. ser escrita na forma matricial, para um sistema cartesiano como:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}}_{\text{tensões associadas ao campo hidrostático, } p \text{ é a pressão termodinâmica}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda\nabla\cdot\vec{V}+2\mu\Delta_{xx} & 2\mu\Delta_{yx} & 2\mu\Delta_{zx} \\ 2\mu\Delta_{xy} & \lambda\nabla\cdot\vec{V}+2\mu\Delta_{yy} & 2\mu\Delta_{zy} \\ 2\mu\Delta_{xz} & 2\mu\Delta_{yz} & \lambda\nabla\cdot\vec{V}+2\mu\Delta_{zz} \end{bmatrix}}_{\text{tensões associados a deformação do fluido devido a efeitos viscosos.}}$$

$$\tau_{ij} = \left(-p + \lambda\nabla\cdot\vec{V}\right)\delta_{ij} + 2\mu\Delta_{ij}$$

6.3 Coeficientes de Viscosidade

Considere o escoamento de um fluido incompressível entre duas placas planas, paralelas e infinitas, sendo que uma delas é estacionária e a outra move-se com velocidade U_0.



Escoamento de Couette

O fluido entre as placas se deforma continuamente devido a tensão de cisalhamento entre as laminas de fluido. O perfil de velocidades é mostrado na figura acima, é $u(y) = U_0\left(\frac{y}{H}\right)$.
As componentes do tensor de tensões são:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{10}$$

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -p \tag{11}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0 \tag{12}$$

As componentes normais do tensor τ_{ij} são dados pela pressão termodinâmica p, eq (11).

As componentes não nulas do tensor τ_{ij}, eq (10) são proporcionais ao gradiente de velocidade através do fator de proporcionalidade μ. Este fator μ é identificado em mecânica dos Fluidos como sendo a viscosidade dinâmica do fluido

O parametro λ é denominado segundo coeficiente de viscosidade. A interpretação física do valor de λ gera discussões há mais de um século e meio entretanto o valor que λ assume na eq. (9) é consenso. O valor numérico de λ é determinado através da hipótese de Stokes:

$$3\lambda + 2\mu = 0$$

ou

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \tag{13}$$

6.4 Pressão mecânica e o coeficiente de viscosidade da Mistura.

A pressão mecânica $\bar{p}$ é definida como o negativo de um terço do primeiro invariante de τ_{ij}, isto é:

$$\bar{p} = \frac{1}{3}\left(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}\right) \tag{14}$$

sto é consequência de que a soma dos três componentes normais de um tensor é uma constante invariante da orientação do sistema de referência.

Substituindo-se eq. (9) na eq. (14) e somando-se os termos chega-se a:

$$\bar{p} = p - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\nabla\cdot\vec{V} \tag{15}$$

A eq. (15) mostra que a pressão mecânica $\bar{p}$, para um fluido com deformação viscosa, não é igual a propriedade termodinâmica denominada pressão:

$$\bar{p} - p = -K\,\nabla\cdot\vec{V} \tag{16}$$

onde K, denominado coeficiente de viscosidade da mistura, é igual a

$$K = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) \tag{17}$$

A hipótese de Stokes, eq. (13), simplesmente coloca $K \equiv 0$, o que implica em dizer que a pressão mecânica é igual a pressão termodinâmica. Entretanto o exato significado da equação (16), que implicitamente depende do valor de λ, é controversial.

Entretanto a diferença entre $\bar{p}$ e p é raramente importante porque $\nabla\cdot\vec{V}$ é usualmente muito pequeno na maioria dos escoamentos. Exceções ocorrem no estudo entre a interação de ondas de choque e o escoamento escoamento compressível na camada limite e também na atenuação da absorção de som por líquidos.

Deve-se destacar que para escoamentos incompressíveis, $\nabla\cdot\vec{V}\equiv 0$, consequentemente a pressão mecânica $\bar{p}$ é igual a pressão termodinâmica p, independente do valor de K.

6.5 A Equação de Navier-Stokes

A equação de Navier-Stokes (N-S) é obtida substituindo-se eq. (7) na equação da conservação do momento, (eq (34) cap 5)

$$\rho\left[\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j\,\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)+\lambda\delta_{ij}\frac{\partial V_\ell}{\partial x_\ell}\right]+\rho g_i \; ($$

Eq. (18) pode ser escrita na forma escalar para os três direções. Considerando um sistema de coordenadas cartesiano, eq. (18) fica sendo, reção x

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \nabla\cdot\vec{V}\right) +$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \quad (19.a$$

reção y

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \nabla\cdot\vec{V}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] \quad (19.b$$

reção z

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \nabla\cdot\vec{V}\right] \quad (19.$$

As equações diferenciais (19a) (19b) e (19c) representa a equação da conservação do momento, para um fluido Newtoniano, na sua forma mais geral. Ela é válida para escoamentos compressíveis ou incompressíveis com os coeficientes de viscosidade podendo variar com a temperatura e pressão ou não.

Considerável simplificação pode-se obter nas eq. (19a), (19b) e (19c) se o escoamento for incompressível, $\nabla\cdot\vec{V} \equiv 0$, com propriedades constantes, μ e ρ não dependendo da temperatura e pressão. Nestas condições a equação de N-S fica sendo:

$$\begin{Bmatrix}\text{Direção}\\ x\end{Bmatrix} \quad \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right] + \rho g_x \quad (20.a)$$

$$\begin{Bmatrix}\text{Direção}\\ y\end{Bmatrix} \quad \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\right] + \rho g_y \quad (20.b)$$

$$\begin{Bmatrix}\text{Direção}\\ z\end{Bmatrix} \quad \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)\right] + \rho g_z \quad (20.c)$$

ou na forma vetorial

$$\underbrace{\frac{\rho D\vec{V}}{Dt}}_{\substack{\text{termos convectivos}\\ \text{ou de transporte}\\ \text{de momento}}} = \underbrace{-\overrightarrow{\nabla p}}_{\substack{\text{forças de}\\ \text{superfície}}} + \underbrace{\mu\nabla^2\vec{V}}_{\substack{\text{força viscosa}\\ \text{ou termo de}\\ \text{difusão de mo-}\\ \text{mento}}} + \underbrace{\rho\vec{g}}_{\substack{\text{força de}\\ \text{campo}}} \qquad (21)$$

6.6 Paradoxo da Força Viscosa

Existe um aparente paradoxo na forma da força viscosa por unidade de volume que é revelada mais claramente no contexto do escoamento incompressível de viscosidade constante. Neste caso, a força viscosa por unidade de volume é dada pelo 2º termo do lado direito da eq (21), porém, usando uma identidade vetorial, ele também pode ser expresso por:

$$\mu \nabla^2 \vec{V} = \mu \left[\nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla \times \nabla \times \vec{V} \right] \qquad (22)$$

para escoamento incompressível $\nabla \cdot \vec{V} \equiv 0$ e o
termo $(\nabla \times \vec{V})$ é a vorticidade $\vec{\omega}$ do campo de
velocidades, assim eq. (22) fica sendo

$$\mu \nabla^2 \cdot \vec{V} = -\mu \nabla \times \vec{\omega} \qquad (23)$$

ou

$$\nabla \cdot \tau' = -\mu \nabla \times \vec{\omega}$$

O paradoxo surge porque as equações constitu-
tivos estabelecem que o tensor de tensões do
fluido deve ser proporcional a parte simé-
trica do tensor de deformações, enquanto
que eq. (23) aparentemente contradiz o
postulado pela equação constitutiva. Note
que eq. (23) expressa as tensões viscosas como
função da vorticidade, ou mais especificamente,
da parte anti-simétrica do tensor de deforma-
ções.

A explicação provêm de bases cinemáticos. De
fato somente a parte simétrica do tensor de
deformações contribui para as tensões viscosas.
Porém, as derivados espaciais da parte anti-
simétrica do tensor de deformações (as derivadas
da vorticidade) estão identicamente relacionadas
com as derivados espaciais da parte simétrica
do tensor quando $\nabla \cdot \vec{V} \equiv 0$ e $\mu =$ constante.

Components of the Stress Tensor for Newtonian Fluids

Rectangular Coordinates (x, y, z)	Cylindrical Coordinates (r, θ, z)	Spherical Coordinates (r, θ, φ)
$\tau_{xx} = \mu\left[2\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right]$	$\tau_{rr} = \mu\left[2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right]$	$\tau_{rr} = \mu\left[2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right]$
$\tau_{yy} = \mu\left[2\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right]$	$\tau_{\theta\theta} = \mu\left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right]$	$\tau_{\theta\theta} = \mu\left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right]$
$\tau_{zz} = \mu\left[2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right]$	$\tau_{zz} = \mu\left[2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right]$	$\tau_{\varphi\varphi} = \mu\left[2\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot\theta}{r}\right) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right]$
$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right]$	$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$	$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$
$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right]$	$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right]$	$\tau_{\theta\varphi} = \tau_{\varphi\theta} = \mu\left[\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\varphi}{\sin\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi}\right]$
$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left[\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right]$	$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu\left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right]$	$\tau_{\varphi r} = \tau_{r\varphi} = \mu\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\varphi}{r}\right)\right]$
$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$

Momentum Equations for a Newtonian Fluid with Constant Density (ρ) and Constant Viscosity (μ)

Rectangular Coordinates (x, y, z):

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = \mu\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = \mu\left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right] - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \mu\left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

Cylindrical Coordinates (r, θ, z):

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) = \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

Spherical Coordinates (r, θ, φ):

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r}\right)$$

$$= \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r)\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \sin\theta) - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2\cot\theta}{r}\right)$$

$$= \mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \sin\theta)\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right] - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi}{r}\cot\theta\right)$$

$$= \mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\varphi \sin\theta)\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi}\right] - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \rho g_\varphi$$

6.7 A Função Dissipação para um Fluido Newtoniano

De posse da equação constitutiva para um fluido newtoniano, eq.(8), é possível escrever a função de dissipação viscosa

$$\Phi = \tau'_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \tau' : \nabla \vec{v} \qquad (24)$$

em termos do campo de velocidades. Substituindo eq. (8) na eq (24) têm-se

$$\Phi = (\lambda \nabla \cdot \vec{V}) \delta_{ij} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

$$= \lambda (\nabla \cdot \vec{V})^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)^2 \qquad (25)$$

Note que eq.(25) é sempre positiva, de acordo com a segunda lei da termodinâmica. A viscosidade não adiciona energia mecânica no sistema mas degrada-a de maneira irreversível. Em coordenadas cartesianos (x, y, z) eq.(25) toma a forma:

$$\Phi = \underbrace{\lambda (\nabla \cdot \vec{V})^2}_{\text{dilatação do volume}} + \underbrace{2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]}_{\text{dilatação linear de cada dimensão}}$$

$$+ \underbrace{\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]}_{\text{deformação angular}} \qquad (26$$

THE EQUATION OF ENERGY IN TERMS OF THE TRANSPORT PROPERTIES

(for Newtonian fluids of constant ρ and k)

with viscous dissipation terms included)

Rectangular coordinates:

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} + v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) = k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]$$

$$+ 2\mu\left\{\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right\} + \mu\left\{\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2\right\} \qquad (A)$$

Cylindrical coordinates:

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) = k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]$$

$$+ 2\mu\left\{\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right)\right]^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right\} + \mu\left\{\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)^2\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)^2 + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]^2\right\} \qquad (B)$$

Spherical coordinates:

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) = k\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}\right] + 2\mu\left\{\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right)^2\right\}$$

$$+ \mu\left\{\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]^2 + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right]^2\right.$$

$$\left. + \left[\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]^2\right\} \qquad (C)$$

Note: The terms contained in braces { } are associated with viscous dissipation and may usually be neglected, except for systems with large velocity gradients.

THE FUNCTION $-(\boldsymbol{\tau}:\nabla \boldsymbol{v}) = \mu\Phi_v$ FOR NEWTONIAN FLUIDS[a]

Rectangular

$$\Phi_v = 2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$+ \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right]^2 + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right]^2$$

$$- \frac{2}{3}\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right]^2 \qquad (A)$$

Cylindrical

$$\Phi_v = 2\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$+ \left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]^2 + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right]^2$$

$$+ \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right]^2$$

$$- \frac{2}{3}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right]^2 \qquad (B)$$

Spherical

$$\Phi_v = 2\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)^2\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right)^2\right]$$

$$+ \left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]^2$$

$$+ \left[\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]^2$$

$$+ \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right]^2$$

$$- \frac{2}{3}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right]^2 \qquad (C)$$

[a] These expressions are obtained by inserting the components of $\boldsymbol{\tau}$ from Tables 3.4-5,6,7 into the expression for $(\boldsymbol{\tau}:\nabla \boldsymbol{v})$ given in Appendix A. (See Tables A.7-1, 2, and 3.)

6.8 Condições de Contorno

As equações de Navier-Stokes formam um sistema de três equações diferenciais parciais não-lineares de segunda ordem. A não linearidade é introduzida pelos termos convectivos. Ela causa um caráter único nas equações de N-S porque para condições de contorno distintas aparecem soluções independentes, no sentido que elas não podem ser linearmente superpostas. Consequentemente não se conhece, até a presente data, uma solução geral das eq. N-S. Entretanto, soluções exatas para certos casos particulares das eq. N-S vêm sendo obtidas desde o século passado. Mais recentemente, com o desenvolvimento de algoritmos e de computadores mais eficientes, as soluções numéricas vêm aumentando o número de soluções conhecidas.

Devido ao fato das eq. N-S serem de natureza elíptica, as condições de contorno apropriadas são portanto as condições de Neumann ou Dirichlet. Fisicamente isto significa em ser necessário ter a informação da velocidade v_i ou da taxa de variação da velocidade $\partial v_i/\partial n_i$ para todo o contorno. A seguir é discutido alguns mecanismos físicos envolvidos no estabelecimento das condições de contorno

a) Interface Fluido-sólido

Dentro da aproximação de meio contínuo (a menor dimensão característica é muito maior que o caminho livre entre as moléculas) constatou-se, experimentalmente que a velocidade tangencial relativa entre o fluido adjacente a uma fronteira sólida, e a fronteira sólida é nula. Refere-se a esta constatação como condição de não deslizamento.

Para uma fronteira sólida estacionária:

$$\left(V_{fluido}\right)_{tangencial} = 0 \qquad (27)$$

Para uma fronteira sólida se movendo:

$$\left(V_{fluido}\right)_{tangencial} = \left(V_{solido}\right)_{tangencial} \qquad (2$$

A velocidade do fluido normal a fronteira sólida dependerá se esta fronteira é permeável ou não.
Para fronteiras impermeáveis:

$$\left(V_{fluido}\right)_{normal} = 0 \qquad (29$$

Para fronteiras permeáveis (meios porosos no interio

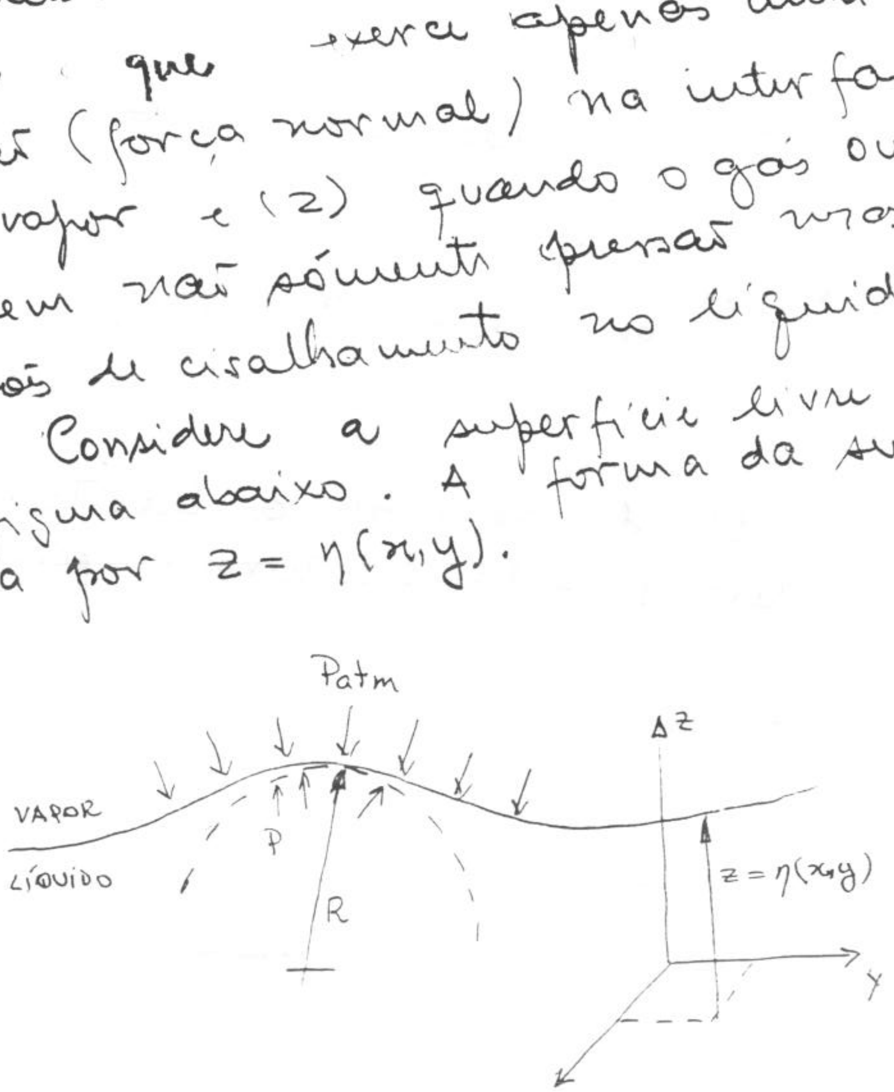
$$\left(V_{fluido}\right)_{normal} \neq 0 \qquad (30$$

fluido)$_{normal}$ é a velocidade do fluido normal
fronteira solida que pode ser avaliada atra-
és da secção ou injeção de fluido através do
meio poroso (fronteira sólida).

Interface Fluido - Fluido

Existem diversos problemas de escoamento onde o fluido, fase liquida, não é confinado por uma fronteira sólida mas por uma superfície livre exposta a uma atmosfera de um gás ou vapor. Dois casos devem ser destacados: (1) a ideal ou clássica superfície livre que exerce apenas uma conhecida pressão (força normal) na interface liquido-gás/vapor e (2) quando o gás ou vapor exercem não sómente pressão mas também tensões de cisalhamento no liquido.

Considere a superfície livre mostrada na figura abaixo. A forma da superfície é dada por $z = \eta(x,y)$.



Condições numa superfície
livre ideal.

É requerido que na superfície (1) as partículas do fluido fase-líquida acompanham a deformação da interface e (2) a pressão do fluido fase líquida devem equilibrar os efeitos de tensão superficial mais a pressão do gás/vapor. A condição (1) é especificada matematicamente requerendo que a velocidade vertical da partícula acompanha o movimento da superfície livre:

$$\omega(x,y,\eta) = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x} + v\frac{\partial \eta}{\partial y} \quad . \qquad (31)$$

A pressão de equilíbrio é expressa por

$$p(x,y,\eta) = p_a - \gamma_o\left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right) \qquad (32)$$

onde R_x e R_y são os raios de curvatura da superfície

$$\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} = \frac{(\partial^2\eta/\partial x^2) + (\partial^2\eta/\partial y^2)}{\left[1 + (\partial\eta/\partial x)^2 + (\partial\eta/\partial y)^2\right]^{3/2}} \qquad (33)$$

e γ é o coeficiente de tensão superficial da interface. As tensões tangenciais através da interface devem ser contínuas portanto a tensão de cisalhamento na interface fica sendo

$$\tau_{INTERFACE} \approx \left(\mu\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{liq.} \approx \left(\mu\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{vapor} \qquad (34)$$

Referências

[1] White, F.M.; "Viscous Fluid Flow", McGraw Hill (1974)

[2] Bird, R.B.; Stewart, W.E. e Lightfoot, E.N.; "Transport Phenomena", John Wiley & Sons (1960)

[3] Batchelor, G.K.; "An Introduction to Fluid Dynamics", Cambridge Un. Press (1967)

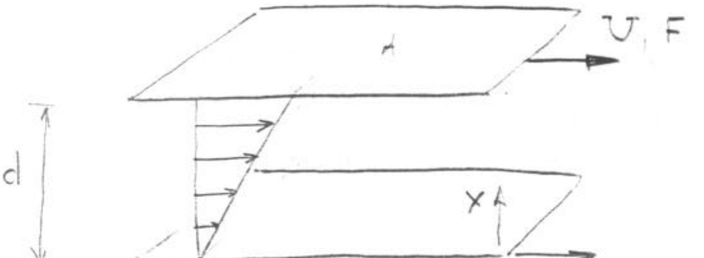
[4] Fung, Y.C.; "A First course in continuum Mechanics", Prentice Hall Inc.

7.0 Características dos Fluidos Não-Newtonianos.

Neste capítulo serão apresentados as principais características dos fluidos não-newtonianos.

7.1 Comparação entre Líquidos e Sólidos

Líquido é definido como um material que continuamente se deforma quando sujeito a uma tensão, independentemente da magnitude desta tensão.



$$\frac{F}{A} = \sigma = \mu \frac{U}{d}$$

Fig 1 - Escoamento cisalhante puro (Couetti) de um fluido Newtoniano

Para o escoamento descrito na Fig. 1, um fluido Newtoniano se deforma continuamente devido a aplicação da força F. Se marcarmos o fluido através de quatro pontos veremos que eles estão sujeitos a um estado de deformação pura, conforme definido no capítulo de Cinemática e, além disto, a sua taxa de deformação é diretamente proporcional a tensão aplicada, $\sigma_{yx} \equiv F/A = \mu \dot{\varepsilon}_{yx}$

Um sólido é definido como sendo um material que não se deforma continuamente quando sujeito a uma tensão, isto é, para uma dada tensão haverá uma deformação de carácter estacionário a qual poderá ou não ser atingida instantâneamente com a aplicação da tensão.

$\sigma = E\gamma$

Fig 2 Resultado da aplicação de uma tensão de cisalhamento σ a um bloco de um sólido Hookeano. Após a aplicação da tensão, o material com secção ABCD se deforma para A'B'C'D'

Para a deformação descrita na Fig. 2, um sólido Hookeano se deforma instantâneamente de um ângulo γ quando está sujeito a uma tensão de cisalhamento aplicada a sua superfície. Uma vez que o estado de deformação é atingido não há mais movimento relativo e o estado de deformação persiste enquanto a tensão σ durar. O ângulo γ é chamado de deformação e a tensão aplicada está linearmente relacionada com γ através do módulo de elasticidade E do material,

$\sigma = E\gamma$ que é também conhecida como lei de Hooke.

O comportamento elástico/linear para sólidos (lei de Hooke) e viscoso/linear para líquidos (lei de Newton) não é suficiente para descrever o comportamento de todos os líquidos e sólidos. Isto se deve a duas características: i) A relação entre tensão e deformação não é linear e ii) líquidos e sólidos podem apresentar um comportamento elástico e viscoso simultaneamente. A ciência da reologia estuda particularmente este tipo de material. Deve-se destacar entretanto que os extremos desta área, sólidos elásticos Hookeanos e líquidos viscosos Newtonianos estão fora de seu escopo. Por exemplo, mecânica fluidos Newtonianos baseada na equação de Navier-Stokes não é considerada um ramo da reologia assim como a teoria clássica de elasticidade.

2 Característica e classificação de Fluidos não-Newtonianos

De acordo com a definição dada na secção 6.3, a tensão de cisalhamento τ para um fluido Newtoniano é linearmente relacionada com a taxa de deformação Δ_{ij} através da viscosidade μ.

Para o escoamento de Couette,

$$\tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (1)$$

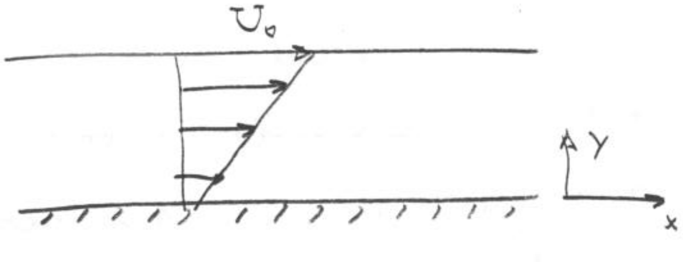


Fig. 3 Escoamento de Couette entre duas placas paralelas

Note que para este escoamento, $\frac{\partial u}{\partial y} = \Delta_{yx}$ isto é, o gradiente de velocidades na direcção x é a única componente não nula do tensor de deformação do fluido, Δ_{ij}.

Sendo este tipo de escoamento, onde há um único modo de deformação presente, suficiente p/ descrever as características dos fluidos não-Newtonianos, a notação indicial para o tensor de deformação será substituída por $\dot{\gamma}$. Assim subentende-se que:

$$\dot{\gamma} = \Delta_{YX} = \frac{\partial u}{\partial y} , \qquad (2)$$

isto é, a taxa de deformação YX é $\dot{\gamma}$ e também que γ é a deformação. Deste modo pode-se escrever a eq (1) como

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \qquad (3)$$

Os fluidos não-Newtonianos não obedecem a relação linear da eq (3). Por questões didáticas, eles serão agrupados em quatro categorias distintas:

i) A mais simples destas são os fluidos Newtonianos independentes do tempo. A tensão de cisalhamento é uma função única, mas não linear da taxa de deformação.

ii) Fluidos não-Newtonianos dependentes do tempo possuem uma relação mais complexa entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação. A tensão de cisalhamento depende da duração que ela atua no fluido e de sua taxa de deformação.

iii) Em fluidos viscoelásticos, a tensão de cisalhamento está relacionada com a taxa de deformação $\dot{\gamma}$ assim como com a deformação γ. Diferentemente de um líquido verdadeiramente viscoso, no qual toda energia de deformação é dissipada, parte da energia de deformação de um fluido viscoelástico pode ser recuperável tal qual a deformação de um sólido elástico.

iv) Fluidos reológicos complexos são fluidos que exibem uma relação entre τ e $\dot{\gamma}$ onde mais de uma das categorias i), ii) e iii), acima listadas, estão presentes.

Em contra-posição a eq. (3) para fluidos Newtonianos pode-se escrever sua análoga para fluidos não-Newtonianos:

$$\tau = \eta \, \dot{\gamma} \qquad (4)$$

onde η é a viscosidade aparente. Neste caso η não é uma constante mas uma função da taxa de deformação $\dot{\gamma}$, da deformação, da tensão e do tempo de duração,

$$\eta = \frac{\dot{\gamma}}{\tau} = \eta(\dot{\gamma}, \gamma, \tau, t). \qquad (5)$$

7.3 Fluidos não Newtonianos independentes do Tempo

Para fluidos não-Newtonianos independentes do tempo,

$$\eta = \eta(\dot{\gamma}, \tau) \qquad (6)$$

Um fluido Newtoniano é simplesmente um caso especial da eq. (6) onde η é uma constante, que para este caso é a viscosidade dinâmica do fluido. A maioria dos fluidos não newtonianos pertencem a esta categoria, e em alguns casos, os fluidos não pertencentes a esta categoria, tal como fluidos que dependem do tempo, podem ser aproximados através da eq (6).

Os fluidos não-Newtonianos independentes do tempo são comumente representados por três distintos modelos como mostra a Fig. 4, eles são:

(1) Fluido de Bingham

(2) Fluido Pseudo-plástico ou "shear thinning"

(3) Fluido Dilatante ou "shear thickning"

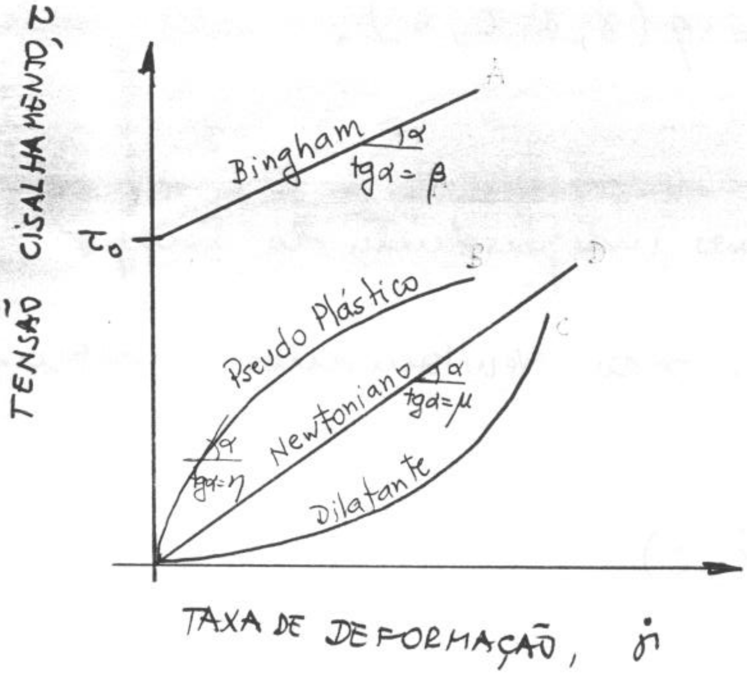


Fig4 - Comportamento característico entre τ e $\dot{\gamma}$ para fluidos não-Newtonianos independentes do tempo.

(1) Fluido de Bingham

Os fluidos de Bingham exibem uma tensão de escoamento τ_0, com uma taxa de deformação zero seguido por uma relação linear entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação. Estes fluidos são definidos por duas constantes: a tensão de escoamento τ_0 a qual é o valor que a tensão no líquido tem que atingir para o fluido escoar e a viscosidade β que é a inclinação da porção reta da curva A na Fig. 4; Também [illegible] coeficiente de rigidez ou coeficiente de viscosidade plástica. A equação para um fluido de Bingham é então:

$$\tau - \tau_0 = \beta \dot{\gamma} \qquad \text{para } \tau \geq \tau_0 \qquad (7)$$

$$\text{e} \quad \dot{\gamma} = 0 \qquad \text{para } \tau < \tau_0$$

onde τ_0 é a tensão de escoamento e β é o coeficiente de viscosidade plástica. Equação (7) também pode ser escrita em termos da viscosidade aparente,

$$\eta = \beta + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} \qquad \text{para } \tau \geq \tau_0 \qquad (8)$$

$$\text{e} \quad \eta = \infty \qquad \text{para } \tau < \tau_0 .$$

Note que tanto a eq (7) como eq (8) mostram que para tensões no líquido menores que τ_0 não há movimento relativo no fluido, isto é, ele se comporta como um corpo sólido.

O modelo de Bingham pode representar o comportamento de vários fluidos não-Newtonianos tais como lamas, plásticos fundidos, tintas e suspensões de sólidos finos em líquido. Devido ao caracter linear entre a tensão e deformação, o modelo de Bingham se mostra bastante conveniente para formulações analíticas.

Para finalizar, deve-se mencionar que, apesar do modelo de Bingham representar bem uma determinada classe de fluidos não-Newtonianos, não há nenhuma evidência convincente que algum fluido exiba exatamente o comportamento do fluido de Bingham quando a taxa de deformação for muito pequena, além disto, parece improvável que algum fluido suportaria uma tensão cisalhante por um tempo indefinido quando em repouso.

(2) Fluidos Pseudo-Plásticos ou "shear thinning"

Fluidos Pseudo-Plásticos, curva B Fig 4, não possuem uma tensão de escoamento τ_o, eles são caracterizados por uma razão sempre decrescente entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação.

Em geral, a elevadas taxas de deformação assim como em baixas taxas de deformação a viscosidade aparente é constante isto é, o fluido apresenta um comportamento Newtoniano, entretanto para valores intermediários de $\dot{\gamma}$ a viscosidade aparente η é sempre decrescente, conforme mostra Fig.5

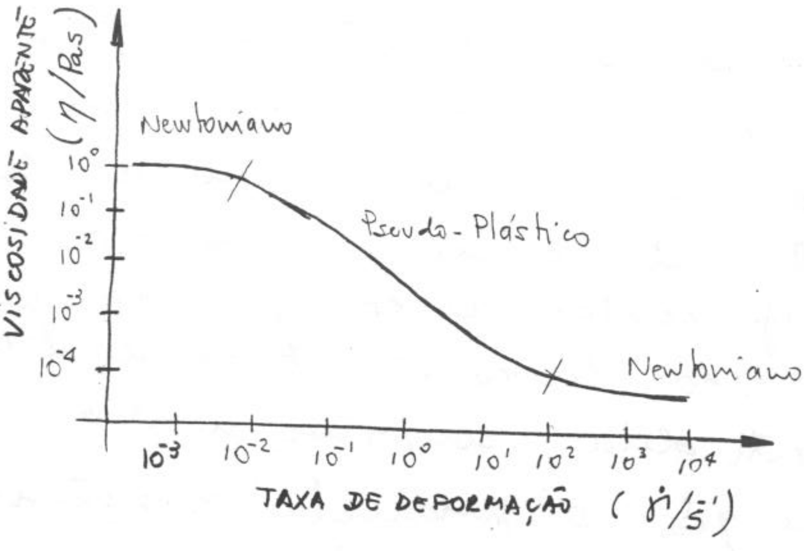


Fig. 5 – Comportamento típico de um fluido Pseudo-Plástico.

Existem várias relações empíricas para representar fluidos pseudo-plásticos. A mais simples destas é conhecida como a lei de potência, "power law", desenvolvida por Ostwald-de Waele,

$$\tau = m\,\dot{\gamma}^{n} \quad , \quad n < 1 \tag{9}$$

ou em termos da viscosidade aparente,

$$\eta = m\,\dot{\gamma}^{n-1} \quad ; \quad n < 1 \tag{10}$$

Equações (9) e (10) possuem dois parâmetros que devem ser ajustados de acordo com o fluido, m tem dimensões de $(Pa.s^n)$ e n é adimensional sempre menor que a unidade.

Note que quando a taxa de deformação $\dot{\gamma}$ é zero, a viscosidade aparente é infinita. Esta é uma das várias objeções contra o uso do modelo de Ostwald. Evidentemente a lei de potência de n não pode representar o comportamento real do fluido para toda faixa de taxa de deformação mas parte dela, conforme mostra Fig.5. Outro problema é que o parâmetro n não é constante para toda faixa de $\dot{\gamma}$ assim como o valor do parâmetro m apresenta uma dependência com n. Entretanto o modelo de Ostwald é extensivamente utilizado em problemas industriais devido a sua simplicidade analítica e também pela sua boa capacidade de representação do comportamento real do fluido.

A fim de superar as deficiências do modelo de Ostwald, principalmente nas regiões limites qdo $\tau \to 0$ e $\tau \to \infty$, foram desenvolvidos diversos modelos com três ou quatro parâmetros, dentre eles pode-se citar:

Spriggs

$$\begin{cases} \eta = \eta_0 & (\dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_0) \\ \eta = \eta_0 \left(\dot{\gamma} / \dot{\gamma}_0 \right)^{n-1} \end{cases} \qquad (11)$$

onde $\dot{\gamma}_0$ é o valor de $\dot{\gamma}$ aonde η começa a decrescer

Eyring - Powel

$$\eta = \eta_\infty + \frac{(\eta_0 - \eta_\infty) \sinh^{-1}(m \dot{\gamma})}{m \dot{\gamma}} \qquad (12)$$

onde η_0 e η_∞ representam respectivamente a viscosidade aparente do fluido qdo $\tau \to 0$ e $\tau \to \infty$ e m é uma terceira constante característica p/ cada fluido.

Cross
$$\frac{\eta-\eta_\infty}{\eta_0-\eta_\infty} = \frac{1}{(1+(m\dot{\gamma})^n)} \tag{13}$$

onde η_0 e η_∞ referem-se aos limites assintóticos da viscosidade aparente p/ $\tau \to 0$ e $\tau \to \infty$ respectivamente.

Exemplos de fluidos que apresentam um comportamento Pseudo-Plástico incluem: soluções poliméricas tais como borracha, acetato de celulose, suspensões tais como tintas, maionese, polpa de papel, lamas; e suspensões diluídas de sólidos inertes em suspensão.

(3) Fluidos Dilatantes ou "shear thickning"

Fluidos Dilatantes são similares aos fluidos Pseudo-Plásticos no aspecto que eles não possuem também uma tensão de escoamento τ_0. Entretanto eles diferem dos pseudo-plásticos no sentido que sua viscosidade aparente aumenta com o aumento da taxa de deformação. Poucos são os fluidos reais que exibem o comportamento dilatante. Tal qual os fluidos pseudo-plásticos, eles também podem ser representados pela lei de potência onde o expoente n, empregado na eq.(9), é maior do que a unidade.

A lei de potência pode ser representada, de maneira mais evidente, plotando o logaritmo da tensão de cisalhamento versus o logaritmo da taxa de deformação, como mostra a fig. 6.

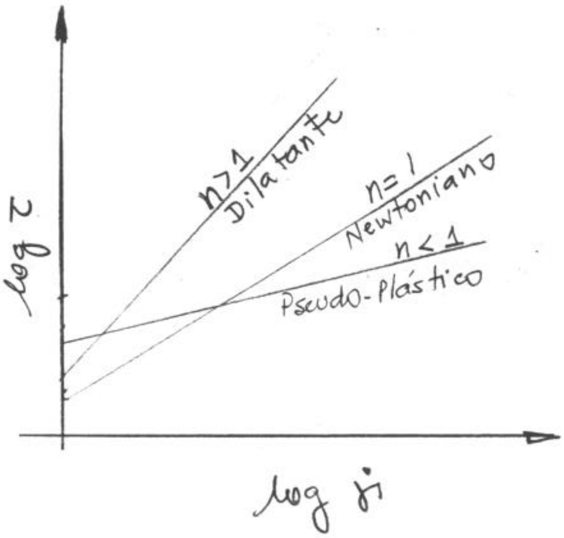


Fig 6 - Representação log-log de fluidos que seguem a lei de potência.

Exemplos de fluidos que exibem comportamento dilatante são: suspensões de pigmento de tinta, usados na indústria automobilística, quando o conteúdo de sólidos da suspensão é alto, maizena, silicato de potássio, goma arábica em água, areia úmida, isto é, com água presente o suficiente para preencher os espaços intersticiais apenas. Resinas vinílicas apresentam um comportamento pseudo-plástico a baixas taxas de deformação e um comportamento dilatante a altas taxas de deformação.

7.4 Fluidos dependentes do Tempo

A implicação de que uma dada taxa de deformação resulta em uma correspondente tensão de cisalhamento, cujo valor é constante desde que o valor de $\dot{\gamma}$ seja, não é válida para todos os tipos de fluidos. A tensão de cisalhamento, consequentemente a viscosidade aparente, pode aumentar ou diminuir com o tempo de duração da taxa de deformação. Tais mudanças podem ser reversíveis ou irreversíveis.

De acordo com a definição aceita, fluido Tixotrópico é aquele que viscosidade aparente do fluido apresenta um gradual decréscimo quando sujeito a uma tensão de cisalhamento e é seguido por uma gradual recuperação da viscosidade aparente quando a tensão de cisalhamento é retirada. O efeito oposto, muito menos comum de ocorrer, é chamado de fluido Reopético, isto é, a viscosidade aparente aumenta com o tempo.

A viscosidade aparente dos fluidos Tixotrópicos depende da duração da deformação assim como da taxa de deformação. Quando o fluido é deformado a partir de um estado de repouso, a deformação causa uma quebra, em escala molecular, da estrutura do fluido, subsequentemente há uma "reforma" estrutural, a nível molecular, a medida em que o tempo cresce. Uma situação de equilíbrio é, eventualmente, alcançada, quando a taxa de quebra estrutural é igual a taxa de "reforma". Se a deformação cessar, o fluido reconstroi sua estrutura original e recupera sua viscosidade aparente inicial.

A Fig. 7 ilustra o comportamento esperado de fluidos tixotrópicos inelásticos em dois tipos de testes: o primeiro envolve uma variação abrupta na taxa de deformação e o segundo um ciclo fechado onde a taxa de deformação é aumentada continuamente e linearmente do instante zero até um valor máximo e então diminuida da mesma forma.

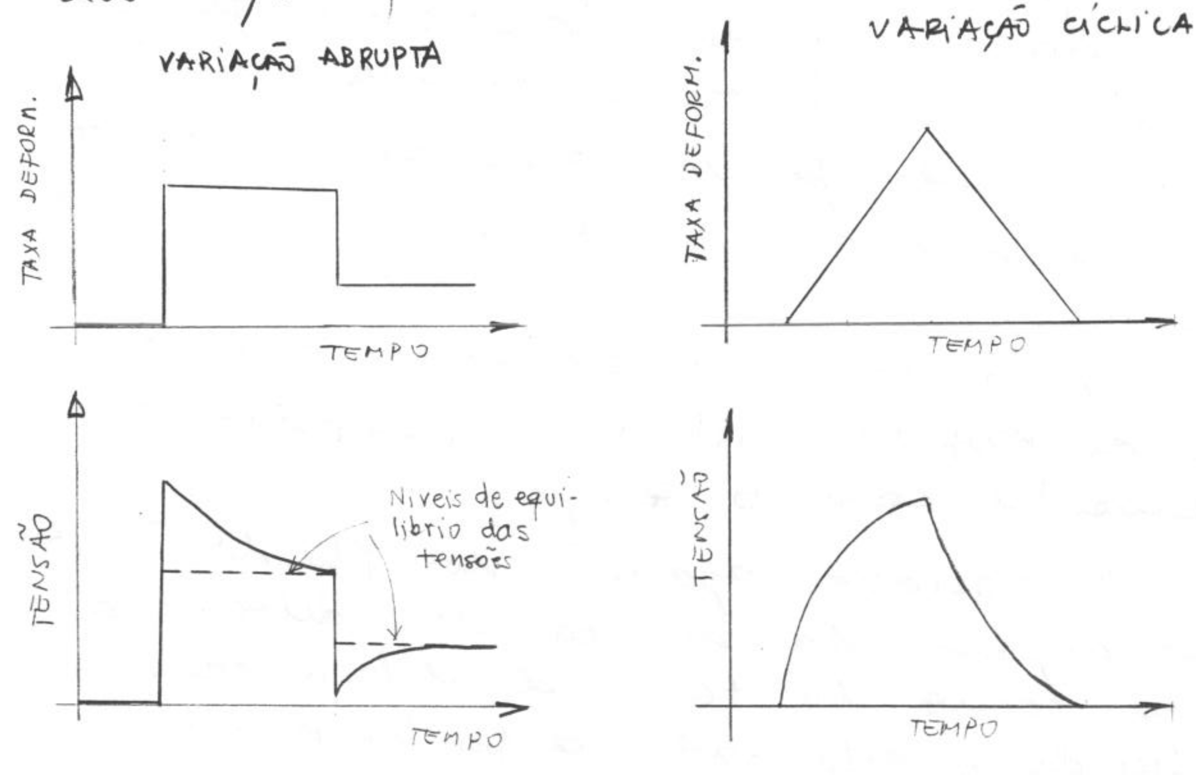
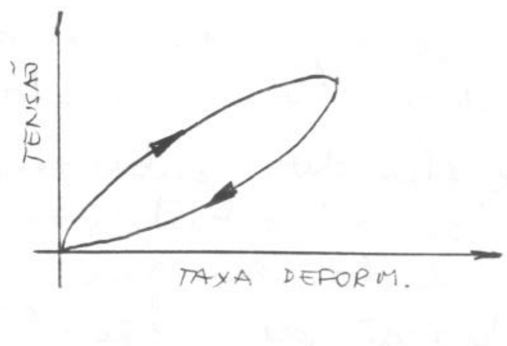


Fig.7- Representação esquemática da resposta de um fluido Tixotrópico inelástico sujeito a diferentes históricos da taxa de deformação x tempo.



Note que, baseado na Fig.7, a ocorrência de tixotropia implica que a história do escoamento seja considerada para que se possa fazer predições sobre o comportamento do escoamento. Por exemplo, a análise do escoamento de um material tixotrópico ao longo de um tubo é complexa pelo fato que a viscosidade aparente pode variar com a distância que o fluido percorre no tubo.

Exemplo de fluidos tixotrópicos são: soluções gelatinosas, maionese, margarina, mostarda, mel, creme de barbear, tintas. Em particular para tintas, o comportamento tixotrópico é bastante desejável. Isto porque quando sujeitas a uma alta taxa de deformação submetida pelo pincel durante a aplicação, a viscosidade aparente é reduzida de modo que a tinta possa recobrir a superfície suavemente. Uma vez aplicada na superfície e permanecendo por um curto período sem tensão aplicada, o filme de tinta recupera a sua alta viscosidade reduzindo assim a sua tendência a "escorrer" em superfícies verticais. Também é conhecido que óleos minerais e vegetais além de exibirem um comportamento não linear tensão - taxa de deformação também exibem um comportamento tixotrópico quando submetidos a elevadas taxas de deformação.

7.5 Fluidos Viscoelásticos

Um fluido viscoelástico exibe características elásticas e viscosas. O modelo mais simples desta classe de fluidos é considerando que o fluido seja Newtoniano com relação a viscosidade e obedeça a lei de Hooke com relação a elasticidade. Em modelos mecânicos uma deformação elástica (lei de Hooke) é representada por uma mola (um elemento em que a força é proporcional a deformação) e um escoamento Newtoniano por um amortecedor (um elemento em que a força é proporcional a taxa de deformação), conforme mostra Fig. 8.

Fig. 8 - Representação esquemática do comportamento ideal de um fluido viscoelástico linear: a) Mola Hookeana; b) Amortecedor Newtoniano.

O modelo de Maxwell resulta da combinação em série de uma mola com um amortecedor, veja Fig. 9

Fig. 9 Modelo linear viscoelástico de Maxwell.

Neste caso, a tensão sofrida pela mola é a mesma sofrida pelo amortecedor, eq (14) e (15)

$$\sigma = E\,\gamma_E \tag{14}$$

$$\sigma = \eta\,\dot{\gamma}_V \tag{15}$$

sabendo-se que $\dot{\gamma}$ é a taxa de deformação total do sistema mola amortecedor,

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_E + \dot{\gamma}_V \,, \tag{16}$$

a tensão no sistema pode então ser escrita por

$$\sigma + \left(\frac{\eta}{E}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \eta\,\dot{\gamma} \tag{17}$$

a constante (η/E) tem dimensão de tempo e usualmente refere-se a ela como tempo de relaxamento τ_M, assim o modelo de Maxwell fica

$$\sigma + \tau_M \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \eta\,\dot{\gamma} \,. \tag{18}$$

Se uma particular taxa de deformação $\bar{\gamma}$ for aplicada num instante $t=0$ e mantida constante p/ $t>0$, então

$$\sigma(t,\bar{\gamma}) = \eta\,\bar{\gamma}\left(1 - \exp(-t/\tau_M)\right) \tag{19}$$

O que implica que quando a taxa de deformação $\bar{\gamma}$ é aplicada a tensão de cisalhamento começa a aumentar progressivamente conforme um sistema de primeiro grau, veja Fig. 10.

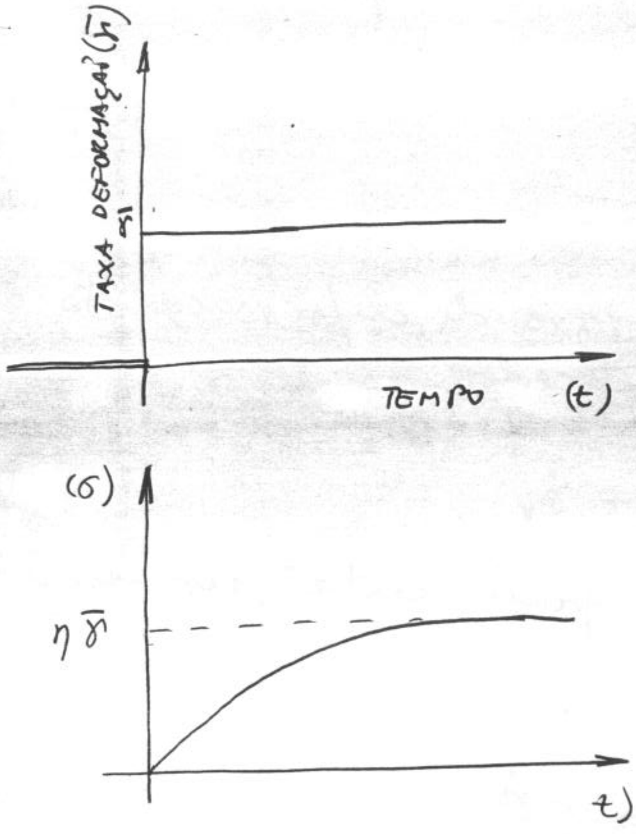


Fig. 10 Representação da taxa de deformação e da tensão de cisalhamento p/ o modelo de Maxwell.

O comportamento elástico ou viscoso que um fluido viscoelástico pode apresentar depende fundamentalmente do tempo característico do fluido τ_M e do tempo característico do escoamento, t_E. A razão entre estes dois tempos característicos é chamado de número de Deborah,

$$De = \tau_M / t_E . \qquad (20)$$

O tempo característico do escoamento é usualmente tomado como o intervalo de tempo durante o qual um elemento típico do fluido experimenta uma significante sequência de eventos cinemáticos.

Se o escoamento se dá em regime permanente o tempo característico do escoamento é tomado como sendo o inverso da taxa de deformação característica. Na Fig. 11 é mostrado três escoamentos em regime permanente e os seus tempos característicos associados ao escoamento

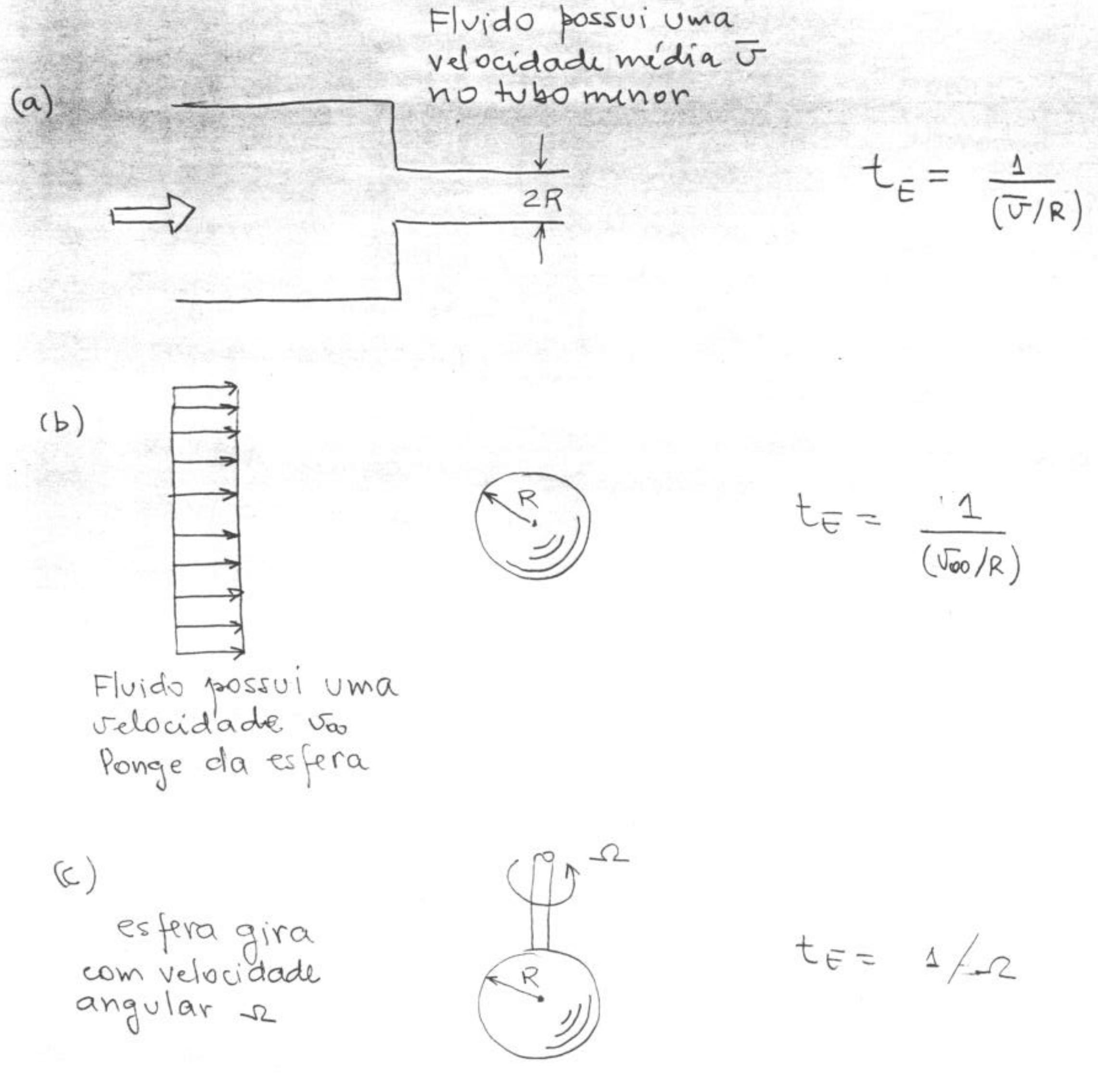


Fig. 11 Três escoamentos ilustrando a definição de t_E.

Retornando a definição tempo característico do fluido, note que para um sólido elástico Hookeano, τ_M é infinito enquanto que para um líquido viscoso Newtoniano τ_M é zero. De fato, água em estado líquido τ_M é tipicamente da ordem de 10^{-12} s enquanto que para óleos lubrificantes que passam

através de altas pressões encontradas em dentes de
engrenagens, τ_M pode ser da ordem de 10^{-6} s e
para polímeros usado no processamento de plásticos
τ_M pode ser da ordem de alguns segundos.

Então alto número de Deborah corresponde
a um comportamento equivalente a um sólido, isto
é, a componente elástica é muito superior a
componente viscosa. Em contrapartida, baixo
número de Deborah corresponde ao comportamento
de um líquido. Um material pode portanto
comportar-se como um sólido se ele possuir
um tempo característico muito elevado ou se
o processo de deformação a que ele está sujeito
for muito rápido. Então, mesmo líquidos que
fluem com facilidade e com baixo tempo
característico podem se comportar como sólidos
se o processo de deformação for muito rápido.
Isto pode acontecer quando um óleo lubrificante
passa através de engrenagens.

Para finalizar deve-se citar efeitos da tensão
normal apresentada pelos fluidos viscoelásticos.
Em teoria estes efeitos não restritos apenas aos
fluidos viscoelásticos entretanto na prática consta-
tou-se a existência deste somente com fluidos
viscoelásticos.

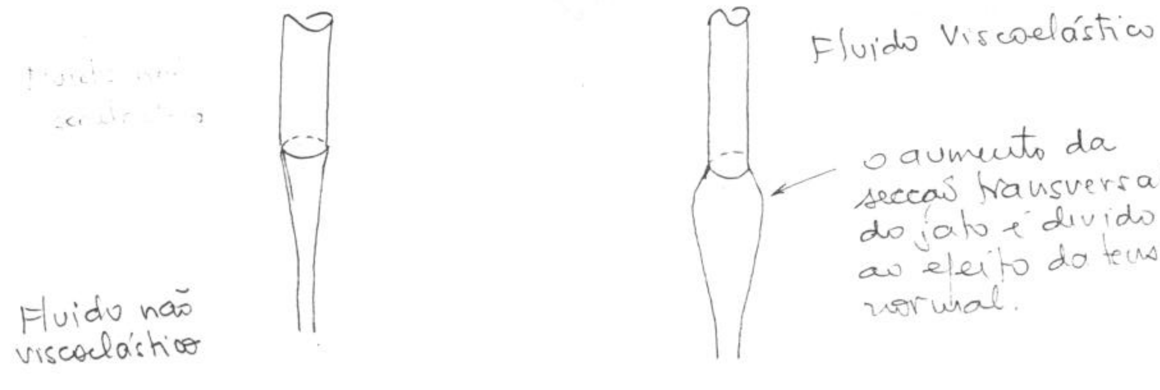
Os coeficientes de tensão normal Ψ_1 e Ψ_2 são
definidos por

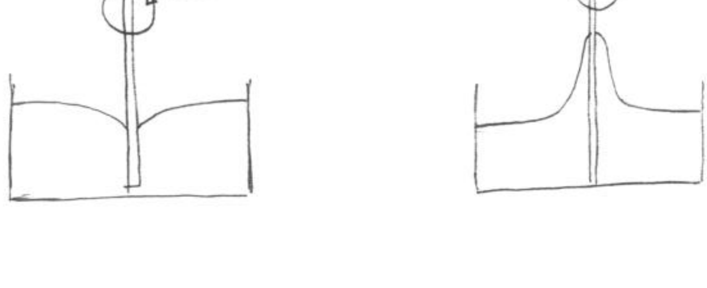
$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \Psi_1(\dot{\gamma})\,\dot{\gamma}^2 \qquad (21)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{zz} = \Psi_2(\dot{\gamma})\,\dot{\gamma}^2 \qquad (22)$$

As funções Ψ_1 e Ψ_2 são conhecidas como o primeiro
e o segundo coeficiente de tensão normal.

Se um fluido viscoelástico estiver escoando em regime permanente através de um tubo circular as três componentes da tensão normal, mutuamente perpendiculares não serão iguais. Isto é uma diferença significativa para o caso de um líquido não-viscoelástico, para o qual as três componentes da tensão normal serão iguais a pressão hidrostática. Se o efeito viscoelástico for suficientemente grande, o jato emergente de um tubo irá aumentar de diâmetro ao invés de contrair, veja Fig. 12. Outra demonstração dos efeitos da tensão normal é o efeito "Weissenberg", isto é, a ascenção de um fluido viscoelástico por um eixo em rotação no fluido. Nesta situação o nível do fluido não-viscoelástico abaixaria próximo ao eixo devido a ação da força centrífuga.





Referências

[1] Barnes, H. A; Hutton, J.F e Walters, K.; "An Introduction to Rheology" 1989, Elsevier Science Publ.

[2] Lodge, A.S. : "Elastic Liquids", Academic Press (1964)

[3] Bird, R.B ; Armstrong, R.C. e Hassager, O. : "Dynamics of Polimeric Liquids - vol 1", John Wiley & Sons (1987)

[4] Metzner, A.B. : "section 7 in Handbook of Fluid Dynamics (V.L. Streeter, ed.)", McGraw Hill (1961)

[5] Bird, R.B ; Stewart, W.E e Lightfoot, E.N. : "Transport Phenomena", John Wiley (1960)

EM 846 - LABORATÓRIO DE CALOR E FLUIDOS

DETERMINAÇÃO DA VISCOSIDADE: MÉTODO DE STOKES & COPO FORD

UNICAMP

1. INTRODUÇÃO

A viscosidade é uma das variáveis que caracteriza reologicamente uma substância. Num amplo sentido entende-se por propriedade reológica aquela que especifica a deformação e ou a taxa de deformação que uma substância apresenta quando sujeita a uma tensão.

Dependendo do comportamento reológico da substância pode-se classificá-la em puramente viscosa ou elástica. Esta classificação baseia-se em modelos lineares que relacionam a deformação à tensão aplicada no material. O para líquidos deve-se a Sir Isaac Newton (1642-1727) Eq. (1a), e o modelo para sólidos a Robert Hooke (1635-1703) , Eq. (1b):

$$\underbrace{\tau = \mu \cdot [\text{taxa de deformação}]}_{\text{Fluido Newtoniano}} \qquad (1a)$$

$$\underbrace{\tau = G \cdot [\text{deformação}]}_{\text{Sólidos} \quad \text{Hookeanos}}, \qquad (1b)$$

onde μ é denominado de viscosidade dinâmica e possui unidades [Pa.s ou kg/s/m] e G é a constante de Lamé (G. Lamé 1852) com unidades em [Pa]. Estes dois modelos expressam uma importante diferença entre um fluido e um sólido: o fluido, estando sujeito a uma tensão, se deforma continuamente; o sólido não. Em outras palavras, forças aplicadas em sólidos causam deformações e forças aplicadas em fluidos causam o escoamento. Daí a necessidade de expressar a tensão num líquido proporcional à sua taxa temporal de deformação (comportamento viscoso) e para o sólido somente com deformação (comportamento elástico). A Fig. 1a ilustra um fluido se deformando contínuamente sob ação da tensão T. Paralelamente na Fig. 1b está representado um sólido que exibe uma deformação fixa para cada tensão aplicada.

Os modelos se constituem quando a taxa de deformação ou a deformação são especificadas. Considere o um retângulo ABCD com lados Δx e Δy, representado na Fig. 2, como um elemento infinesimal. Ao ser submetido a uma tensão na face BC, o ponto B se desloca para B' e o C para C'. A deformação, definida pelo ângulo γ formado por BAB' , é devido ao *movimento relativo* dos pontos B e B' em relação ao ponto A, aqui tomado como referência.

Para Δx e Δy infinitezimais, a deformação, expressa em função dos segmentos, é mostrada na Eq. (2)

$$\tan\gamma \cong \gamma = \frac{BB'}{AB}. \qquad (2)$$

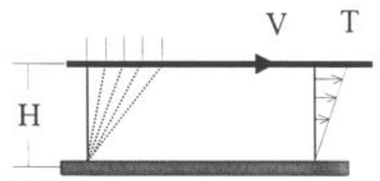


Fig. 1a - Fluido entre uma placa estacionária e outra que se desloca com velocidade constante V devido à tensão aplicada. O fluido se deforma continuamente devido ao movimento relativo entre partículas. Seu perfil de velocidades é linear.

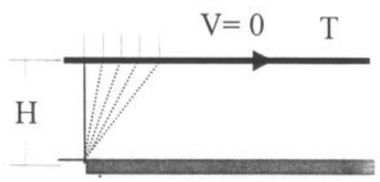


Fig. 1b - Sólido sujeito a uma tensão aplicada em sua face superior. Diagrama ilustra as deformações em função da tensão aplicada. Em equilíbrio, não há movimento relativo entre as partículas.

i) Aplicação Eq. (2) para Fluidos:

O segmento BB' se deforma continuamente. Tomando por u a velocidade e Δt o lapso de tempo, então:

$$BB' = \left(\frac{du}{dy}\Delta y\right) \cdot \Delta t\,, \qquad (3)$$

substituindo-se Eq. (3) na Eq.(2) tem-se que a *taxa de deformação* para o fluido é:

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy} \qquad (4)$$

ii) Aplicação Eq. (2) para Sólidos:

O segmento BB' não se deforma continuamente. Tomando por u o deslocamento dos pontos, o deslocamento relativo do ponto B em relação ao ponto A é:

$$BB' = \left(\frac{du}{dy} \Delta y \right), \qquad (5)$$

substituindo-se Eq. (5) na Eq.(2) tem-se que a deformação para o sólido é:

$$\gamma = \frac{du}{dy} \qquad (6)$$

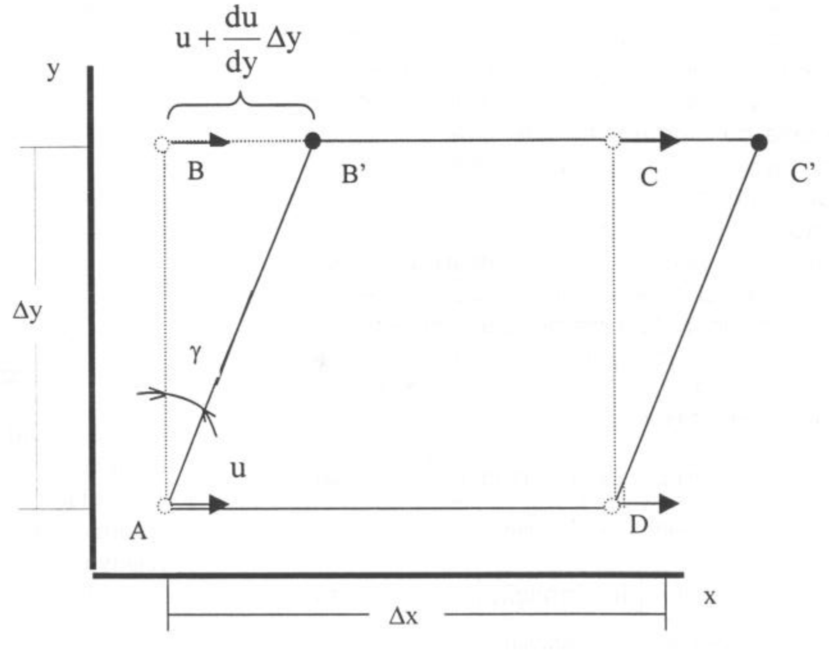


Fig. 2 – Deformação do elemento ABCD → AB'C'D

A extensão destes modelos para um estado de tensão tri-dimensional é conhecida como equação constitutiva do material. Ela, de fato, é um <u>*modelo*</u> que relaciona deformação com tensão para sólidos Hookenos ou fluidos Newtonianos. Expressa em notação indicial, a equação constitutiva é dada por :

$$\tau_{ij} = \lambda \cdot D_{ij} \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot D_{ij}, \qquad (7)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker; D_{ij} é o tensor das deformações definido na Eq. (8) (sólido ou fluido); u, v e w são vetores paralelos as direções x,y,z e representam velocidades ou deformações, dependendo se a matéria for um fluido ou sólido. Finalmente λ e μ são parâmetros que dependem da temperatura e expressam, tanto para fluidos como para sólidos, uma relação linear entre o tensor de deformações e o campo de tensão. Além disto, eles impõem um comportamento isotrópico no tensor das tensões, isto é: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{yx} & D_{zx} \\ D_{xy} & D_{yy} & D_{zy} \\ D_{xz} & D_{yz} & D_{zz} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (8)$$

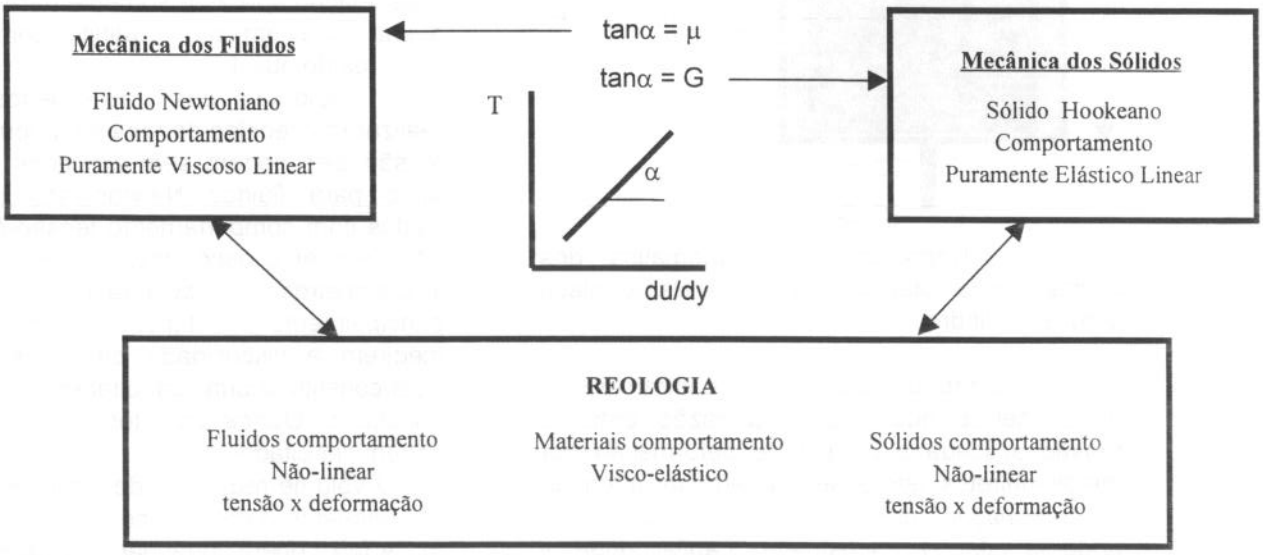
Os parâmetros λ e μ são conhecidas por diferentes nomes quando a equação constitutiva é aplicada para líquido ou sólido, veja tab. 1.

Tabela 1 – Nomes e unidades dos parâmetros μ e λ.

FLUIDOS NEWTONIANOS				
μ	Primeiro coef. de Viscosidade ou viscosidade dinâmica	Viscosidade Dinâmica	Pa.s ou $N.s/m^2$	Experimental
λ	Segundo Coef. de Viscosidade		Pa.s ou $N.s/m^2$	$\lambda = (2/3)\mu$ modelo
SÓLIDOS HOOKEANOS				
μ	Coef. De Lamé conhecido por G	$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ E - módulo Young ν - coef. de Poisson	Pa ou N/m^2	Experimental
λ	Coef. de Lamé	$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)}$ E - módulo Young ν - coef. de Poisson	Pa ou N/m^2	Experimental $\nu \cong (1/4)$ e $\lambda = G$

Com finalidades didáticas as áreas de mecânica dos fluidos e de mecânica dos sólidos são apresentadas como se derivassem de fundamentos distintos. De fato isto não ocorre, por estranho que isto possa parecer ! Ambas as áreas estão fundamentadas em conceitos de mecânica dos meios contínuos (Fung). Os coeficientes de Lamé possuem direta semelhança com os coeficientes de viscosidade que em ambos os casos relacionam tensão com deformação, veja Eq. (7) e Tab. 1.

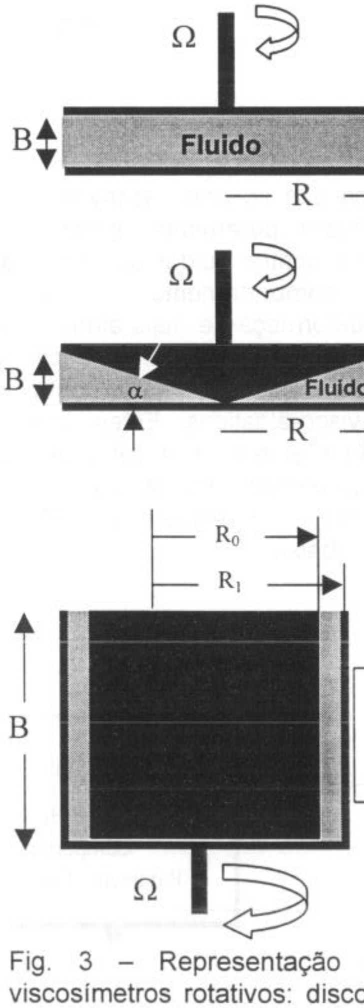
Normalmente os cursos introdutórios em mecânica dos fluidos desenvolvem seus conceitos principalmente em fluidos Newtonianos. Paralelamente os cursos de mecânica dos sólidos desenvolvem aplicações para sólidos puramente elásticos. Entretanto pode-se encontrar fluidos ou sólidos que exibem um comportamento não linear tensãoxdeformação e mais ainda, materiais que se apresentam com características viscosas e elásticas simultaneamente, conhecidos como fluidos visco-elásticos. Estes comportamentos observados extendem a definição de sólidos e fluidos e constitui uma ativa área de pesquisa, (Bird 1987), conhecida como Reologia, veja digrama abaixo.



2. VISCOSÍMETROS & UNIDADES

Viscosímetros são instrumentos utilizados para medida de viscosidade. Eles podem ser classificados em dois grupos: primário e secundário.

No grupo primário enquandram-se os instrumentos que realizam uma medida direta da taxa de deformação e tensão aplicados na amostra de fluido. Diversos arranjos podem ser concebidos para este fim entre eles os discos rotativos, placa e cone rotativos e cilindros rotativos estão mostrados na Fig. 3. O simbolo Ω refere-se a rotação aplicada e T ao torque medido devido a tensão oriunda da deformação do fluido.



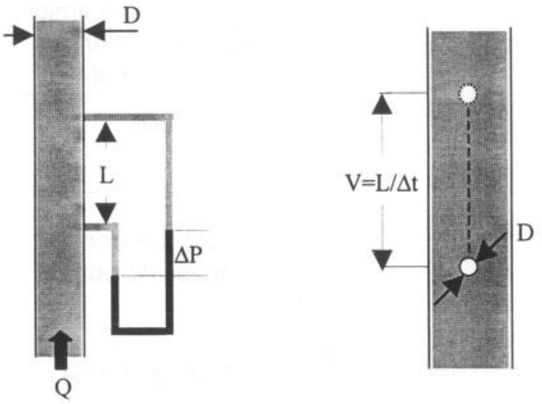
$$\mu = \frac{T \cdot 2B}{\pi \Omega R^4}$$

$$\mu = \frac{T \cdot \alpha}{2\pi \Omega R^3}$$

$$\mu = \frac{T \cdot B}{4\pi\Omega} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_1^2 \cdot R_0^2}$$

Fig. 3 – Representação esquemática dos viscosímetros rotativos: discos paralelos, placa e cone e cilindro.

No grupo secundário encontram-se os viscosímetros que inferem a razão entre a tensão aplicada e a taxa de deformação por meios indiretos, isto é, sem determinar a tensão e deformação diretamente. Nesta categoria pode-se citar o viscosímetro capilar onde a viscosidade é obtida por meio da medida do gradiente de pressão e o viscosímetro de Stokes onde ela é determinada pelo tempo de queda livre de uma esfera, veja representações esquemáticas na Fig. 4.



$$\mu = \frac{\pi \cdot \Delta P \cdot D^4}{128 \cdot L \cdot Q}$$

$$\mu = \frac{1}{18} \frac{g \cdot D^2 (\rho_S - \rho_f)}{V}$$

Fig. 4 – Representação esquemática do viscosímetro capilar e de Stokes.

No viscosímetro capilar Q, L, ΔP e D referem-se, respectivamente, a vazão volumétrica, ao espaçamento entre tomadas de pressão, ao diferencial de pressão e ao diâmetro do capilar. Esta relação aplica-se para um escoamento de Poiseuille, isto é, regime laminar e hidrodinâmicamente desenvolvido.

No viscosímetro de Stokes as variáveis: g, D, ρ_s, ρ_f e V referem-se, respectivamente, a aceleração da gravidade, ao diâmetro da esfera, a densidade da esfera, a densidade do fluido e a velocidade terminal de queda livre obtida pela razão entre a distância L e o lapso de tempo Δt. Esta relação aplica-se somente para esferas em queda livre em meio infinito com Reynolds menores do que 1.

Pelo fato dos viscosímetros primários realizarem medidas da taxa de deformação e da tensão eles podem sem aplicados em análise tanto para fluidos Newtonianos como para fluidos com comportamento tensãoxdeformação não-linear e/ou visco-elástico. Por outro lado, os viscosímetros secundários aplicam-se principalmente a fluidos Newtonianos por medirem a viscosidade de maneira indireta. Esta constitui a principal diferença entre os dois princípios. Outros aspectos que os diferenciam podem ser citados:

a) O volume requerido de amostra nos discos paralelos e cone-disco são os menores
b) A faixa operacional para os discos paralelos e cone-disco são as maiores

c) O custo do viscosímetro de Stokes é o menor, porém é o que necessita de maior volume e só trabalha com líquidos translúcidos.
d) Pelo fato de requerem o menor volume, os viscosímetros tipo nos discos paralelos e cone-disco são os que mais facilmente se adaptam para ensaios em temperaturas diferentes da temp. ambiente.

Unidades de Viscosidade

Viscosidade Dinâmica μ		
Para Converter De	**Para**	**Multiplique por:**
Kg/(m.s)	g/(cm.s) ou Poise (P)	10
Kg/(m.s)	cP	1000
Kg/(m.s)	Lb.s/ft^2	1
Kg/(m.s)	Pa.s	1

Viscosidade Cinemática $\nu = \mu/\rho$		
Para Converter De	**Para**	**Multiplique por:**
m^2/s	cm^2/s ou Stoke (St)	10^4
m^2/s	cSt	10^6
m^2/s	ft^2/s	10,76

3. VISCOSÍMETRO DE STOKES

O viscosímetro de Stokes baseia-se no tempo gasto para uma esfera se deslocar no fluido uma distância L em queda livre, veja Fig. 4.

A esfera, sendo lançada no fluido estacionário, estará sujeita a um conjunto de forças definidas pela equação de BBO (Bassin, Bousinesq & Ossen – Hinze 1959):

$$\underbrace{\frac{\pi}{6}D^3\rho_s\frac{dV}{dt}}_{\text{Acel Esfera}} = -\underbrace{3\pi\cdot\mu\cdot D\cdot V}_{\text{Arrasto}} - \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}D^3\rho_f\frac{dV}{dt}}_{\text{Massa Virtual}}$$

$$-\underbrace{\frac{3}{2}D^2\sqrt{\pi\rho_f\cdot\mu}\int_0^t\frac{dV}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}}_{\text{Força de Basset}} + \underbrace{\frac{\pi}{6}D^3(\rho_s-\rho_f)\cdot g}_{\text{Peso - Empuxo}} \quad (9)$$

onde D refere-se ao diâmetro da esfera , dV/dt a aceleração da esfera e ρ_s e ρ_f as densidades da esfera e do fluido, respectivamente. Uma solução geral desta equação integral-diferencial pode ser encontrada em Yih (1977).

Neste viscosímetro uma distância equivalente a cerca de 50 diâmetros da esfera é suficiente para que ela atinja uma velocidade terminal, isto é, dV/dt seja nulo. Deste ponto em diante a Eq. (9) se reduz a um balanço entre a força de arrasto e a diferença Peso – Empuxo, conforme ilustra Fig. 5

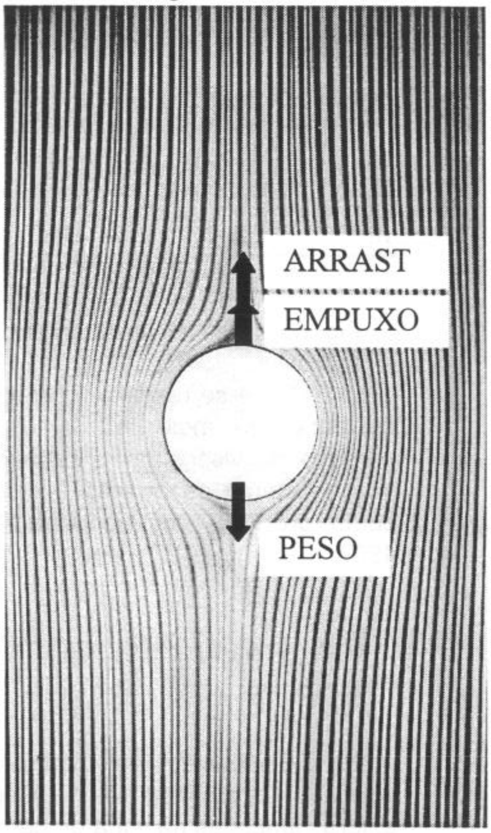


Fig. 5 – Balanço de forças e visualização das linhas de corrente em uma esfera em queda livre. Referencial deslocando-se com a esfera num fluido estacionário.

Este equilíbrio é expresso pela Eq. (10),

$$C_D\cdot\frac{1}{2}\rho_f V^2\cdot\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)=\frac{\pi D^3}{6}(\rho_s-\rho_f)g\,, \quad (10)$$

onde C_D é o coeficiente de arrasto da esfera (White, 1991)

$$C_D=\frac{3\pi\mu DV}{\frac{\rho_f V^2}{2}\cdot\frac{\pi D^2}{4}}\equiv\frac{24}{Re_D}\,, \quad (11)$$

onde $Re_D=\frac{\rho\cdot D\cdot V}{\mu}$.

Esta solução foi obtida analiticamente pela primeira vez em 1851 por Stokes. Ela é considerada um dos grandes sucessos na área de Mecânica do Fluidos pois prevê, com precisão, o arrasto de uma esfera a partir de fundamentos teóricos. Evidentemente a validade da solução é restrita a escoamentos com ausência de inércia, isto é, para regimes com Reynolds inferiores a unidade. Uma comparação entre Eq. (11) e dados experimentais é mostrada na Fig. 6.

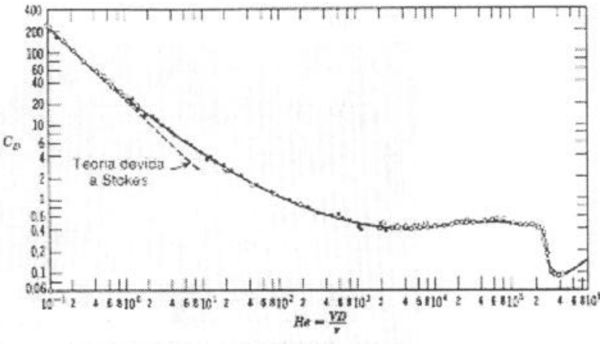


Fig. 6 – Coeficiente de arrasto para esfera.

Deve-se ressaltar que a Eq. (11) aplica-se para um meio infinito. A presença das paredes do viscosímetro causam um aumento no coeficiente de arrasto e deve ser corrigido como proposto por Landenberg em Brodkey 1967:

$$C_D = \frac{24}{Re_D}\left(1 + 2.0144\frac{D}{D_t}\right), \quad (12)$$

onde D_t refere-se ao diâmetro do tubo do viscosímetro e a relação aplica-se somente para esferas lançadas na linha de centro do tubo.

Substituindo-se Eq. (12) na Eq. (10) e resolvendo para μ, obtem-se a expressão de trabalho para o viscosímetro de Stokes, Eq. (13), desde que Re_D seja menor do que a unidade.

$$\mu = \frac{1}{18}\frac{g \cdot D^2(\rho_s - \rho_f)}{V \cdot \left(1 + 2.1044 D/D_t\right)} \quad (13)$$

3.1 Metodologia Experimental

Analisando a Eq. (13) chega se à conclusão que para determinar a viscosidade do fluído *será necessário medir*:

- *diâmetro e densidade das esferas*
- *densidade do fluído*
- *velocidade terminal das esferas*
- *diâmetro do tubo*
- *temperatura*

Diâmetro e densidade das esferas: o diâmetro pode ser medido com um micrômetro, para a densidade pode adotar-se o valor do aço: $\rho_s = 7850\,kg/m^3$.

Densidade do fluído: dispõe-se no laboratório de densímetros. Preste atenção na escala do mesmo: ela decresce de baixo para cima, o maior valor da densidade está ao pé da escala.

Diâmetro do tubo: pode ser medido com paquímetro.

Velocidade terminal das esferas: por tratar-se de uma velocidade constante, pode ser medida diretamente através do lapso de tempo no espaço percorrido, assim:

$$V = \frac{L}{\Delta t} \quad (14)$$

Nos tubos a serem utilizados existem pares de marcas, espaçadas entre sí de 1 metro. O tempo pode ser medido com um cronômetro. Deve-se prestar atenção ao fato que para que a Eq. (14) possa ser utilizada a velocidade limite deve ter sido atingida. Uma das formas de se checar a velocidade limite é por meio da comparação do tempo obtido entre o primeiro e o último par de marcas no tubo. Eles deverão ser iguais se a velocidade limite já foi atingida.

Temperatura: a viscosidade varia com a temperatura, fortemente no caso dos óleos utilizados, em razão disto o valor final dela deve ser reportado junto com o valor de temperatura.

3.2 Medições

Será determinada a viscosidade de dois fluidos: glicerina e um óleo utilizado para lubrificação de motores, disponíveis nos tubos próprios.

Selecione dois conjuntos com esferas, Cada conjunto deve possuir esferas de mesmo diâmetro médio, entretanto é necessário uma medida individual do diâmetro de cada esfera.

Meça 10 vezes o diâmetro interno de cada tubo, em diferentes posições do contorno.

Em cada óleo deverão ser então utilizadas 10 esferas, que serão jogadas do topo do tubo, medindo-se o tempo de queda.

Meça as densidades do óleo e a glicerina e a temperatura dos mesmos.

Anote os valores da menor divisão de cada um dos instrumentos utilizados: micrômetro, cronômetro, paquímetro, densímetro e termômetro.

3.3 - Cálculos

- Valores médios do diâmetro e do tempo de queda das esferas e do diâmetro do tubo.
- Viscosidade dinâmica dos dois fluídos.
- Número de Reynolds da esfera correspondente a cada fluído.
- Viscosidade cinemática dos dois fluídos.

3.4 - Cálculo das Incertezas

O valor final das viscosidades cinemática e dinâmica de cada fluído será reportado junto com o intervalo de confiança correspondente à sua determinação, assim como informando a temperatura do fluido.

Utilize o conceito de propagação de incertezas para determinar a incerteza final da viscosidade com 90% de confiabilidade. Especifique a incerteza correspondente a cada variável medida e indique qual delas contribui com a maior parcela na incerteza de μ.

Calcule o intervalo de confiança das variáveis medidas 10 vezes, (utilize *t-student, 90%*) compare o intervalo obtido com o valor correspondente à menor divisão do instrumento, adote como erro correspondente a essa variável o que for maior. No caso das variáveis medidas apenas uma vez, adote a menor divisão do instrumento como incerteza.

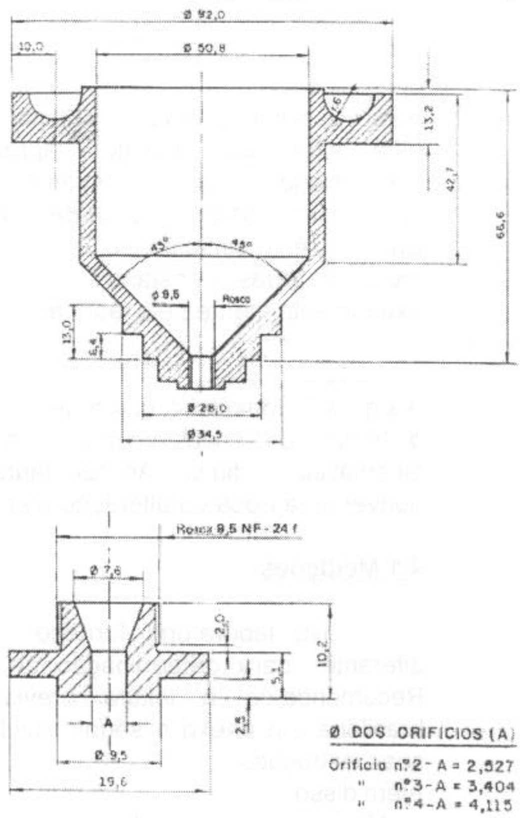
4. VISCOSÍMETRO COPO FORD

O Copo Ford infere a viscosidade do fluido a partir do tempo gasto pelo fluido para esvasiar seu reservatório. Por ser este um método simples, rápido e que requer um pequeno volume de amostra de fluido ele é muito utilizado industrialmente. Apesar dele somente permitir medidas de viscosidade a temperatura ambiente, ele se mostra bastante adequado para fluidos que 'sujam' ou 'aderem' como tintas e vernises devido a sua facilidade de limpesa. As dimensões do copo e seu orifício estão descritas na Fig. 7.

O princípio de funcionamento baseia-se na equação de Poiseuille e portanto é similar ao viscosímetro capilar. Em primeira aproximação pode-se supor um regime 'quase-permanente' durante o esvasiamento do copo e desprezar qualquer perda no copo, considerando-se apenas as perdas existentes no escoamento através do orifício.

A perda de pressão no orifício corresponde a altura de líquido h no copo,

$$\Delta P = \rho g h \qquad (14)$$



F

ig. 7 – Representação esquemática do Copo Ford e seus orifícios.

Considera-se na análise que o diferencial de pressão da Eq. (14) corresponde à perda de pressão o orifício. Não considerando efeitos de aceleração devido ao desenvolvimento do perfil hidrodinâmico no orifício (L/D $\cong$ 2), aproxima-se a Eq. (14) com a perda de pressão dada pela solução de Poiseulli:

$$\rho g h \cong 128 \mu \frac{Q \cdot L}{\pi D^4} \qquad (15)$$

supondo que $Q = A_T \, dh/dt$ onde A_T é a área transversal do copo e dh/dt é a variação do nível com o tempo, chega-se a Eq.(16)

$$\frac{dt}{\nu} \cong \frac{dh}{h} \cdot \underbrace{\frac{128 \cdot A_T \cdot L}{\pi g D^4}}_{\text{const.C}}, \qquad (16)$$

Intregrando-se Eq. (16) vem que uma expressão aproximada para a viscosidade cinemática em função do tempo é:

$$\nu \cong \frac{t}{C \cdot \ln(h_f / h_0)}, \tag{17}$$

onde h_0 é a altura inicial e h_f a altura final onde ocorre a primeira gota no orifício. A Eq. (17) é uma expressão analítica aproximada que correlaciona o tempo de esvasiamento do copo com a viscosidade. O sinal de aproximação na Eq. (17) é substituido por uma igualdade por meio de duas constantes A e B definidas experimentalmente pelo fabricante:

$$\nu = A \cdot \Delta t + B. \tag{17}$$

A Eq. (17) constitui a curva de conversão entre o tempo de esvasiamento e a viscosidade cinemática do fluido. As constantes variam se houver uma troca ou alteração no orifício.

4.1 Medições

No laboratório fornece dois fluídos diferentes para determinação da viscosidade. Recomenda-se a leitura prévia da norma brasileira em anexo e seguir, cuidadosamente, suas instruções.

Além disso:

- Meça o tempo de esvasiamento com cronômetro, repita três vezes cada ensaio.
- Consultando a norma, verifique se o tempo medido está dentro da faixa de trabalho do copo Ford disponível no Laboratório (Copo Ford No. 3).
- Meça a temperatura do óleo no copo em que cai o fluxo.
- Meça, com densímetro, a densidade do fluído.
- Anote a menor divisão de todos os instrumentos utilizados: cronômetro, densímetro, termômetro.

4.2 Cálculos

Calcule o valor médio dos tempos de esvasiamento.

Calcule as duas viscosidades cinemáticas com a correlação correspondente (consulte a norma).

Calcule as duas viscosidades dinâmicas.

4.3 Cálculo da Incerteza

Calcule o intervalo de confiança dos tempos de esvasiamento, compare com a menor divisão do cronômetro e com o tempo médio de reação de uma pessoa: 0,2 s. Adote c omo erro na medida o que for maior.

Também neste caso será necessário utilizar o conceito de *propagação de incertezas*. Utilizando as equações correspondentes, calcule o erro na determinação da viscosidade cinemática e dinâmica. Nos parâmetros medidos apenas uma vez, adote como incerteza a menor divisão do instrumento. Considere desprezível incerteza dos coeficientes da correlação utilizada no cálculo da viscosidade.

5. RESULTADOS FINAIS & CONCLUSÕES

- Comente os valores obtidos para o número de Reynolds e para o tempo característico na determinação com o método de Stokes.
- Apresente seus resultados na forma de tabelas indicando valores intermediários e o valor médio final e a incerteza associada. Compare seus resultados com dados de outra fonte. Comente as semelhanças e diferenças.
- Compare os dois métodos: vantagens e desvantagens de cada um, fontes de erro em cada um. O quê poderia ser melhorado nas determinações?

6. REFERÊNCIAS.

Bird, R.B.; Armstrong, R.C. and Hassager, O.; "Dynamics of Polymeric Liquids", John Willey, 1987.

Brodkey, R.S.;"The Phenomena of Fluid Motions", Addison-Wesley, 1967.

Fung, Y.C., "A first couse in Continuum Mechanics", Prentice-Hall, N.J.

Hinze, J.O.; "Turbulence", McGraw-Hill, 1959

Yih, C.S.; "Fluid Mechanics", West River, 1979

White, F.M.;"Viscous Fluid Flow", 2nd ed. McGraw-Hill, 1991.

Outras Normas ABNT referentes à determinação de viscosidade

NBR	ABNT	Ano	Título
09854	MB02626	87	Acido fosfórico para uso industrial (inclusive alimentar) - Determinação da viscosidade pelo viscosímetro de torção
09393	MB02399	86	Adesivos de fusão - Determinação da viscosidade
09277	MB02281	86	Adesivos à base de elastômeros - Determinação da viscosidade Brookfield
10718	MB02454	89	Borracha - Determinação da viscosidade e características de vulcanização (viscosímetro mooney)
07730	MB01664	83	Celulose - Determinação da viscosidade com etilenodiamina cúprica
	NB00105	72	Conversão de viscosidade cinemática em viscosidade Saybolt universal ou em viscosidade Saybolt Furol
	MB00826	73	Determinação da viscosidade cinemática de asfaltos
05848	MB00987	77	Determinação da viscosidade de uma resina ou verniz por viscosímetro a impulsor rotativo
	MB00517	71	Determinação da viscosidade Saybolt-Furol de materiais betuminosos a alta temperatura
09035	MB02086	85	Látex sintético - Determinação da viscosidade
05847	MB00827	73	Material betuminoso - Determinação da viscosidade absoluta
	MB00326	65	Método de ensaio para a determinação de viscosidade Saybolt de produtos de petróleo
11930	MB01121	77	Método padrão de teste para viscosidade relativa
	MB00477	70	Método para o cálculo do índice de viscosidade a partir da viscosidade cinemática
11504	MB03133	89	Plastificantes líquidos - Determinação da viscosidade
07136	MB01377	81	Plásticos - Determinação do número - Indice de viscosidade das resinas de PVC em solução diluída
07355	MB01641	82	Plásticos - Determinação do índice de viscosidade e do índice limite de viscosidade de polietilenos e polipropilenos em solução diluída
10441	MB01890	88	Produtos líquidos de petróleo - Determinação da viscosidade cinemática e dinâmica
05849	MB00991	86	Tintas - Determinação de viscosidade pelo copo Ford
	MB00581	71	Viscosidade Saybolt-Furol de emulsões asfálticas

Formulação
Diferencial

Capítulo 5

Equações do Movimento - Formulação Diferencial

A partir da forma integral das equações da conservação da massa, momento e energia, serão desenvolvidas as equações de conservação na forma diferencial

5.1 Conservação da Massa

Para um volume de controle não deformável e estacionário, isto é $\vec{V}_r \equiv \vec{V}$, a equação da massa na forma integral é:

$$\iiint_{V.C.} \frac{\partial}{\partial t} \rho \, dV + \iint_{S.C.} (\vec{n} \cdot \rho \vec{V}) \, dA = 0 . \quad (1$$

Usando o teorema de Gauss, a integral sobre a superfície do V.C. pode ser transformada numa integral de volume,

$$\iint_{S.C.} (\vec{n} \cdot \rho \vec{V}) \, dA = \iiint_{V.C.} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \, dV . \quad (2$$

Substituindo eq. (2) em equação (1)

$$\iiint_{V.C.} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] dV = 0 \quad (3)$$

Se o resultado da integral da eq. (3) é nulo o seu integrando deve ser nulo, uma vez que o volume é finito e diferente de zero,

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{taxa de acumulação de massa em } dV} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \vec{V})}_{\text{fluxo líquido de massa que cruza } dV} = 0 \qquad (4$$

Equação (4) pode ser decomposta em:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\rho} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \qquad (5$$

ou

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \vec{V} = 0 \qquad (6$$

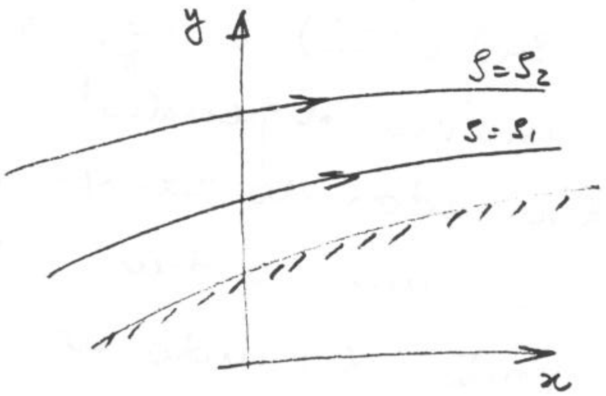
Para um fluido incompressível, isto é, a sua densidade é constante, $\frac{D\rho}{Dt} \equiv 0$ e a equação da conservação da massa se reduz a:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \qquad (7$$

Como observação vale ressaltar o fato que eq (7) ainda é válida para fluidos em escoa[mento] cuja densidade não é constante mas a sua derivada total, $\frac{D\rho}{Dt}$, é nula.

Isto tipicamente ocorre em escoamentos com estratificação. Por exemplo em correntes marí-timas cuja estratificação ocorre devido a salinidade e correntes atmosféricas onde estratificação está associada ao gradiente de temperatura.

Note que ao longo de uma linha de corrente, $D\rho/Dt \equiv 0$ mas ρ não é uma constante, isto é $\partial\rho/\partial x_i \neq 0$.



Escoamento estratificado, $D\rho/Dt = 0$ mas $\partial\rho/\partial x \neq 0$ e $\partial\rho/\partial y \neq 0$.

5.2 Conservação da Massa e a Função Corrente Bidimensic

Considere um escoamento bidimensional, compressível ou não, em regime permanente. A equação da conservação da massa, eq. (4), se reduz a:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \qquad (8)$$

Note que eq. (8) é automaticamente satisfeita definindo-se uma função arbitrária ψ, que passará a ser denominada de função corrente, tal que satisfaça as condições:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u \qquad \text{e} \tag{9a}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v \tag{9b}$$

Usando-se (9a) e (9b) a eq. (8) diminui o número de variáveis dependentes u e v para ψ, porém as derivadas do campo de velocidades aumentam em uma ordem. O conceito de função corrente, definido no capítulo 3, é recuperado escrevendo-se o diferencial da função corrente como:

$$d\psi = -\rho v\, dx + \rho u\, dy \; . \tag{10}$$

Ao longo de uma linha de corrente, $d\psi \equiv 0$ portanto:

$$\left.\frac{v}{dy}\right|_{\psi = cte} = \left.\frac{u}{dx}\right|_{\psi = cte} \tag{11}$$

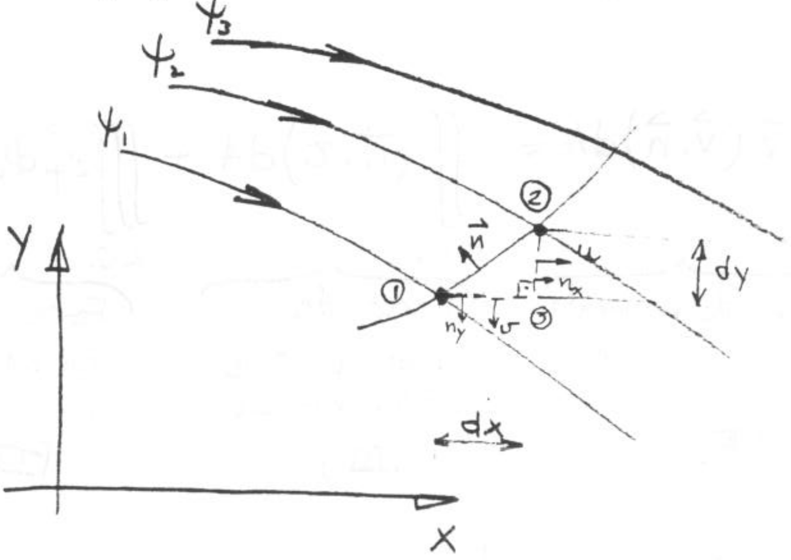
ou

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi = cte} = \frac{v}{u} \; . \tag{12}$$

Equação (12) indica que o campo de velocidades é tangente à linha de corrente ψ.

Pode-se introduzir agora uma nova interpretação física da função corrente: a variação que o valor de ψ assume entre uma linha de corrente e outra é igual a vazão mássica que passa entre elas.

Considere um campo de velocidades que produza as linhas de correntes mostradas na figura abaixo:



A vazão mássica entre os pontos ① e ② é:

$$\dot{m} = \iint_{\text{ÁREA ①-②}} (\vec{n} \cdot \rho\vec{V})\, dA \quad , \qquad (13)$$

mas pela equação da conservação da massa na forma integral eq. (14) é igual:

$$\dot{M} = \underbrace{\int \rho u\,dy}_{\text{ÁREA ③-②}} + \underbrace{\int \rho(-v)\,dx}_{\text{ÁREA ①-③}} = \underbrace{\int (\rho u\,dy - \rho v\,dx)}_{\text{ÁREA ①-②}} \qquad (14)$$

substituindo eq(10) na eq(14)

$$\dot{M} = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1 \qquad (15)$$

5.3 Equação da Conservação do Momento

A equação da conservação do momento via forma diferencial é obtida a partir de sua formulação integral p/ um $\forall$.C. estacionário não deformável,

$$\underbrace{\iiint_{V.C.} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})\,d\forall}_{\substack{\text{VARIAÇÃO do}\\ \text{Momento dentro}\\ \text{do } \forall\text{.C.}\\ (I)}} + \underbrace{\iint_{S.C.} \rho\vec{V}\,(\vec{V}\cdot\vec{n})\,dA}_{\substack{\text{Fluxo de momento}\\ \text{que cruza a S.C.}\\ (II)}} = \underbrace{\iint_{S.C.} (\vec{n}\cdot\tau)\,dA}_{\substack{\text{Forças de}\\ \text{superfície que}\\ \text{atuam na S.C.}\\ (III)}} + \underbrace{\iiint_{V.C.} \rho\vec{f}\,d\forall}_{\substack{\text{Força de campo}\\ \text{que atuam no}\\ \text{V.C.}\\ (IV)}} \qquad (16)$$

Note que o fluxo de momento que cruza a S.C. (II) pode ser escrito em termos de uma diádica,

$$\iint_{S.C.} (\vec{n}\cdot\rho\vec{V}\vec{V})\,dA \equiv \iint_{S.C.} \rho\vec{V}\,(\vec{V}\cdot\vec{n})\,dA \quad ,$$

assim a eq(16) fica

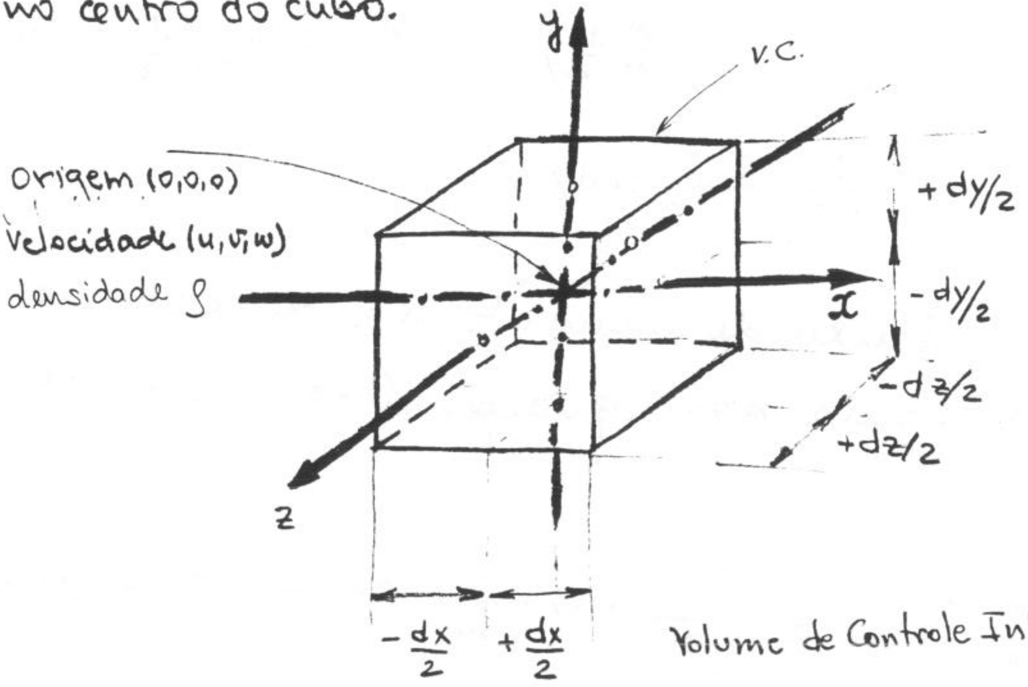
$$\iiint_{V.C.} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})\,d\forall + \iint_{S.C.} (\vec{n}\cdot\rho\vec{V}\vec{V})\,dA = \iint_{S.C.} (\vec{n}\cdot\tau)\,dA + \iiint_{V.C.} \rho\vec{f}\,d\forall \qquad (16a)$$

O procedimento de obtenção da forma diferencial da eq(16a) é similar ao procedimento utilizado p/ a eq. da conservação da massa. As integrais de superfície, II e III são transformadas

em integrais de volume ...
Gauss. Porém, para mostrar o sentido físico
destas transformações, as integrais (II) e (III) serão
avaliadas para um V.C. infinitesimal.

- Avaliação do fluxo líquido de momento que cruza a S.C., integral (II).

Considere o V.C. infinitesimal mostrado na Figura abaixo. O referencial xyz é posicionado no centro do cubo.



Volume de Controle Infinitesimal

O fluxo líquido de momento na direção x é dado pela contribuição do fluxo de momento na direção x através das faces YZ, XZ e XY do V.C.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fluxo de momento}\\ \text{FACE YZ}\end{array}\right\} = -\left(\rho-\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\left(u-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\left(u-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz \;+$$

$$\left(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz \;=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u u)\,dx\,dy\,dz \qquad (17$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{Fluxo do Momento}\\ \text{FACE XZ}\end{matrix}\right\} = -\left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\left(v - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\left(u - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx\,dz + \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx\,dz = \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u)\,dx\,dy\,dz \qquad (17b$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{Fluxo do Momento}\\ \text{FACE XY}\end{matrix}\right\} = -\left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)\left(w - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)\left(u - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy + \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)\left(w + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy = \frac{\partial}{\partial z}(\rho w u)\,dx\,dy\,dz \qquad (17c$$

Portanto o fluxo de momento na direcão x é dado pela soma das equacões (17a), (17b) e (17c):

$$\left\{\begin{matrix}\text{Fluxo do Momento}\\ \text{direcão } x\end{matrix}\right\} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w u)\right]dx\,dy\,dz \; ($$

Análogamente os fluxos de momento nas direcões y e z são dados por

$$\left\{\begin{matrix}\text{Fluxo de Momento}\\ \text{direcão } y\end{matrix}\right\} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w v)\right]dx\,dy\,dz$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{Fluxo de Momento}\\ \text{direcão } z\end{matrix}\right\} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u w) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v w) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w w)\right]dx\,dy\,dz$$

Equações (18a), (18b) e (18c) podem ser escritas na forma tensorial através do produto denominado diádica ($\rho\vec{V}\vec{V}$),

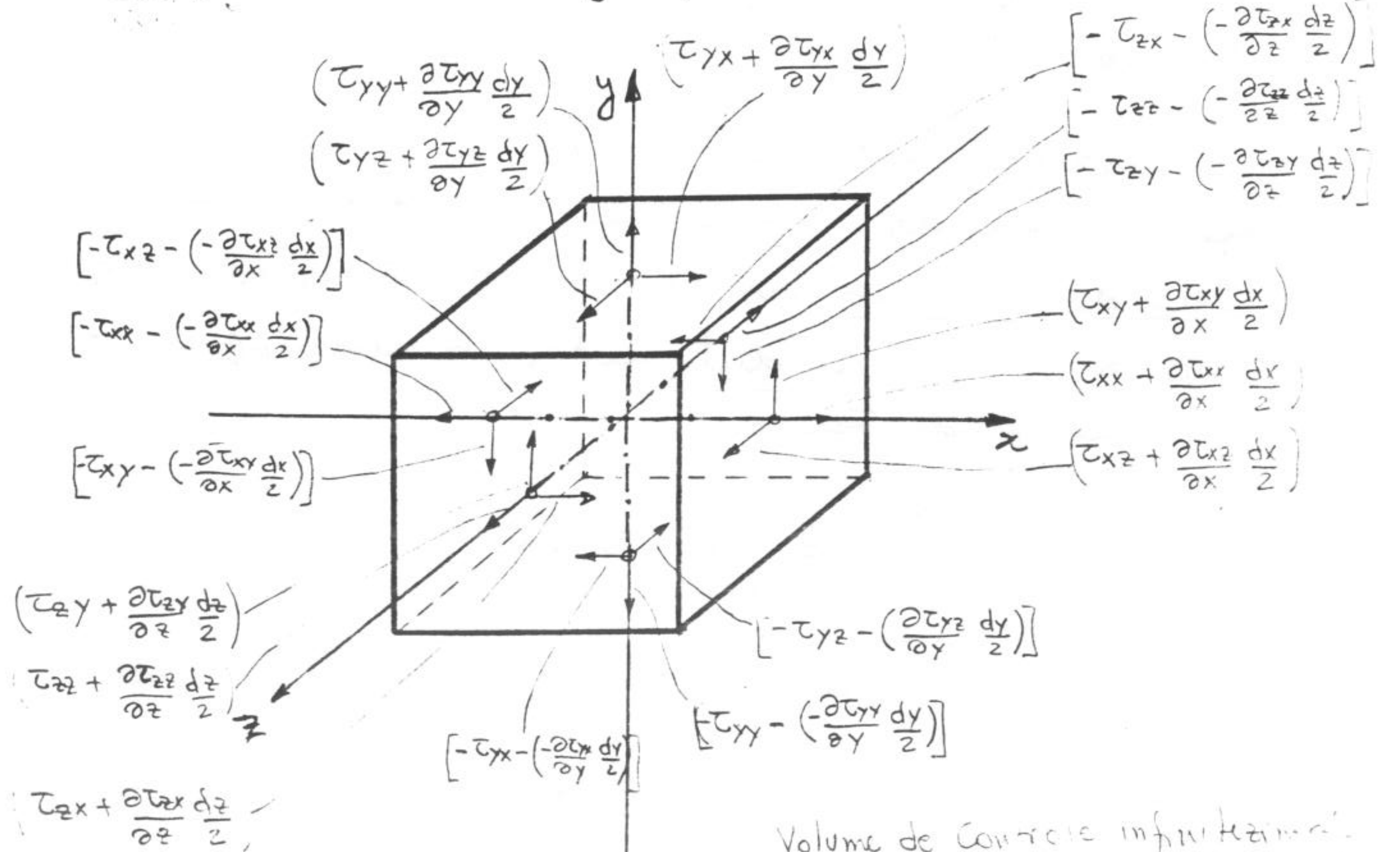
$$(\vec{n}\cdot\rho\vec{V}\vec{V})dA \equiv \rho\vec{V}(\vec{n}\cdot\vec{V})dA = \left[\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_i u_k)\right]dx\,dy\,dz \equiv \left[\nabla\cdot(\rho\vec{V}\vec{V})\right]dx\,dy\,dz;$$

ou seu equivalente em forma vetorial:

$$(\vec{n}\cdot\rho\vec{V}\vec{V})dA \equiv \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})dA \equiv \left[\rho(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} + \vec{V}(\nabla\cdot\rho\vec{V})\right]dx\,dy\,dz \quad (2$$

• Avaliação das forças de superfície que atuam na

O fluido fora do V.C. exerce uma força no fluido dentro do V.C. através da S.C.. Esta força provém das tensões que atuam na S.C.. Para ilustrar, considere um V.C. infinitesimal, mostrado na Figura abaixo, cujo referencial xyz é centrado no cubo cujas faces medem dx, dy e dz.



Volume de Controle infinitesimal com representação das forças de superfície em equilíbrio.

A tensão que atua em cada face do cubo é representada através de dois índices, o primeiro indica a superfície que a tensão atua e o segundo sua direção, por exemplo τ_{xy} é a tensão que atua num plano cuja normal é paralela ao eixo x e sua direção é paralela ao eixo y, conforme ilustrado na Figura.

É necessário também definir um sinal para a tensão. A convenção de sinal empregada para escrever as componentes cartesianas nas faces do cubo é: se a normal (apontando para fora da superfície) estiver na direção crescente de x, y ou z então as componentes das tensões normais e tangenciais estarão também na direção de x, y e z positivos. Se a normal estiver na direção negativa de x, y ou z, então as componentes das tensões normais e tangenciais estarão também na direção negativa de x, y ou z. Veja a ilustração do cubo.

Usando estas convenções a força resultante que o <u>fluido externo</u> ao V.C. exerce no <u>fluido interno</u> ao V.C. é dada pela integral na S.C. do produto entre a normal da S.C. e o tensor de tensões,

$$\vec{F}_{ext} = \iint_{S.C.} [\vec{n} \cdot \tau] \, dA .$$

suas componentes nas direções x, y e z são:

$$F_i = \iint_{S.C.} n_j \, \tau_{ji} \, dA$$

Então, a força resultante que atua na direção x é dada por:

$$\left\{\left(\tau_{xx}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)+\left[-\tau_{xx}-\left(-\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\right]\right\}dydz+\left\{\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)+\left[-\tau_{zx}-\left(-\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)\right]\right\}dx$$

$$+\left\{\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)+\left[-\tau_{yx}-\left(-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\right]\right\}dxdz =$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx})+\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx})+\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx})\right]dxdydz \qquad (21$$

Análogamente, a força de superfície resultante q[ue] atua na direção y e direção z é dada pelas equações (21b) e (21c), respectivamente.

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy})+\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy})+\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy})\right]dxdydz\ , \qquad (2$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz})+\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz})+\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz})\right]dxdydz \qquad (2$$

As equações (21a), (21b) e (21c) podem ser reescritas, em forma mais compacta, utilizando-a notação indicial:

$$(\vec{n}.\tau)\,dA = (\nabla.\tau)\,d\forall = \left[\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}\right] dx\,dy\,dz \qquad (22$$

Substituindo-se equações (20) e (22) na eq. (16 encontra-se:

$$\iiint_{v.c.} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \rho(\vec{V}.\nabla)\vec{V} + \vec{V}(\nabla.\rho\vec{V}) - \underbrace{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}}_{\text{componente das forças de superfície na direção } j} - \rho\vec{g} \right] dx\,dy\,dz = 0$$

Como o v.c. é arbitrário, a equação (23) só é satisfeita se o seu integrando for nulo. Desmembrando o termo $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})$ e reagrupando os termos, e[...] torna-se:

$$\vec{V}.\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{V})\right] + \rho\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}.\nabla\vec{V}\right] - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} - \rho g = 0$$

Note que o primeiro termo da eq. (24) é a equação da conservação da massa, eq. (4), consequentemente a eq. (24) se reduz a:

$$\therefore\ \rho\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\nabla)\vec{V}\right] = \overbrace{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}}^{} + \rho\vec{g} \qquad (2$$

componente das forças de superfície na direção j

Equação (25) pode ainda ser rescrita em termos da derivada total da velocidade,

$$\underbrace{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt}}_{\text{massa por unidade de volume vezes a aceleração da partícula - Fluxo de Momento -}} = \underbrace{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}}_{\text{Força de superfície na partícula por unidade de volume que atua na direção j}} + \underbrace{\rho \vec{g}}_{\text{Força de gravidade na partícula por unidade de volume}} \qquad (2$$

Para referenciais não inerciais um termo de aceleração relativa deve ser introduzido na eq. (2.

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \rho \vec{g} - \rho \vec{a}_{rel} \qquad (2$$

onde

$$\vec{a}_{rel} = \left[\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} \right]$$

eq. (28) é conforme definição dada no capítulo

5.4 Abordagem Alternativa para dedução da Equação da Conservação do Momento

A maioria dos textos avançados em Mecânica dos Fluidos obtêm a equação da conservação do momento diretamente da fórmula de transformação de integral de superfície em integral de volume, utilizando-se da notação indicial.

Neste item será desenvolvida novamente a equação (26) partindo-se das transformações diretamente. Deve-se ressaltar que os dois processos são equivalentes. O que se pretendeu desenvolver no item 5.3 foi uma visão mais física da dedução desta equação.

A equação do momento na forma integral,

$$\iiint_{V.C.} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V})\, dV + \iint_{S.C.} (\vec{n} \cdot \rho \vec{V}\vec{V})\, dA = \iint_{S.C.} (\vec{n} \cdot \tau)\, dA + \iiint_{V.C.} \rho \vec{g}\, dV$$

As integrais de superfície são transformadas em integrais de volume através do Teorema de Gauss na forma tensorial (veja cap. 1)

$$\iint_{S.C.} (\vec{n} \cdot a\vec{V})\, dA = \iiint_{V.C.} \nabla \cdot (a\vec{V})\, dV$$

portanto o fluxo de momentum através ... e os forças de superfície que atuam na S.C. são transformadas em balanços do ∀.C. pelas equações (31a) e (31b) respectivamente

$$\iint_{S.C.} (\vec{n} \cdot \rho \vec{V}\vec{V})\, dA = \iiint_{V.C.} \nabla \cdot (\rho \vec{V}\vec{V})\, d\forall = \iiint_{\forall.C.} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_j V_i) \quad (31a)$$

e

$$\iint_{S.C.} (\vec{n} \cdot \tau)\, dA = \iiint_{V.C.} (\nabla \cdot \tau)\, d\forall = \iiint_{\forall.C.} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \quad (31b)$$

Substituindo-se eq. (31a) e (31b) na eq. (29) encontra-se

$$\iiint_{V.C.} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_i) + \frac{\partial (\rho V_j V_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} - \rho g_i \right] dV = 0 \quad (32)$$

Como o V.C. é arbitrário, eq. (32) só é satisfeita se o seu integrando for nulo. Manipulando-se os dois primeiros termos do integrando pode-se reescrevê-lo na forma:

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \underbrace{V_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_j)}_{\text{nulos}} + \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i$$

O segundo e terceiro termos da eq. (33) somam zero porque eles são idênticos à equação da continuidade, assim a eq. da conservação do momento fica sendo:

$$\rho\left[\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right] = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i \qquad (34)$$

ou

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \nabla \cdot \tau + \rho \vec{g} \qquad (34a)$$

Note que equações (26) ou (34) descrevem a conservação do momento, para qualquer tipo de escoamento onde uma única fase está presente, em termos do campo de tensões τ_{ji}.

Para que estas equações possam ser tratadas analiticamente ou através de técnicas numéricas é necessário que se relacione o campo de tensões τ_{ij} com a taxa de deformação das partículas através do campo de velocidades. Este interrelacionamento se dá através das equações constitutivas do fluido e será abordado no capítulo 6.

Momentum Equations in Terms of τ[a]

Rectangular Coordinates (x, y, z):

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zx}\right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zy}\right] - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zz}\right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

Cylindrical Coordinates (r, θ, z):

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = -\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\tau_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zr} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r}\right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) = -\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\theta}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\tau_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{z\theta} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r}\right] - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zz}\right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

Spherical Coordinates (r, θ, φ):

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r}\right) = -\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{rr}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\tau_{\theta r}\sin\theta)\right] - \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\tau_{\varphi r} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\varphi\varphi}}{r}\right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2\cot\theta}{r}\right) = -\left[\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}(r^3\tau_{r\theta}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\tau_{\theta\theta}\sin\theta)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\tau_{\varphi\theta} + \frac{(\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}) - \tau_{\varphi\varphi}\cot\theta}{r}\right] - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi}{r}\cot\theta\right) = -\left[\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}(r^3\tau_{r\varphi}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\tau_{\theta\varphi}\sin\theta)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\tau_{\varphi\varphi} + \frac{(\tau_{\varphi r} - \tau_{r\varphi}) + \tau_{\varphi\theta}\cot\theta}{r}\right] - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \rho g_\varphi$$

[a] For symmetric τ set $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

5.5 Simetria do Campo de Tensões

O campo de tensões é simétrico em relação à diagonal principal do tensor de tensões τ_{ij}.

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

isto é

$$\tau_{21} = \tau_{12}$$
$$\tau_{31} = \tau_{13}$$
$$\tau_{32} = \tau_{23}$$

Para demonstrar esta importante propriedade do campo de tensões do fluido, parte-se do postulado que a variação do momento do momento com relação ao centro da partícula do fluido é igual ao momento resultante da soma de todas as forças externas aplicadas à partícula.

Este postulado é uma conseqüência da 2ª lei de Newton e para um sistema se escreve

$$\frac{D}{Dt}(\vec{x} \times \rho\vec{V})\Big|_{sistema} = \sum (\vec{x} \times \vec{F}_{ext}) \qquad (35)$$

onde $\vec{x}$ é o vetor posição que liga a origem à partícula de fluido.

Para um V.C. estacionário não deformável, o primeiro termo da eq. (35) fica sendo:

$$\frac{D}{Dt}(\vec{x}\times\rho\vec{V})_{sist} = \iiint_{V.C.} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{ijk}\, x_j \rho V_k)\, dV + \iint_{S.C.} \rho\,(\varepsilon_{ijk}\, x_j\, V_k)(V_\ell n_\ell)\, dA \qquad (36)$$

As forças externas que geram momentos são as forças de superfície e as forças de campo, então

$$\sum (\vec{x}\times\vec{F}_{ext}) = \iint_{S.C.} \varepsilon_{ijk}\, x_j (\tau_{k\ell}\, n_\ell)\, dA + \iiint_{V.C.} \rho\, \varepsilon_{ijk}\, x_j\, g_k\, dV \qquad (37)$$

Substituindo-se eq (36) e (37) na eq. (35) obtêm-se:

$$\iiint_{V.C.} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{ijk}\, x_j \rho V_k)\, dV + \iint_{S.C.} \rho(\varepsilon_{ijk}\, x_j\, V_k)(V_\ell n_\ell)\, dA = \iint_{S.C.} \varepsilon_{ijk}\, x_j (\tau_{k\ell}\, n_k)\, dA$$

$$+ \iiint_{V.C} \rho\, \varepsilon_{ijk}\, x_j\, g_k\, dV \qquad (38)$$

O segundo e terceiro termos da eq. (38) podem ser transformados para integrais de volume, eq. (39) e (40) respectivamente, utilizando-se o teorema de Gauss.

$$\iint_{S.C.} \rho(\varepsilon_{ijk}\, x_j\, V_k)(V_\ell n_\ell)\, dA = \iiint_{V.C.} \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\varepsilon_{ijk}\, x_j\, V_k\, \rho V_\ell)\, dV \qquad (39)$$

$$\iint\limits_{S.C.} \varepsilon_{ijk} x_j (\tau_{k\ell} n_k)\, dA = \iiint\limits_{V.C.} \frac{\partial}{\partial x_k}(\varepsilon_{ijk} x_j \tau_{k\ell})\, dV \qquad (40)$$

O integrando da eq (39) pode ainda ser manipulado:

$$\frac{\partial}{\partial x_\ell}(\varepsilon_{ijk} x_j V_k \rho V_\ell)\, dV = \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_\ell} \rho V_k V_\ell + \rho V_k V_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} \varepsilon_{ijk} x_j \qquad (41)$$

observando-se que $V_k V_\ell$ é simétrico, isto é, $V_k V_\ell \equiv V_\ell V_k$, e o tensor ε_{ijk} é anti-simétrico, o último termo da eq (41) é identicamente nulo e portanto eq (39) fica sendo:

$$\iiint\limits_{V.C.} \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\varepsilon_{ijk} x_j \rho V_k V_\ell)\, dV = \varepsilon_{ijk} x_j \iiint\limits_{V.C.} \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\rho V_k V_\ell)\, dV . \qquad (42)$$

O integrando da eq. (40) por sua vez pode ser desmembrado em dois termos:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\varepsilon_{ijk} x_j \tau_{k\ell}) = \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \tau_{k\ell} + \tau_{k\ell} \frac{\partial \varepsilon_{ijk} x_j}{\partial x_k} \qquad (43)$$

o último termo da eq. (43) pode ser reescrito na forma:

$$\tau_{k\ell} \frac{\partial}{\partial x_k}(\varepsilon_{ijk} x_j) = \varepsilon_{ijk} \tau_{k\ell} \qquad (44)$$

substituindo-se eq. (44) e (43) na eq. (40)

$$\iiint\limits_{V.C.} \frac{\partial}{\partial x_k}(\varepsilon_{ijk} x_j \tau_{k\ell})\, dV = \iiint\limits_{V.C.} \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \tau_{k\ell}\, dV + \iiint\limits_{V.C.} \varepsilon_{ijk} \tau_{k\ell}\, dV \qquad (45)$$

substituindo-se eq. (42) e (43) na eq. (30) e colocando-se em evidência o termo $\varepsilon_{ijk} x_j$,

$$\iiint_{V.C.} \left\{ \underbrace{\varepsilon_{ijk} x_j \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho V_k V_l) - \frac{\partial}{\partial x_k}\tau_{kl} - \rho g_k \right]}_{=0} - \varepsilon_{ijk} \tau_{kl} \right\} dV = 0 \quad (46)$$

observando-se que o termo entre parenteses é nulo porque ele é idêntico à equação da conservação do momento, eq. (32), conclui-se que para que eq. (46) seja verdadeira:

$$\varepsilon_{ijk} \tau_{kl} = 0 \quad (47)$$

ou seja, τ_{kl} deve ser simétrico, isto é $\tau_{kl} = \tau_{lk}$.

5.6 Equação da Conservação da Energia

A equação da conservação da Energia para um V.C. estacionário não deformável, conforme mostrada no capítulo 4, é:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \iiint_{V.C.} \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) dV + \iint_{S.C.} \rho e (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (48)$$

onde e é a energia por unidade de volume,

$$e = \left(u + \frac{1}{2} V^2 - \vec{g} \cdot \vec{r} \right) \quad (49)$$

a sua forma diferencial é obtida transformando as integrais de superfície em integrais de volume assim como os termos de calor e trabalho.

- Termos de Energia

Usando o teorema de Gauss obtém-se:

$$\iint_{S.C.} \rho e(\vec{V}\cdot\vec{n})\,dA = \iiint_{V.C.} \nabla\cdot(\rho e\vec{V})\,dV \qquad (50)$$

então:

$$\iiint_{V.C.} \frac{\partial}{\partial t}(\rho e)\,dV + \iint_{S.C.} \rho e(\vec{V}\cdot\vec{n})\,dA = \iiint_{V.C.} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla\cdot(\rho e\vec{V})\right] dV \qquad (51)$$

o integrando do lado direito da eq. (51) pode ser escrito na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla\cdot(\rho e\vec{V}) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + (\vec{V}\cdot\nabla)(\rho e) + \rho e\,\nabla\cdot\vec{V} \qquad (5$$

mas

$$\frac{D}{Dt}(\rho e) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + (\vec{V}\cdot\nabla)(\rho e) \qquad (53$$

Recorrendo-se à equação da continuidade, eq. (6) e eq. (53), a eq. (52) reduz-se a

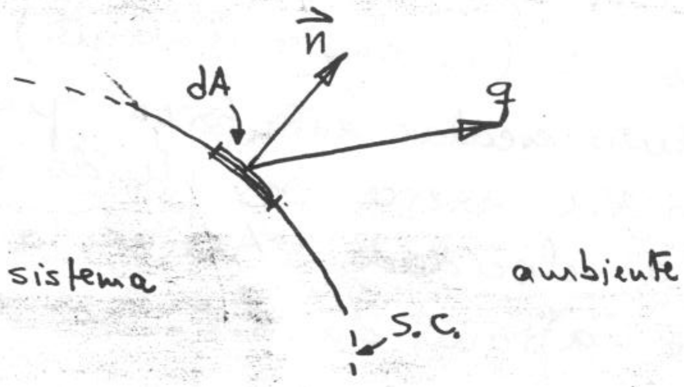
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla\cdot(\rho e\vec{V}) = \rho\frac{De}{Dt}. \qquad (54)$$

Assim a integral do lado direito da eq. (51) fica sendo

$$\iiint_{V.C.} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla\cdot(\rho e\vec{V})\right] dV = \iiint_{V.C.} \rho\frac{De}{Dt}\,dV \qquad (5$$

- Termo de Transferência de calor

Introduzindo o vetor fluxo de calor $\vec{q}$ com dimensões [energia/área x tempo], veja figura abaixo,



a taxa de calor, $\dot{Q}$, transferida de ou para o sistema através de toda a S.C. é dada por:

$$\dot{Q} = - \iint_{S.C.} (\vec{n} \cdot \vec{q})\, dA \,,$$

onde o sinal negativo está de acordo com a convenção de sinal adotada para o calor. O fluxo de calor $\vec{q}$ está relacionado com o campo de temperatura do fluido através da lei de Fourier, assim

$$\dot{Q} = - \iint_{S.C.} (\vec{n} \cdot - k \vec{\nabla} T)\, dA \qquad (56)$$

onde k é a condutibilidade térmica do fluido.

A taxa de transferência de calor no volume de controle é obtida aplicando-se o Teorema de Gauss,

$$\dot{Q} = + \iiint_{V.C.} \nabla \cdot (k \vec{\nabla} T)\, d\forall \qquad (57)$$

- Termo do Trabalho de Superfície

A taxa de trabalho realizada pelo fluido externo ao V.C. (no caso o ambiente) no fluido dentro do V.C. (no caso o sistema) é dada pelo produto escalar entre força que o fluido externo ao V.C. exerce no fluido dentro do V.C. e a velocidade. Assim, a taxa de trabalho através da S.C. é dada por

$$\dot{W} = -\iint_{S.C.} ([\vec{n} \cdot \tau] \cdot \vec{V})\, dA \equiv -\iint_{S.C.} (\vec{n} \cdot [\tau \cdot \vec{V}])\, dA \,, \qquad (58)$$

onde o sinal negativo em frente da eq (58) está de acordo com a convenção de sinal adotada para o termo de trabalho na equação da energia. Transformando a integral de superfície, eq (58), em integral de volume através do Teorema de Gauss, têm-se

$$\dot{W} = -\iiint_{V.C.} \nabla \cdot (\tau \cdot \vec{V})\, d\forall = -\iiint_{V.C.} \frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij} V_j)\, d\forall \,. \qquad (59)$$

Substituindo-se as equações (55), (57) e (59) na eq (... têm-se a equação da energia na forma diferencial,

$$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij} V_j) \qquad (60)$$

Equação (60) para ... substituindo eq. (49) em (60) e desmembrando o último termo do lado direito da eq (60) obtêm-se:

$$\rho\left[\frac{Du}{Dt} + \vec{V}\cdot\frac{D\vec{V}}{Dt} - \vec{g}\cdot\vec{V}\right] = \nabla\cdot(k\nabla T) + V_j\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_i} + \tau_{ij}\frac{\partial V_j}{\partial x_i} \qquad (61)$$

multiplicando-se ambos os lados da equação da conservação do momento, eq. (26), por V_j obtêm-se:

$$\rho\left[\vec{V}\cdot\frac{D\vec{V}}{Dt} - \vec{g}\cdot\vec{V}\right] = V_j\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_i} \qquad (62)$$

Subtraindo-se eq (62) de eq. (61) têm-se a equação da energia em termos da energia interna u:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \nabla\cdot(k\nabla T) + \tau_{ij}\frac{\partial V_j}{\partial x_i} \qquad (6$$

As forças de superfície τ_{ij} podem, por sua vez, serem decompostas em uma parcela devido ao campo estático de pressão e em outra devido às tensões viscosas, assim

$$\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \tau'_{ij} \qquad ($$

A equação (64) será discutida no capítulo onde será abordada a equação constitutiva fluido.

Substituindo-se eq. (64) em (63) ... forma final da equação da energia em função da energia interna:

$$\underbrace{\rho \frac{Du}{Dt}}_{\left[\substack{\text{taxa de}\\ \text{energia}\\ \text{interna}}\right]} = \underbrace{\nabla \cdot (k \nabla T)}_{\left[\substack{\text{fluxo de}\\ \text{calor}}\right]} - \overbrace{p \nabla \cdot \vec{v}}^{\left[\substack{\text{taxa de tra-}\\ \text{balho rever-}\\ \text{sível}}\right]} + \overbrace{\Phi}^{\left[\substack{\text{taxa de trabalho}\\ \text{irreversível - dissi-}\\ \text{pação viscosa}}\right]} \tag{65}$$

onde Φ é definido por:

$$\Phi = \tau'_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \; * \tag{66}$$

entretanto como para fluidos newtonianos assim como para não Newtonianos o tensor τ'_{ij} é simétrico $\tau'_{ij} = \tau'_{ji}$, pode-se escrever Φ em função do produto escalar entre tensores:

$$\Phi = \tau'_{ij} : \nabla \vec{v} \tag{66a}$$

Deve-se enfatizar que para fluidos newtonianos Φ é sempre positivo porque ele pode ser expresso como a soma de quadrados de termos. Isto implica que para todos escoamentos existe uma degradação de energia mecânica em energia térmica e que portanto nenhum processo real é reversível.

Por sua vez o termo $(p \nabla \cdot \vec{v})$, que pode ser positivo ou negativo dependendo se o fluido se expande ou contrai, indica um modo reversível de troca de energia mecânica em energia térmica.

* A função dissipação viscosa em função do campo de velocidades é obtida a partir das equações constitutivas (capítulo 6).

A forma da equação da energia, eq. (65), pode ser extendida para escoamentos com geração interna de calor sem perda de generalidade,

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) - p \nabla \cdot \vec{V} + \Phi + \rho \dot{q}$$

onde $\dot{q}$ é a taxa de geração de calor por unidade de volume dentro do escoamento. Este termo de geração de calor, $\dot{q}$, pode ser associado, por exemplo, ao calor dissipado por resistências elétricas dentro do escoamento, ou pelo calor gerado através de reações químicas ou nucleares.

5.6.1 Equação da Conservação da Energia em termos da entalpia

A equação da conservação da energia pode ser expressa através da taxa de variação da entalpia manipulando o termo reversível de trabalho de pressão, $p \nabla \cdot \vec{V}$.

Da equação da conservação da massa, eq. (6);

$$\nabla \cdot \vec{V} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} \tag{67}$$

Então

$$p \nabla \cdot \vec{V} = -\frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \frac{Dp}{Dt} \tag{68}$$

Substituindo eq. (68) na eq. (65) e reconhecendo que a entalpia h é

$$h = (u + p/\rho) \quad (\ldots$$

A equação da conservação da energia em termos da entalpia fica sendo:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi + \rho \dot{q} \quad (7\ldots$$

5.6.2 Equação da Conservação da energia em função de Cv.

Para maioria dos problemas em engenharia é conveniente escrever a equação da energia em termos da temperatura do fluido e de sua capacidade térmica ao invés da sua energia interna térmica u. A equação da conservação da energia pode ser escrita nestes termos reconhecendo que a energia interna u é uma função da Temperatura T do volume específico v e da Temperatura T

$$du = \left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_T dv + \left.\frac{\partial u}{\partial T}\right|_v dT$$

$$= \left[-p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v\right] dv + C_v\, dT \qquad (71)$$

onde C_v é a capacidade térmica do fluido a volume constante. Tomando-se a derivada substantiva da eq (71) e multiplicando-se ambos os lados por ρ obtém-se:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \left[-p + T\left(\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_v\right)\right] \frac{\rho Dv}{Dt} + \rho C_v \frac{DT}{Dt} \qquad (72)$$

o termo:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho \frac{D(1/\rho)}{Dt} = \nabla \cdot \vec{V} \qquad (73)$$

e

$$\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_v = \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_\rho = \frac{\beta}{k} \qquad (74)$$

onde β é o coeficiente de compressibilidade isobárica e k é o coeficiente de compressibilidade isotérmica

$$\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \quad e \quad k = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$$

substituindo equações (74), (73) e (72) na eq. (65) encontra-se:

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) - T\left(\frac{\beta}{k}\right)(\nabla \cdot \vec{V}) + \Phi + \rho \dot{q} \qquad (75)$$

5.6.3 Equação da Conservação da Energia em termos de C_p

A equação da conservação da energia pode ser escrita em termos do calor específico a pressão constante, C_p e da temperatura, reconhecendo-se que a entalpia h é uma função da pressão e temperatura

$$dh = \left.\frac{\partial h}{\partial T}\right|_p dT + \left.\frac{\partial h}{\partial p}\right|_T dP$$

$$= c_p\, dT + v\left[1 - T\beta\right] dp \qquad (76)$$

Tomando-se a derivada substantiva de ambos os lados da eq. (76) e multiplicando-a por ρ têm-se:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = c_p \frac{DT}{Dt} + \left[1 - T\beta\right]\frac{Dp}{Dt} \qquad (77)$$

substituindo-se eq. (77) na eq. (70) chega-se a forma final da equação da conservação da energia em termos de c_p e T:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla\cdot(k\nabla T) + \beta T\frac{Dp}{Dt} + \Phi + \rho \dot{q} \qquad (78)$$

Rectangular coordinates:

$$\rho\hat{C}_v\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} + v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) = -\left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right]$$
$$- T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) - \left\{\tau_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \tau_{yy}\frac{\partial v_y}{\partial y} + \tau_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right\}$$
$$- \left\{\tau_{xy}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \tau_{xz}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \tau_{yz}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\right\} \qquad (A)$$

Cylindrical coordinates:

$$\rho\hat{C}_v\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) = -\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rq_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right]$$
$$-T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) - \left\{\tau_{rr}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{\theta\theta}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right)\right.$$
$$\left. + \tau_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right\} - \left\{\tau_{r\theta}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] + \tau_{rz}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left. + \tau_{\theta z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\right\} \qquad (B)$$

Spherical coordinates:

$$\rho\hat{C}_v\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) = -\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2q_r)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(q_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial q_\phi}{\partial \phi}\right] - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2v_r)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right) - \left\{\tau_{rr}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{\theta\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)\right.$$
$$\left. + \tau_{\phi\phi}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right)\right\} - \left\{\tau_{r\theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r}\right)\right.$$
$$\left. + \tau_{r\phi}\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r}\right) + \tau_{\theta\phi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{\cot\theta}{r}v_\phi\right)\right\} \qquad (C)$$

Note: The terms contained in braces { } are associated with viscous dissipation and may usually be neglected, except for systems with large velocity gradients.

5-6-4 Equação da Energia Cinética

Multiplicando-se ambos os lados da eq. do momento, eq (34) por V_i,

$$\rho V_i \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \left(V_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) V_i = V_i \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho V_i g_i \quad (79)$$

mas

$$\rho V_i \frac{\partial V_i}{\partial t} \equiv \rho \frac{\partial}{\partial t}(V_i V_i/2) , \quad (80)$$

$$\rho V_i \left(V_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) V_i \equiv \rho V_j \frac{\partial}{\partial x_j} (V_i V_i/2) \quad e \quad (81)$$

$$V_i \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \equiv - V_i \frac{\partial}{\partial x_j} p \delta_{ij} + V_i \frac{\partial}{\partial x_j} \tau'_{ji} \quad (82)$$

substituindo-se equações (80), (81) e (82) na eq (79) chega-se a equação da energia cinética em notação tensorial,

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (V_i V_i/2) + \rho V_j \frac{\partial}{\partial x_j} (V_i V_i/2) = - V_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + V_i \frac{\partial \tau'_{ji}}{\partial x_j} + \rho V_i g_i \quad (83)$$

ou em notação vetorial,

$$\rho \frac{D}{Dt} (V^2/2) = - \vec{V} \cdot \nabla p + V_i \frac{\partial \tau'_{ji}}{\partial x_j} + \rho \vec{V} \cdot \vec{g} \quad (84)$$

Equação (83) também pode ser escrita em função do termo de dissipação viscosa Φ notando-se que:

$$v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial (p v_i)}{\partial x_i} - p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \qquad (85)$$

$$v_i \frac{\partial \tau'_{ji}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i \tau'_{ji}) - \Phi \qquad (86)$$

substituindo-se eq (85) e (86) em (84)

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}(v_i v_i/2) + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i v_i/2)\right] = -\frac{\partial (p v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial (v_i \tau'_{ji})}{\partial x_j} + \rho v_i g_i + p\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \Phi \quad (87)$$

Para fluidos incompressíveis, $p\,\partial v_i/\partial x_i \equiv 0$, e omitindo-se o termo de trabalho gravitacional, a equação da energia cinética fica sendo:

$$\rho \frac{D(V^2/2)}{Dt} + \nabla.(p\vec{V}) - \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i \tau'_{ji}) = -\Phi \qquad (88)$$

A forma da equação da energia cinética apresentada na eq (88) é usualmente empregada em estudos de escoamentos turbulentos.

5-6-5 Equação da Entropia

A equação da Entropia pode ser obtida a partir da equação da energia expressa através da entalpia, eq (70). Da relação termodinâmica:

$$dh = T\,ds + \frac{dp}{\rho} \qquad (89)$$

pode-se escrever

$$\frac{Dh}{Dt} = T\frac{Ds}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} \qquad (90)$$

substituindo-se eq (90) na eq (70)

$$\rho T\frac{Ds}{Dt} = \nabla\cdot(k\,\nabla T) + \Phi + \rho\dot{q} \qquad (91)$$

para um fluido com condutividade térmica constante,

$$\rho\frac{Ds}{Dt} = \frac{k\,\nabla^2 T}{T} + \frac{\Phi}{T} + \frac{\rho\dot{q}}{T} \qquad (92)$$

Equação (92) expressa a taxa de variação da entropia em função do fluxo de calor por condução, da dissipação viscosa e da taxa de produção de calor por unidade de volume dentro do escoamento.
Através da eq (92) pode-se chegar a taxa de produção de entropia por unidade de volume, $\dot{P}_s$ que mostra o grau de irreversibilidade.

Partindo da desigualdade de Clausius,

$$ds \geq \frac{dQ}{T} + \rho \dot{q} \qquad (93)$$

a desigualdade pode ser transformada em uma igualdade somando-se um termo de producão de entropia no lado esquerdo da eq (93)

$$dS - \frac{dQ}{T} - \frac{\rho \dot{q}}{T} = P_s \; ; \quad dP_s \geq 0 \qquad (94)$$

Ou seja, a variação da entropia de um sistema menos a rázão entre o fluxo de calor e a temperatura menos a producão de calor interna por temperatura e, finalmente, é igual a producão de entropia no sistema.

Esta equação pode ser aplicada a um V.C. utilizando-se o Teorema de Transporte de Reynolds. Lembrando que $dQ = -k\nabla T$, é obtida utilizando-se sua forma diferencial o Teorema de Gauss,

$$\rho \frac{Ds}{Dt} - \nabla \cdot \frac{k \nabla T}{T} - \frac{\rho \dot{q}}{T} = \dot{P}_s \qquad (95)$$

onde $\dot{P}_s$ é a taxa de producão de entropia por unidade de volume. Substituindo-se eq (92) na eq. (95) encontra-se

$$\dot{P}_s = \frac{k}{T^2}(\nabla T)^2 + \frac{\Phi}{T} \qquad (96)$$

onde o termo Φ/T refere-se a produção de entropia devido a dissipação viscosa e o termo $\frac{k}{T^2}(\nabla T)^2$ a produção de entropia devido a distribuição de temperatura não uniforme. Deve-se destacar que $\dot{P}_s$ é sempre positivo e que a irreversibilidade local de um escoamento está associada à condutibilidade térmica do fluido (k) e a sua viscosidade (μ).

Referências

[1] White, F. M. ; "Viscous Fluid Flow", Mc Graw Hill (1974)

[2] Bird, R.B.; Stewart, W.E e Lightfoot, E.N ; "Transport Phenomena", John Wiley & Sons (1960)

[3] Schlichting, H ; "Boundary Layer Theory", Mc Graw Hill (1968)

[4] Batchelor, G.K. ; "An Introduction to Fluid Dynamics", Cambridge Un. Press (1967)

[5] Fung, Y.C. ; "A First Course in Continuum Mechanics", Prentice Hall Inc.

[6] Bejan, A.; "Entropy Generation Through Heat and Fluid Flow", John Wiley & Sons (1982)

Formas Adimensionais das Eqs. N-S: Classificação do Escoamento

7.0 Forma Adimensional da Eq. de N-S e classificação do escoamento

A determinação do campo de velocidades, pressão e temperatura de um escoamento de um fluido Newtoniano requer a solução simultânea das equações de N-S, da conservação da Energia, da conservação da massa e de uma equação de estado. Este sistema contém seis equações independentes que totalizam o número de variáveis dependentes do problema, a saber u, v, w, T, p e ρ.

Felizmente não é a maioria dos fenômenos em escoamentos que requerem o emprego de todos as equações do sistema. Neste capítulo será abordada apenas a equação de N-S. Foi visto nos capítulos anteriores que as eq. N-S. descrevem, a nível pontual, o balanço de forças num fluido Newtoniano. Para escoamentos isotérmicos e incompressíveis a solução das eq. N-S juntamente com a eq. da conservação da massa determinam o campo de velocidade, e de pressão do escoamento.

Pela complexidade introduzida pelos termos não lineares não se conhece, até a presente data uma solução geral para as eqs. de N-S. No entanto, é possível caracterizar os diferentes regimes de escoamento estabelecendo um balanço entre as forças viscosas, os termos convectivos e as forças de pressão e identificar os mecanismos dominantes que governam o escoamento e simplificar as eqs de N-S.

Esta classificação pode ser feita através da adimensionalização das eqs. de N-S. Considere um escoamento isotérmico e incompressível cujas dimensões características são:

$$|\vec{V}| \simeq V_0 \qquad (1a)$$

$$|\vec{x}| \simeq L \qquad (1b)$$

$$p - P_0 \simeq \rho V_0^2 \quad \text{(}P_0\text{ é uma pressão de referência)} \qquad (1c)$$

$$t \simeq (L/V_0) \qquad (1d)$$

$$\rho = \rho_0 \qquad (1e)$$

$$\mu = \mu_0 \qquad (1f)$$

$$|\vec{g}| = g_0 \qquad (1g)$$

De posse das equações (1a-g) pode-se escrever, de forma adimensional, as variáveis das eq.s de N-S.:

$$\vec{V}^* = \frac{\vec{V}}{V_0} \sim \mathcal{O}(1) \qquad (2a)$$

$$\vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{L} \sim \mathcal{O}(1) \qquad (2b)$$

$$P^* = \frac{P - P_0}{\rho_0 V_0^2} \sim \mathcal{O}(1) \qquad (2c)$$

$$t^* = t/(L/V_0) \sim \mathcal{O}(1) \qquad (2d)$$

$$\rho^* = \rho/\rho_0 \sim \mathcal{O}(1) \qquad (2e)$$

$$\mu^* = \mu/\mu_0 \sim \mathcal{O}(1) \qquad (2f)$$

$$\vec{g}^* = \vec{g}/g_0 \sim \mathcal{O}(1) \qquad (2g)$$

onde as variáveis com asterisco são variáveis adimensionais. O termo à direita das eq (2a-

$\theta(1)$, significa de ordem de grandeza unitária. A escolha criteriosa das dimensões mais representativas do escoamento, eq. (1a-g), é de fundamental importância, pois o objetivo é tornar todos os termos das eqs de N-S de ordem unitária. Substituindo-se eqs (2a-g) nas eqs de N-S encontra-se.

$$\rho^* \frac{D\vec{V}^*}{Dt} = -\nabla p^* + \frac{\mu_0}{\rho_0 V_0 L} \nabla^2 \vec{V}^* + \frac{gL}{V_0^2} \rho^* \vec{g}^* \quad (3$$

Identificando-se os parâmetros:

número de Reynolds: $Re_L = \dfrac{\rho_0 V_0 L}{\mu_0}$ e

número de Froude $F_r = \dfrac{V_0^2}{gL}$

Equação (3) pode ser reescrita como

$$\rho^* \frac{D\vec{V}^*}{Dt} = -\nabla p^* + \frac{1}{Re_L} \nabla^2 \vec{V}^* + \frac{1}{F_r} \rho^* \vec{g}^* \quad (4)$$

A eq. (4) expressa o balanço entre: os termos convectivos $[\rho^* D\vec{V}^*/Dt \sim \theta(1)]$, as forças de pressão $[\nabla p^* \sim \theta(1)]$, as forças viscosas $[\nabla^2 \vec{V}^* \sim \theta(1)]$ multiplicados pelo parametro $1/Re_L$ e pelas forças de campo $[\rho^* g^* \sim \theta(1)]$ multiplicadas pelo parâmetro ($1/Fr$). Esta última é aplicada somente a escoamentos com superfície livre. Para escoamentos fechados, como exemplo no interior de dutos, a força de campo pode ser incorporada pelo termo de pressão. Definindo-se

$$\hat{p} = p + \rho g z \quad , \quad \text{p/ a gravidade atuando no sentido contrário ao eixo z} \qquad (5)$$

e

$$p^* = \frac{\hat{p} - p_0}{\rho V_0^2} \equiv \frac{p + \rho g z - p_0}{\rho V_0^2} \qquad (6)$$

A eq. (4) pode ser reescrita como

$$\rho^* \frac{D\vec{V}^*}{Dt} = -\nabla p^* + \frac{1}{Re_L} \nabla^2 \vec{V}^* \qquad (7)$$

O número de Reynolds tem o significado físico de expressar a razão entre os termos inerciais e os termos viscosos:

$$\frac{\left| \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} \right|}{\left| \mu \nabla^2 \vec{V} \right|} \simeq Re_L \ , \qquad (8)$$

e através dele, comumente classifica-se os escoamentos de acordo com a importância relativa entre os termos inerciais e viscosos.

7.1 Escoamentos com $Re_L \to \infty$

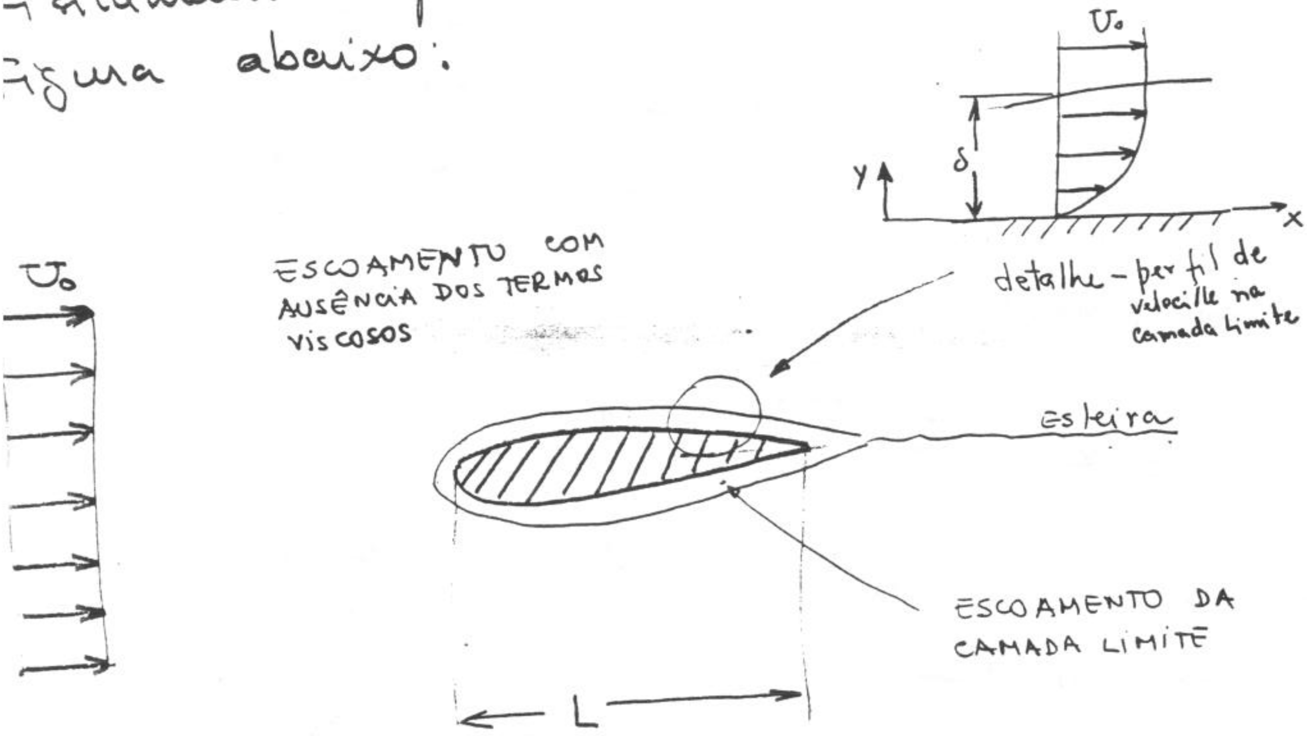
Quando o parametro $Re_L \to \infty$, a eq (7) indica que as forças inerciais são balanceadas pelas forças de pressão apenas, os efeitos viscosos são ausentes. A equação (7), na forma dimensional, torna-se

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}\right) = -\nabla p + \rho g . \qquad (9)$$

Equação (9) é também conhecida como equação de Euler.

Deve-se observar, no entanto, que ao omitir os termos viscosos na eq. (9), por serem ($1/Re_L$) vezes menores que os termos inerciais e de pressão, a equação diferencial parcial, eq (7), transformou-se de segunda para primeira ordem. Isto é, os termos de ordem de derivada superior (termos viscosos) foram omitidos. Isto implica que eq (9) não pode satisfazer as condições de contorno que eq (7) satisfaz; mais especificamente, a condição de não deslizamento não pode ser satisfeita pela eq (9).

isto não invalida a utilidade da (2.11), mas aponta a necessidade de uma correção. Fisicamente o que ocorre é ilustrado na figura abaixo:



Escoamento $Re_L \to \infty$

Devido a condição de não deslizamento no corpo e a presença da viscosidade, inerente a qualquer fluido real, surge uma força viscosa. Seu efeito é confinado numa pequena região δ ao redor do corpo, denominada por camada limite. Pode-se mostrar que a espessura da camada limite é dada por

$$\left(\frac{\delta}{L}\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{Re_L}} \qquad (10)$$

Dentro da camada limite o termo viscoso próximo a fronteira sólida é da mesma ordem de grandeza dos termos inerciais.

Nesta região δ o escoamento [illegible]
do pelas equações da Camada Limite. Estas
são uma aproximação das equações de N-S tal
que sua solução para $y=0$ satisfaz a
condição de não deslizamento na parede e
para $y=\delta$ converge assintoticamente para
a solução das equações de Euler.

7.2 Escoamentos com $Re_L \simeq 1$

Quando o número de Reynolds é de
ordem unitária, a eq (7) indica que os
termos viscosos são da m/ma ordem de grandeza
dos termos inerciais e de pressão. Portanto
o balanço do momento se dá entre o
equilíbrio destas três forças e nenhum
dos termos pode ser omitido da eq. (7).

7.3 Escoamentos com $Re_L \to 0$

Finalmente quando o número de
Reynolds se aproxima de zero eq. (7) indica
que o termo viscoso torna-se $(1/Re_L)$ vezes
maior que os termos inerciais e de pressão.
Como a eq. (7) indica um balanço de momento
aparentemente há um paradoxo porque
a força viscosa é dominante. Analizando-se
eq. (2c) constata-se que, a priori, o termo

e pressão foi tomado como sendo da mesma ordem de grandeza de ρV_0^2. Isto implica em dizer que os termos de inércia e de pressão são de mesma ordem de grandeza, como mostra eq.(7). Porém quando $Re_L \to 0$ a força de inércia é (Re_L) vezes menor que a força viscosa, eq.(8), e portanto o termo de pressão não pode ser escalado com ρV_0^2.

Na verdade, para escoamentos com $Re_L \to 0$, o termo de pressão passa a ser a força motriz do escoamento para vencer a força viscosa que resiste ao escoamento. Neste caso então, é conveniente redefinir eq.(2c) em termos de uma pressão viscosa:

$$p^* = \frac{P - P_0}{\mu \frac{V_0}{L}} \tag{11}$$

Substituindo-se eq(11) juntamente com os adimensionais dados pelas equações (2a), (2b), (2d), (2e), (2f) e (2g) nas equações de N-S encontra-se

$$Re_L \frac{D\vec{V}^*}{Dt} = -\nabla p^* + \nabla^2 \vec{V}^* . \tag{12}$$

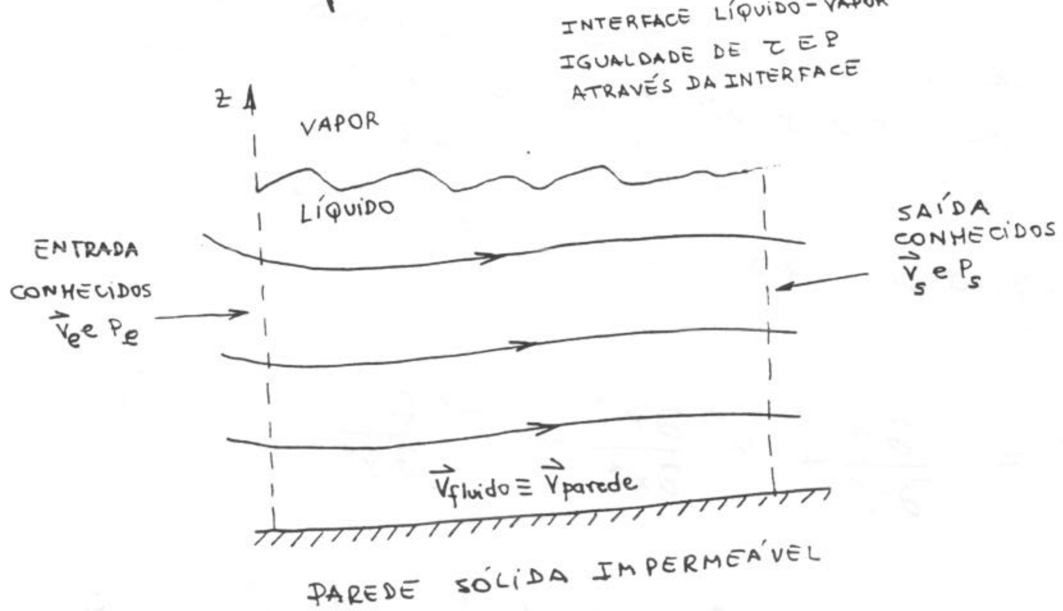
Quando $Re_L \to 0$ eq.(12) pode ser reescrita na forma dimensional como

$$\vec{\nabla} p = \mu \nabla^2 \vec{V} \qquad (13)$$

7.4 Forma Adimensional das Condições de contorno.

Nenhuma análise adimensional é válida sem considerar a forma adimensional das condições de contorno, visto que elas afetam diretamente a solução do problema. Para isto deve-se substituir as equações (1a) a (1g) nas variáveis envolvidas nas condições de contorno.

Considere o escoamento e suas condições de contorno, apresentados na Figura abaixo:



Para a parede sólida impermeável, a condição de não deslizamento $\vec{V}=0$ impõe que

$$\vec{V}^* = 0 \quad \text{na parede} \qquad (14)$$

Para a entrada e saída do domínio, a velocidade adimensional fica sendo:

$$\vec{V}_e^* = \frac{\vec{V}_e}{V_0} \qquad (15a)$$

$$\vec{V}_s^* = \frac{\vec{V}_s}{V_0} \qquad (15b)$$

respectivamente. Por sua vez a pressão para a entrada e saída é obtida utilizando-se eq. (6).

$$P_e^* = \frac{P_e + \rho g z - P_0}{\rho V_0^2} \qquad (15c)$$

$$P_s^* = \frac{P_e + \rho g z - P_0}{\rho V_0^2} \qquad (15d)$$

Finalmente para a interface líquido vapor as condições de contorno próprias são dadas pelas equações (31) e (32) definidas no capítulo 4. Usando-se equações (2a), (2b) e (6) obtêm-se

$$w^* = \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} \qquad (16)$$

$$p^* = C_a + \frac{1}{Fr}\eta^* - \frac{1}{We}\left(\frac{1}{R_x^*} + \frac{1}{R_y^*}\right) \qquad (17)$$

A condição cinemática (16) não contém parâmetros, entretanto a condição da pressão na interface introduz três parâmetros, a saber

Número de Cavitação $\qquad Ca = \dfrac{P_a - P_0}{\rho_0 V_0^2}$

Número de Froude $\qquad Fr = \dfrac{V_0^2}{g L}$

Número de Weber $\qquad We = \dfrac{\rho_0 V_0^2 L}{\gamma}$

O número de Cavitação Ca deixa de ser significativo, a não ser que a pressão de referência P_0 possa ser interpretada como a pressão de vapor do líquido P_v. Isto é, o nível de pressão absoluta no escoamento deixa de ser importante, a menos que a pressão local atinja valores abaixo de P_v, quando então o líquido começa a vaporizar (cavitar). Como regra geral vale que para $Ca < 1$ o escoamento deve ser estudado cuidadosamente para detectar se há ou não sinais de cavitação em áreas de baixa pressão. Para $Ca > 1$ cavitação é pouco provável de ocorrer.

O número de Froude caracteriza a razão entre as forças de inércia e as forças de campo. Ele é fundamental para problemas com superfície livre

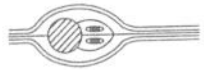
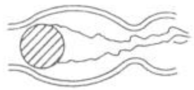
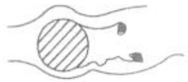
Finalmente o número de Weber caracteriza a razão entre as forças de inércia e a tensão superficial. Tipicamente γ é pequeno (Ar-

água, interface a 40°F, $\gamma = 0.00514$ lbf/ft),
We é muito grande e portanto seu efeito é
desprezível a menos que L seja muito
pequeno ou que as curvaturas (R_x e R_y) sejam
pequenas.

Referências

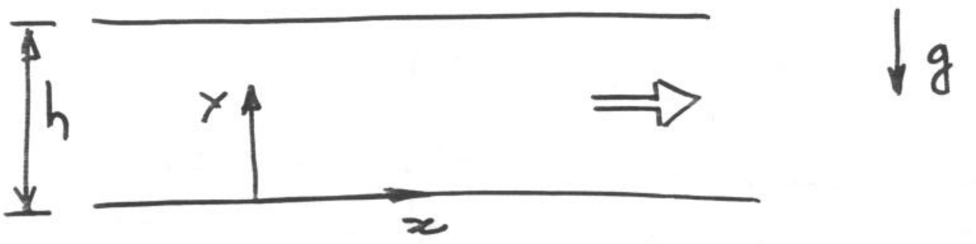
[1] White, F.M. "Viscous Fluid Flow", McGraw
Hill (1974)

Figura 1 - Configuração do escoamento ao redor de um cilindro circular em função do número de Reynolds, segundo GERSTEN (1983).

Re	Regime	Características	Strouhal	Escoamento
Re $\rightarrow$ 0	**Re** muito baixo	Regime permanente, ausência de esteira, simetria longitudinal	–	
3–4 < **Re** < 30–40	Vórtice duplo	Regime permanente, separação e bolha de recirculação.	–	
30 / 40 < **Re** < 80 / 90	Estágio incipiente da esteira de vórtices de Von Kármán	Esteira laminar e instável e presença de recirculação.	**Sr** < 0,14	
80 / 90 < **Re** < 150 / 300	Esteira de vórtices de Von Kármán plenamente desenvolvida	Esteira de vórtices de Von Kármán	0,14 < **Sr** < 0,21	
150 / 300 < **Re** < $1,0x10^5$ / $1,3x10^5$	Regime sub-crítico	Esteira de vórtices instável e escoamento laminar nas proximidades da esteira	**Sr** = 0,21	
$1,0x10^5$ / $1,3x10^5$ < **Re** < $3,5x10^6$	Regime crítico e pós-crítico	Separação laminar, recolamento turbulento, separação turbulenta final, esteira turbulenta	Sem periodicidade dominante	
$3,5x10^6$ < **Re**	Regime super-crítico	Transição para a camada limite turbulenta, separação turbulenta	0,25 < **Sr** < 0,30	

Soluções Exatas
Eq. Navier-Stokes

1.0 Escoamento Entre Placas Paralelas (Couette)



Hipóteses

- Escoamento hidrodinâmicamente desenvolvido, i.e. o perfil de velocidades não varia com x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- Escoamento bi-dimensional

$$w = 0$$

- Da equação da continuidade,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$$

ou

$$v = v(x) \text{ sómente}$$

- Paredes impermeáveis

$$v(x,0) = v(x,h) = 0 \Rightarrow v(x) \equiv 0$$

Aplicando estas hipóteses, a eq. de N-S se reduz a

dir. y: $\quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \qquad (1)$

dir. x: $\quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (2)$

integrando em y a eq. (1)

$$p(x,y) = -\rho g y + p_{ref} + f(x)$$

onde p_{ref} é uma pressão de referência adotada para uma coordenada $(x,y) = (x_o, y_o)$.

A equação do momento na direção x, eq. (2), é uma equação parabólica. Entretanto, para regime permanente, $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$, ela se reduz a:

$$\underbrace{\frac{dp}{dx}}_{\text{grad. Pressão}} = \underbrace{\mu \frac{d^2u}{dy^2}}_{\text{Forças Viscosas}} \qquad (3a)$$

ou em termos de tensão

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\tau}{dy} \qquad (3b)$$

Para resolver eq. (3a) é necessário especificar as condições de contorno.

i) Escoamento entre duas placas planas estacionárias.

$y = 0 \rightarrow u(0) = 0 \quad ; \quad y = h \rightarrow u(h) = 0$ (não deslizamento)

A solução geral p/ (3a) é:

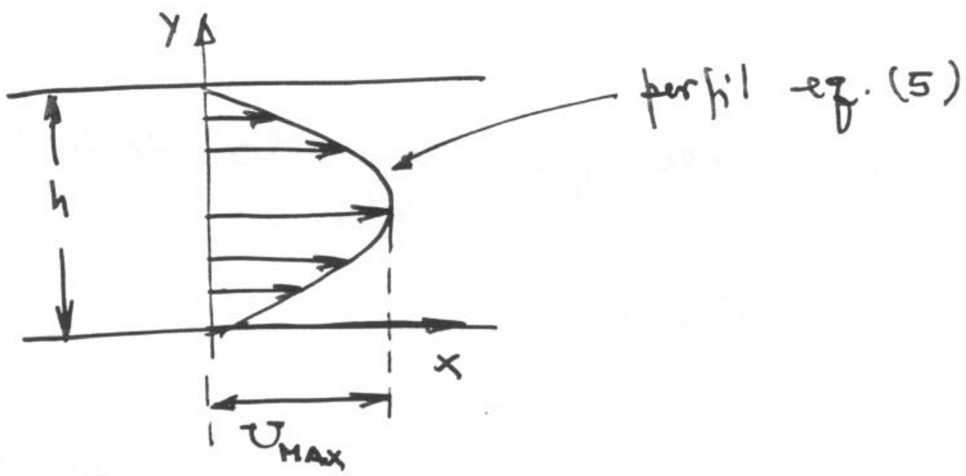
$$u(y) = \frac{(dp/dx)}{\mu}\frac{y^2}{2} + By + C \qquad (4)$$

Aplicando as condições de contorno, eq (4) fica:

$$u(y) = \left(-\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{h^2}{2\mu}\right)\left[\left(\frac{y}{h}\right)\left(1-\left(\frac{y}{h}\right)\right)\right] \qquad (5)$$

Eq. (5) é o perfil de velocidades. Ele é parabólico com a velocidade máxima ocorrendo no centro do canal, $y = \frac{h}{2}$;

$$U_{MAX} = \left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{h^2}{8\mu} \qquad \left(y = \frac{h}{2}\right)$$



A vazão Q é dada por:

$$Q = \int_0^y u(y)\,dy = \left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{h^3}{12\mu} = \frac{2}{3}\,h\,U_{MAX},$$

a velocidade média, $\bar{U}$, é dada por:

$$\bar{U} = \frac{Q}{h} = \frac{2}{3}U_{MAX} \qquad (:$$

substituindo (7) em (5) têm-se:

$$\frac{u(y)}{\bar{U}} = \frac{1}{6}\left(\frac{y}{h}\right)\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)\right] \qquad (8)$$

O perfil de tensões no líquido,

$$\tau_{yx} = -\mu\frac{du}{dy} = -\frac{\mu\bar{U}}{h}\left(1 - 2\left(\frac{y}{h}\right)\right). \qquad (9)$$

A tensão na parede;

$$\tau_w = -\frac{\mu\bar{U}}{h} \qquad (10$$

ii) Placa superior desliza com velocidade U_0 inferior estacionária e $dp/dx \equiv 0$

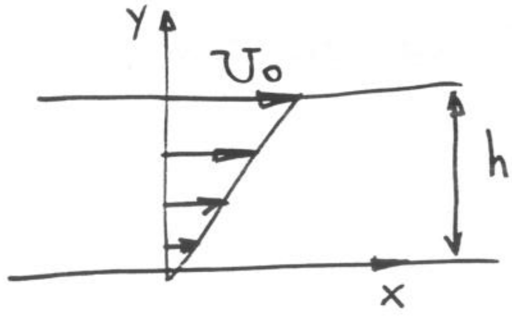
condições de contorno:

$y=0 \rightarrow u=0$; $y=h = u=U_0$

substituindo estes c.c. na ~~solução~~ geral, eq. 8

obtém-se o perfil de velocidades,

$$u(y) = U_0\left(\frac{y}{h}\right) \qquad (11$$



O perfil de velocidades é independente da viscosidade do fluido porque o atrito viscoso líquido entre as laminas de fluido é nulo. Isto é decorrente do gradiente de pressão ser nulo, dp/dx; assim, de acordo com a eq (3b), $d\tau/dy \equiv 0$

iii) Um caso mais geral trata da combinação linear das duas condições de contorno anteriores. Considere agora que o fluido se movimenta entre as placas às custas de um gradiente de pressão e do movimento linear das placas.

$$y=0 \rightarrow u=0 \; ; \; y=h \rightarrow u=U_0 \; e \; \frac{dp}{dx} \neq 0$$

A solução deste caso também é uma combinação linear da solução dos casos anteriores, isto é, eq(5) + eq(11) (porque?)

$$u(y) = U_0\left(\frac{y}{h}\right) + \left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{h^2}{2\mu}\left[\left(\frac{y}{h}\right)\left(1-\left(\frac{y}{h}\right)\right)\right] \qquad (1$$

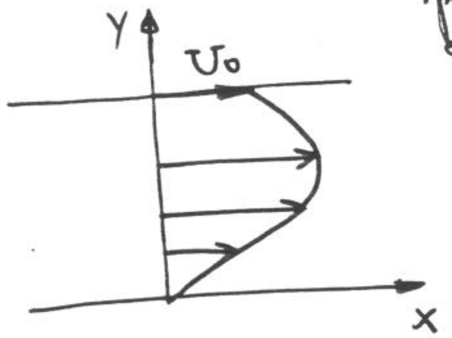
Note que eq. (12) possui duas escalas para velocidades. U_0 que representa a velocidade de deslizamento da placa e o produto $\left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{h^2}{2\mu}$ que representa uma velocidade devido ao gradiente de pressão imposto. Chamando

$$U_p = \left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{h^2}{2\mu}$$

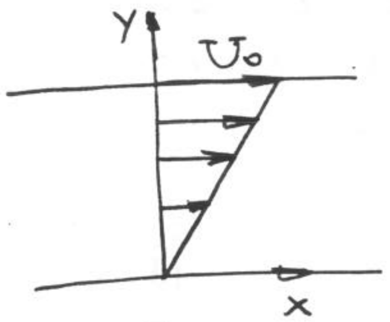
Eq (12) fica sendo:

$$u(y) = U_0\left(\frac{y}{h}\right) + U_p\left(\frac{y}{h}\right)\left(1 - \left(\frac{y}{h}\right)\right) \qquad (12a)$$

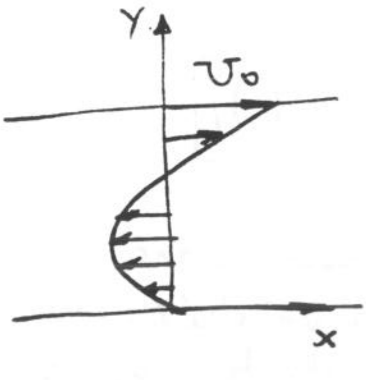
a) Se $U_p > 0 \Rightarrow$ grad. de pressão favorável ao escoamento. Perfil com velocid. positivas em toda secção y do canal



b) Se $U_p \equiv 0$

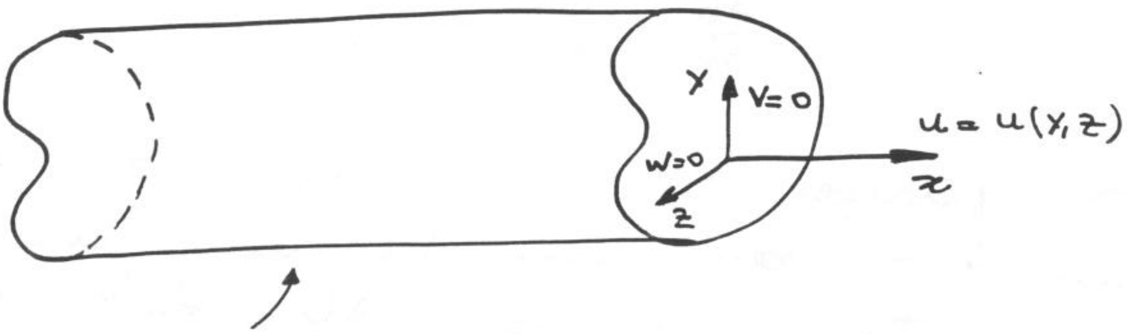


c) Se $U_p < 0 \Rightarrow$ grad. de pressão desfavorável ao escoamento. O perfil de velocidades pode ter ~~pontos~~ regiões onde o escoamento é reverso.



2.0 Escoamentos Desenvolvidos em Regime Permanente em Dutos

Talvez a classe mais importante de soluções exatas é aquela para escoamentos em dutos com secções transversais mas constantes, como ilustrado abaixo:



duto de secção trans versal constante

O significado do termo desenvolvido se aplica a regiões distantes da entrada onde os efeitos de aceleração e de variação da tensão de cisalhamento são desprezíveis ou nulos. Nestas condições a velocidade é puramente axial e varia somente com as coordenadas laterais, isto é, $w = v = 0$ e $u = u(y,z)$

Estas condições fazem com que a equação da continuidade se reduza a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \;, \qquad (\;$$

a do momento na direção em termos da tensão

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \qquad (14a$$

ou em termos de velocidade

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (14b$$

A equação do momento na direção y e z se reduzem a:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} \qquad (15)$$

Estas equações (13) a (15) indicam que a pressão total varia com ⊗ somente em escoamentos desenvolvidos. Além disto, como u é uma função de y e z somente isto implica que, pela equação do momento na direção x (eq. 14), o gradiente dp/dx deve ser uma constante.

A equação (14) é a equação básica para escoamentos desenvolvidos em dutos. A condição de contorno ~~se aplica~~ de não deslizamento se aplica ao longo de toda superfície do duto, $u_w = 0$. Equação 14 é a equação clássica de Poisson. e é exatamente equivalente ao problema de ~~torsão~~ tensão torcional em elasticidade.

Deve-se observar que na eq. (14) o parâmetro físico densidade (ρ) não aparece. Isto é decorrente do fato que os termos convectivos ou inerciais são nulos.

Foi visto que o número de Reynolds expressa a razão entre as forças de inércia e forças viscosas. Entretanto, para escoamentos desenvolvidos em dutos, o parâmetro Reynolds

$$Re_D = \frac{\rho U D}{\mu}$$

perde seu significado físico porque os termos inerciais são nulos! O seu extensivo uso que aparece na literatura aplica-se para especificar os limites de estabilidade do escoamento. Escoamentos em dutos com Re_D menor que 2000 são laminares.

Tubo de secção circular: Escoamento de Hagen-Poiseuille (1840)

Em coordenadas cilíndricas a eq. (14) ~~...~~ torna-se

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) \qquad (16$$

para um fluido Newtoniano,

$$\tau_{rz} = \mu \frac{\partial u}{\partial r} \qquad (17$$

substituindo (17) em (16),

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) \qquad (18)$$

solução geral da equação (18) é:

$$u(r) = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{r^2}{4} + A\ln r + B. \qquad (19)$$

Quando $r = 0$, a velocidade no centro do tubo é finita portanto $A \equiv 0$.

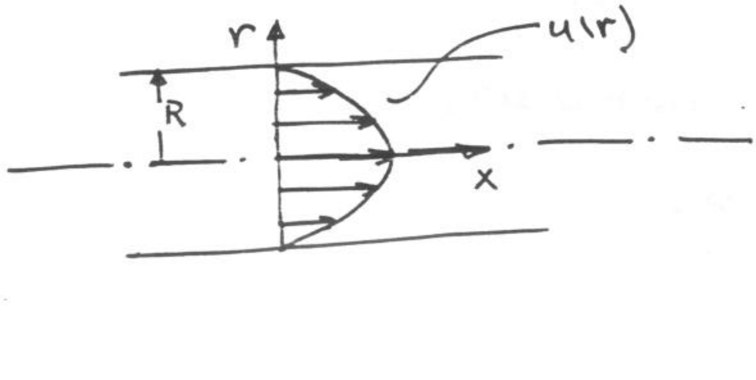
Quando $r = R$; $u(R) = 0$, não deslizamento, portanto

$$B = -\frac{1}{4\mu}\cdot\left(-\frac{dp}{dx}\right)R^2$$

Substituindo-se os valores dos constantes A e B na equação (19) chega-se ao perfil de velocidades no tubo,

$$u(r) = \left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{R^2}{4\mu}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad (20)$$

Equação (20) gera o celebrado perfil de velocidades parabólico, característico do escoamento laminar em dutos circulares.



A velocidade máxima ocorre quando r=0,

$$u(0) = U_{MAX} = \frac{R^2}{4\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right). \qquad (21)$$

A velocidade média

$$\overline{U} = \frac{2\pi \int_0^R r\,u(r)\,dr}{\pi R^2} = \frac{1}{2}\,U_{MAX} \qquad (22$$

Substituindo (22) em (20) obtém-se o perfil de velocidades em função da velocidade média do escoamento, ou se preferir, em termos da vazão Q uma vez que $Q = \pi R^2 \overline{U}$

$$u(r) = 2\overline{U}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right), \qquad (23$$

ou, em forma adimensional

$$\frac{u(r)}{\overline{U}} = 2\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right). \qquad (23$$

A tensão de cisalhamento é obtida substituindo-se eq(23) na eq. (17)

$$\tau_{rz} = 4.\left(\frac{\mu\,\overline{U}}{R}\right)\left(\frac{r}{R}\right) \qquad (24$$

Note que pela eq(24) o perfil de tensões é linear, variando de $4\left(\frac{\mu\overline{U}}{R}\right)$ para a parede (r=R) a zero no centro do tubo

De acordo com (24) espera-se que a tensão de cisalhamento na parede τ_w seja proporcional a $\bar{U}$ (escoamento laminar); para escoamentos turbulentos, τ_w é grosseiramente proporcional a densidade (ρ) e ao quadrado da velocidade média, $\bar{U}^2$. Então, antecipando escoamento turbulento, é comum adimensionalizar τ_w com a pressão dinâmica do tubo, $\frac{1}{2}\rho\bar{U}^2$, entretanto esta não é uma boa escala para escoamentos laminares porque $\tau_w \sim \bar{U}$. Pior ainda, dois tipos de adimensionalização para a tensão na parede foram assimilados, de maneira irrevogável, pela literatura. sem dúvida, permanecerão para sempre. Elas são:

$$\lambda = \frac{8\tau_w}{\rho\bar{U}^2} \quad \text{Fator de Atrito de Darcy} \qquad (25a$$

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho\bar{U}^2} = \frac{1}{4}\lambda \quad \text{Fator de Atrito de Fanning ou Coef. de Atrito} \qquad (25$$

Aceitando isto como fato, λ ou C_f podem ser calculados a partir da eq. (24),

$$\lambda = \frac{64}{Re_D} \quad \text{e} \quad C_f = \frac{16}{Re_D} \qquad (26$$

As relações em (26) proporcionam uma espécie de "continuidade" nas expressões que avaliam λ ou c_f à medida que o escoamento se torna turbulento, porém elas dão uma idéia completamente equivocada da física do problema porque introduzem o parâmetro Reynolds para um regime (laminar) que de fato não depende de Reynolds.

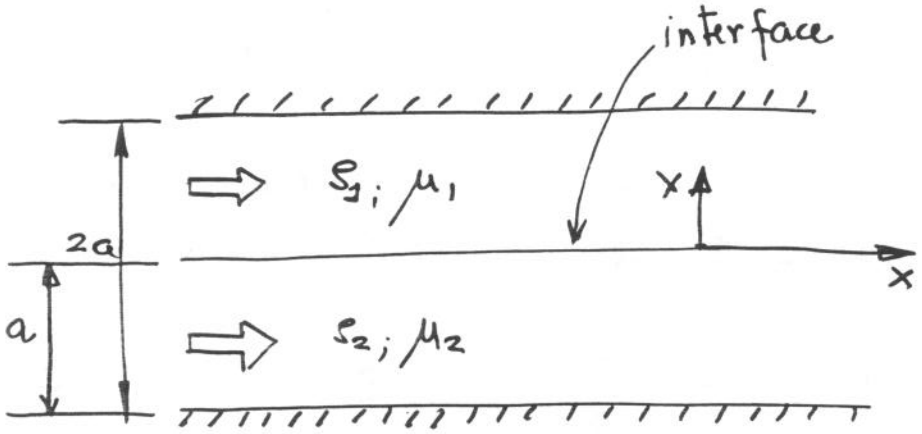
Para finalizar é útil estimar a vazão em função do gradiente de pressão,

$$Q = \pi R^2 \bar{U} = \frac{\pi R^4}{8\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right) \qquad (2$$

Equação (27) mostra que a vazão é linear com $\left(-\frac{dp}{dx}\right)$, inversamente linear com μ e proporcional à quarta potência com o raio do tubo. É interessante ressaltar que para uma mesma vazão Q se o raio aumenta de um fator 2 o gradiente de pressão necessário para bombear a mesma vazão reduz para 1/8 do necessário!

) Escoamento de Dois Fluidos em um Canal

Dois líquidos imiscíveis de densidade ρ_1 e ρ_2 e viscosidades μ_1 e μ_2 estão escoando em um canal bi-dimensional. A altura do canal é <u>2a</u> e cada líquido ocupa a metade do espaço,



calcule o perfil de velocidades dado o gradiente de pressão. (dp/dx).

⊗ momento
$$\begin{cases} \mu_1 \dfrac{d^2 u_1}{dy^2} = \dfrac{dp}{dx} & (21a) \\[2ex] \mu_2 \dfrac{d^2 u_2}{dy^2} = \dfrac{dp}{dx} & (21b) \end{cases}$$

c.c. na interface; $(y=0)$
$$\begin{cases} u_1 = u_2 \\[1ex] \mu \dfrac{du_1}{dy} = \mu \dfrac{du_2}{dy} \end{cases}$$

na parede $y = a \rightarrow u_1 = 0$

$y = -a \rightarrow u_2 = 0$

A solução das equações (21) é dada pela eq. (4),

$$U_1(y) = \frac{1}{2\mu_1}\left(\frac{dp}{dx}\right)y^2 + \frac{C_1 y}{\mu_1} + C_2 \qquad (22a)$$

$$U_2(y) = \frac{1}{2\mu_2}\left(\frac{dp}{dx}\right)y^2 + \frac{C_3 y}{\mu_2} + C_4 \qquad (22b)$$

aplicando os c.c. vem que: p/ $y=0$ $U_1 = U_2$ logo $C_2 = C_4$, também p/ $y=0$ há a continuidade de de tensões na interface

$$\mu_1 \left.\frac{dU_1}{dy}\right|_{y=0} = \mu_2 \left.\frac{dU_2}{dy}\right|_{y=0} \Rightarrow C_3 = C_1 .$$

Para $y=-a$; $U_2 = 0 = \frac{1}{2\mu_2}\left(\frac{dp}{dx}\right)a^2 - \frac{C_3 a}{\mu_2} + C_4$

$y=+a$; $\underbrace{U_1 = 0}_{\text{não deslizamento}} = \frac{1}{2\mu_1}\left(\frac{dp}{dx}\right)a^2 + \frac{C_1 a}{\mu_1} + C_2$

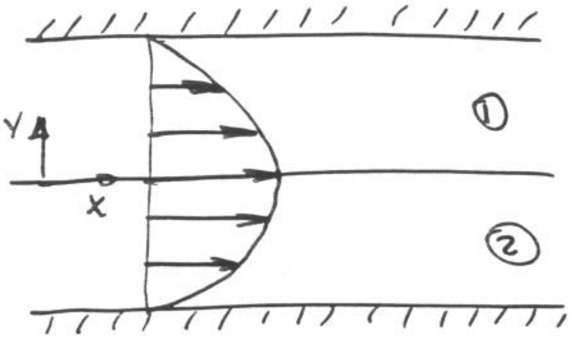
Resolvendo o sistema acima para C_1 e C_2 vem que

$$C_1 = C_3 = \frac{a}{2}\left(\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\right) \qquad (23a)$$

$$C_2 = C_4 = -\frac{a^2\,(dp/dx)}{(\mu_1 + \mu_2)} \qquad (23b)$$

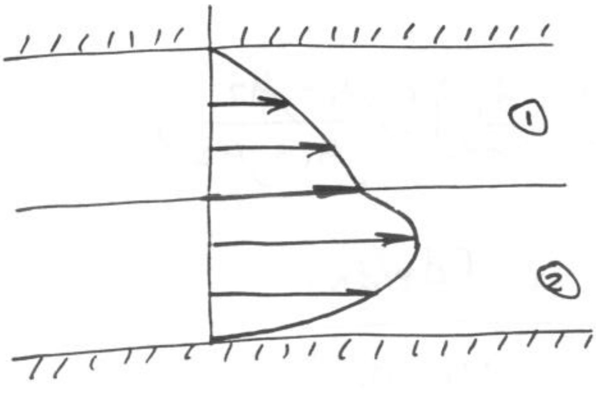
substituindo eq. (23) na eq. (22) pode-se determinar o perfil de velocidades.

- se $\mu_1 = \mu_2$

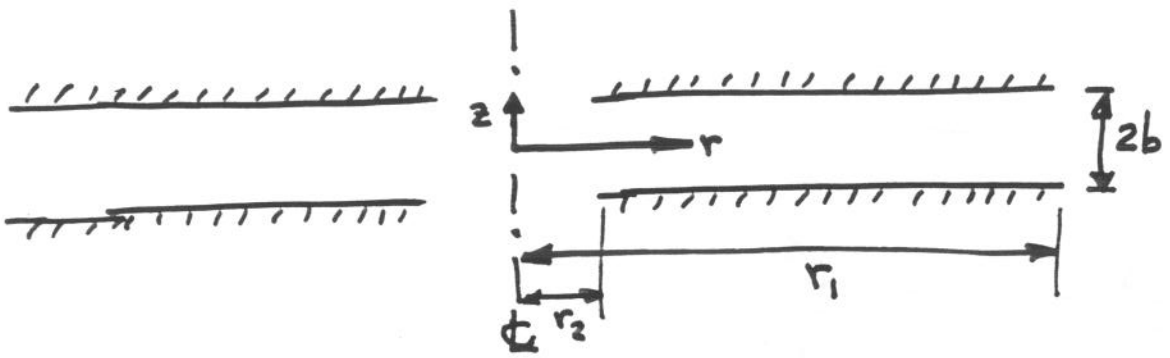


- se $\mu_2 < \mu_1$ o líquido ② move-se relativ mais rápido do que o líquido ①. Portanto líquido ② está sendo desacelerado pelo líquido ① na interface pela ação da diferen de viscosidade,

$$\frac{(du_1/dy)_{y=0}}{(du_2/dy)_{y=0}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} < 1$$



4.0 Escoamento Entre dois Discos Paralelos e Estacionários.



Considerando que o escoamento se dá somente na direção radial, isto v_θ e v_z nulos, na região $r_1 \leq r \leq r_2$ e que o fluido é Newtoniano e incompressível,

- Eq. Continuidade $\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0 \therefore rv = \text{const.}$

- A eq. do momento na direção (r);

$$\rho\left(v\frac{\partial v}{\partial r} + \underbrace{\cancel{w\frac{\partial v}{\partial z}}}_{0}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)}_{0}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]$$

Da equação da continuidade,

$$r.v = \phi(z).$$

Re-escrevendo a equação do momento em termos de ϕ;

$$-\rho\frac{\phi^2}{r^3} = -\frac{dp}{dr} + \frac{\mu}{r}\frac{d^2\phi}{dz^2} \qquad (23)$$

derivando a eq. do momento em relação a (z)

$$\frac{d}{dz}\left(-\frac{\rho\phi^2}{r^3}\right) = \underbrace{\cancel{\frac{d}{dz}\left(\frac{dp}{dr}\right)}}_{0} - \frac{\mu}{r}\frac{d^3\phi}{dz^3}$$

$$-\frac{2\rho}{r^3}\phi\frac{d\phi}{dz} = -\frac{\mu}{r}\frac{d^3\phi}{dz^3}$$

ou

$$\phi = \frac{\phi'''}{\phi'}\frac{r^2\mu}{2\rho} \qquad (24)$$

mas por hipótese, v_θ e w são nulos e só existe vel. na direção radial v. Isto levou ao fato que:

$$\phi = \phi(z) \quad \text{(eq. da continuidade)},$$

mas da equação (24) vê-se que $\phi = \phi(r,z)$ em contradição com a eq. da continuidade.
Este conflito só é resolvido se os termos inerciais do escoamento forem desprezíveis isto é,

$$\frac{\dfrac{\rho\phi^2}{r^3}}{\dfrac{\mu}{r}\dfrac{d^2\phi}{dz^2}} << 1$$

do contrário não se pode afirmar que v_θ e w são nulos e, consequentemente, $\phi = \phi(z)$.

Para escoamentos onde os termos inerciais são desprezíveis;

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\mu}{r} \frac{d^2\phi}{dz^2}$$

logo

$$\phi(z) = \frac{\Delta p}{2\mu \ln(r_2/r_1)} z^2 + c_1 z + c_2$$

onde Δp é a diferença de pressão entre a entrada e saída dos discos $r_1 \leq r \leq r_2$ e c_1 e c_2 são constantes determinados através das c. c. :

$$z = -b \quad ; \quad \phi(-b) = 0$$
$$z = +b \quad ; \quad \phi(+b) = 0$$

$$v \cdot r = \phi(z) = \frac{\Delta p}{2\mu \ln(r_2/r_1)} \cdot \left[1 - \left(\frac{z}{b}\right)^2 \right]$$

A vazão;

$$Q = 2\pi \int_{-b}^{+b} \phi(z)\, dz = \frac{4\pi \Delta p\, b^3}{3\mu \ln(r_2/r_1)}$$

Competição:
Difusão x Convecção

COMPETIÇÃO ENTRE DIFUSÃO & CONVECÇÃO

O transporte de uma propriedade (momento, vorticidade, velocidade, temperatura, energia cinética, etc) pode ocorrer por meio de dois mecanismos: Difusão e Convecção.

No mecanismo de difusão o transporte da propriedade é proporcional ao gradiente da propriedade multiplicado por uma constante; a lei de Fick:

$$\text{DIFUSÃO} = \Gamma \frac{d\phi}{dn}$$

Por sua vez, o mecanismo de convecção realiza o transporte da propriedade devido ao movimento do fluido:

$$\text{CONVECÇÃO} \quad = \rho U \phi$$

Estes dois mecanismos podem ocorrer simultaneamente em fenômenos de Mecânica dos Fluidos. A predominância de um mecanismo sobre o outro conduz a fenômenos distintos: campo de velocidades, pressão, natureza da equações (elíptica/parabólica)

Uma comparação entre os mecanismos é obtida por meio de estimativas da ordem de magnitude dos mecanismos:

$$\frac{\text{CONVECÇÃO}}{\text{DIFUSÃO}} = \frac{\rho U \phi}{\Gamma\, d\phi / dn} \approx \frac{\rho U \phi}{\Gamma(\phi\ L)} = \frac{\rho U L}{\Gamma}$$

Γ	$\dfrac{\rho UL}{\Gamma}$	
μ	$\dfrac{\rho UL}{\mu}$	**Re**
α	$\dfrac{\rho UL}{\alpha} = \dfrac{UL}{\nu}\dfrac{\nu}{\alpha}$	**Re.Pr = Pe**
D	$\dfrac{\rho UL}{D} = \dfrac{UL}{\nu}\dfrac{\nu}{D}$	**Re.Sc = Sh**

Onde

μ **viscosidade dinâmica,**

α **difusividade térmica ($k/\rho C_p$)**

D difusividade mássica de um componente

Pr n. de Prandtl

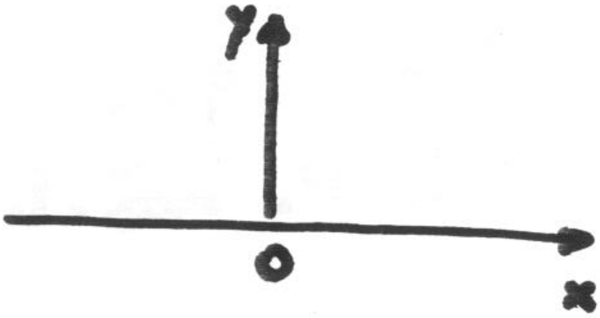
Pe n. Peclet

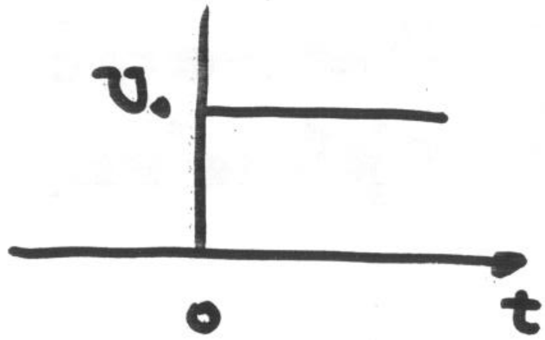
Sc n. Schmidt

Sh n. Sherwood

1º Problema de Stokes → Difusão Pura

Placa plana infinita subitamente acelerada





$$u(0,t) = \begin{cases} 0 & \text{p/ } t \leq 0 \\ U_0 & \text{p/ } t > 0 \end{cases}$$

Sem efeitos de borda, só existe velocidade na dir. x; i.e., $v = w = 0$ e $\frac{dp}{dx} = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ Eq. difusão (parabólica)

$$\text{c.c.} \begin{cases} u(\infty,t) = 0 \\ u(0,t) = U_0 \end{cases}$$

$$\text{c.I.} \; \{ \; u(y,0) = 0$$

<u>Método solução</u> — a E.D.P. é linear, sua solução pode ser obtida por transf. Laplace. Pode-se obtê-la também por métodos de transformações similares que são aplicáveis a E.D.P. não-linear

Existe uma transformação de variáveis que reduza o número de var. independentes de duas para uma?

$$u(y,t) \rightarrow u(\eta) \quad \text{onde } \eta = f(y,t)$$

Se existir a transformação o número de C.C. e C.I também irá reduzido de $3 \rightarrow 2$. Daí a necessidade das C.C. e C.I. serem similares

1 seja $\eta = c\, y^a t^b$ { c, a e b são constantes arbitrárias — graus liberdade p/ buscar sol. similar

- $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{du}{d\eta} \cdot \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{du}{d\eta} \cdot \dfrac{b \cdot \eta}{t}$

- $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{du}{d\eta} \cdot a\, c\, y^{a-1} \cdot t^b$

- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{d^2 u}{d\eta^2}\, a^2 . c^2 . y^{2(a-1)} . t^{2b} + \dfrac{du}{d\eta}\, a(a-1)\, c\, y^{a-2} . t^b$

combinando as expressões acima na E.D.P. :

$$\underbrace{\dfrac{du}{d\eta} \cdot \dfrac{b\eta}{t}}_{\partial u/\partial t} = \nu \underbrace{\left[\dfrac{d^2 u}{d\eta^2}\, a^2 c^2 y^{2(a-1)}\, t^{2b} + \dfrac{du}{d\eta}\, a(a-1)\, c\, y^{a-2} t^b \right]}_{\partial^2 u/\partial y^2}$$

para haver similaridade a Eq. deve depender de $\underline{\eta}$ somente.

A escolha dos coef. $\underline{a}$ e $\underline{b}$ que satisfazem esta exigência

$$a = 1 \quad e \quad b = -1/2$$

5/ juntos

$$\eta = c\,y/\sqrt{t}\,,$$

e $$\frac{d^2U}{d\eta^2} + \frac{\eta}{2\nu c^2}\cdot\frac{dU}{d\eta} = 0$$

fazendo $2\nu c^2 = 1/2$ (c const. arb.)

$$\frac{d^2U}{d\eta^2} + 2\eta\frac{dU}{d\eta} = 0 \quad \& \quad \eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$$

C.C. e C.I.
$$\begin{cases} u(0,t) = u(\eta=0) = U_0 \\ u(\infty,t) = u(\eta=\infty) = 0 \\ u(y,0) = u(\eta=\infty) = 0 \end{cases}$$

condições similares!

Eq. transformada satisfaz somente $\underline{2}$ c.c.. O problema original possuía $\underline{3}$. Isto é possível pq. elas são similares!

x

Integração da Equação

$$\frac{\frac{d}{d\eta}\left(du/d\eta\right)}{du/d\eta} = -2\eta \rightarrow d\left(\ln \frac{du}{d\eta}\right) = -2\eta\, d\eta$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{du}{d\eta}\right) = -\eta^2 + \ln C_1 \rightarrow \frac{du}{d\eta} = C_1 e^{-\eta^2}$$

$$\rightarrow u(\eta) = C_1 \int_0^{\eta} e^{-\xi^2}\, d\xi + C_2$$

Função Erro $\quad \mathrm{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\xi^2}\, d\xi \quad \begin{cases} \mathrm{erf}(0) = 0 \\ \mathrm{erf}(\infty) = 1 \end{cases}$

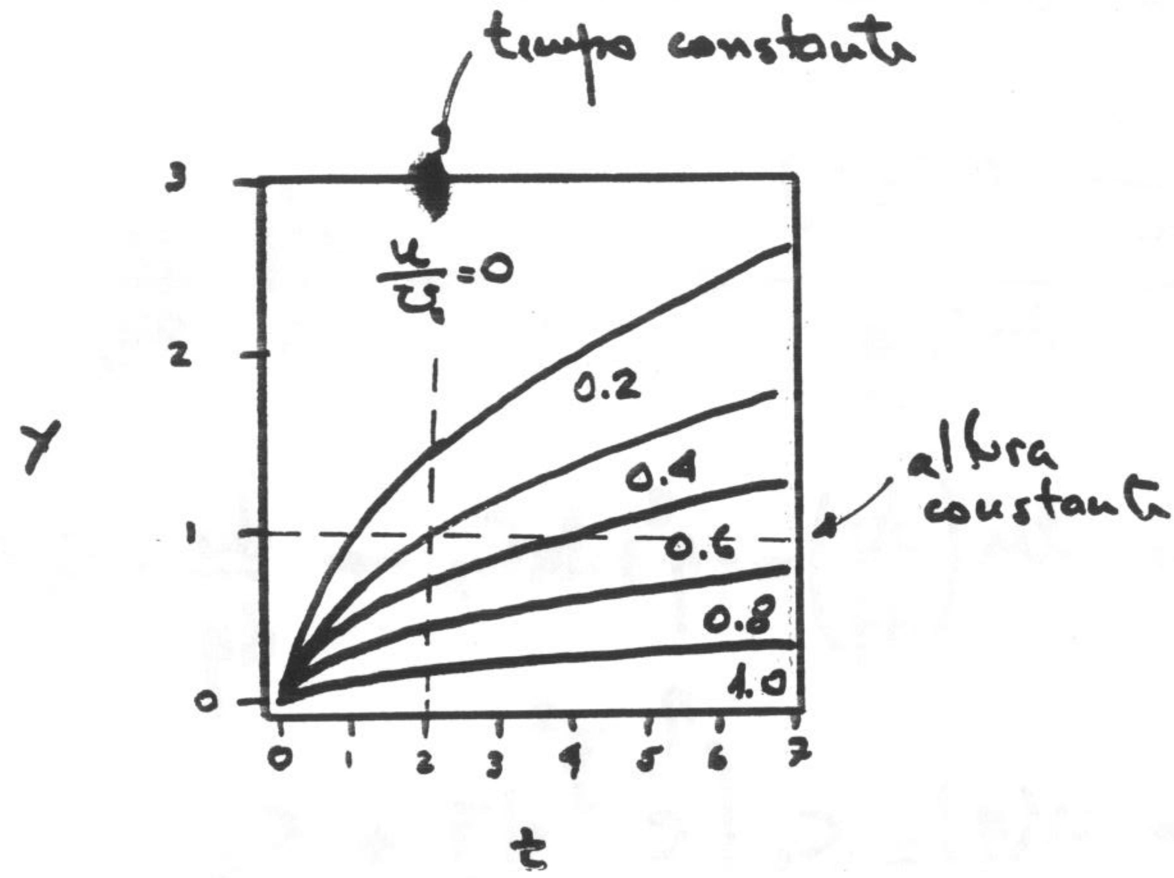
$$u(0) = 0 + C_2 = U_0$$

$$u(\infty) = C_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 1 + U_0 = 0$$

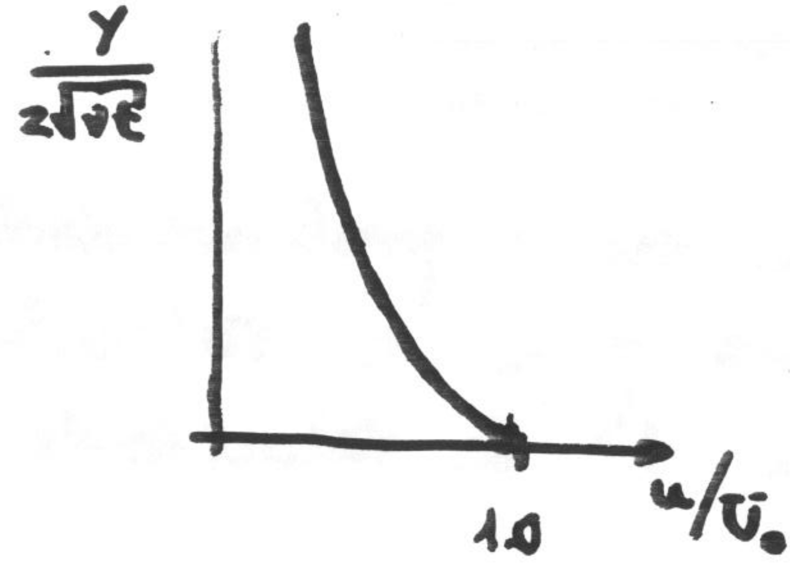
$$\therefore C_2 = U_0 \;\&\; C_1 = -U_0\, 2/\sqrt{\pi}$$

$$\boxed{u(\eta) = U_0 \left(1 - \mathrm{erf}(\eta) \cdot \right]}$$

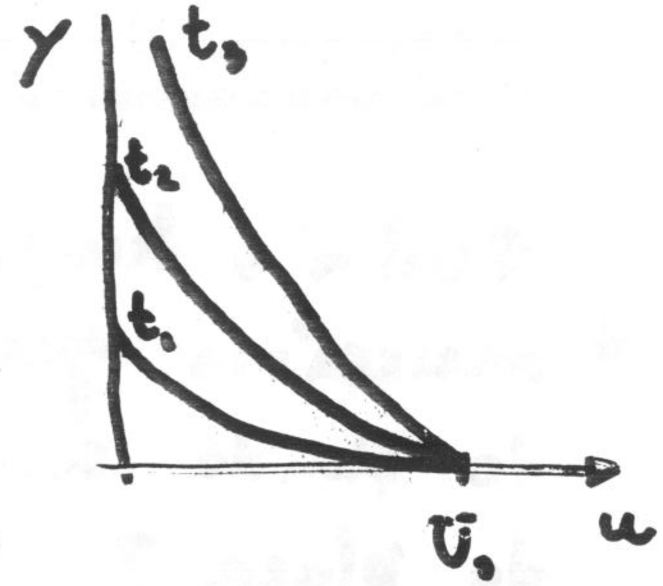
9/



$$\frac{u}{U_0} = \left(1 - \mathrm{Erf}\left(Y/2\sqrt{\nu t}\right)\right)$$



Domínio Transf.



Domínio físico

O deslocamento U_0 da placa é transmitido às camadas de fluido adjacentes no tempo e no espaço (dir. y) pelo mecanismo de difusão!

O espaço e o tempo estão combinados na vár. de similaridade

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$$

Espessura de penetração

Qual é o tempo ou a profundidade δ necessária para que a velocidade do fluido seja 1% da velocidade da placa?

$$\frac{u}{U_0} = 0.01 \rightarrow \left(1 - \operatorname{erf}(\eta^*)\right) = 0.01$$

$$\text{ou} \quad \operatorname{erf}(\eta^*) = 0.99 \rightarrow \eta^* = 1.83$$

$$\eta^* = 1.83 = \frac{\delta}{2\sqrt{\nu t}}$$

$$\delta = 3.66\sqrt{t.\nu}$$

A difusão da vel. se propaga a uma distância proporcional a raiz quadrada do produto da visc. cinemática e do tempo.

Ex. ar $\nu = 1.5 \times 10^{-5}\ m^2/s$ $\quad \delta \simeq 11\ cm \quad t = 60\ seg$

DIFUSÃO

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$ **Difusão de Velocidade**

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$$ **Difusão de Vorticidade**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$ **Difusão de Temperatura**

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$ **Difusão de Concentração (massa)**

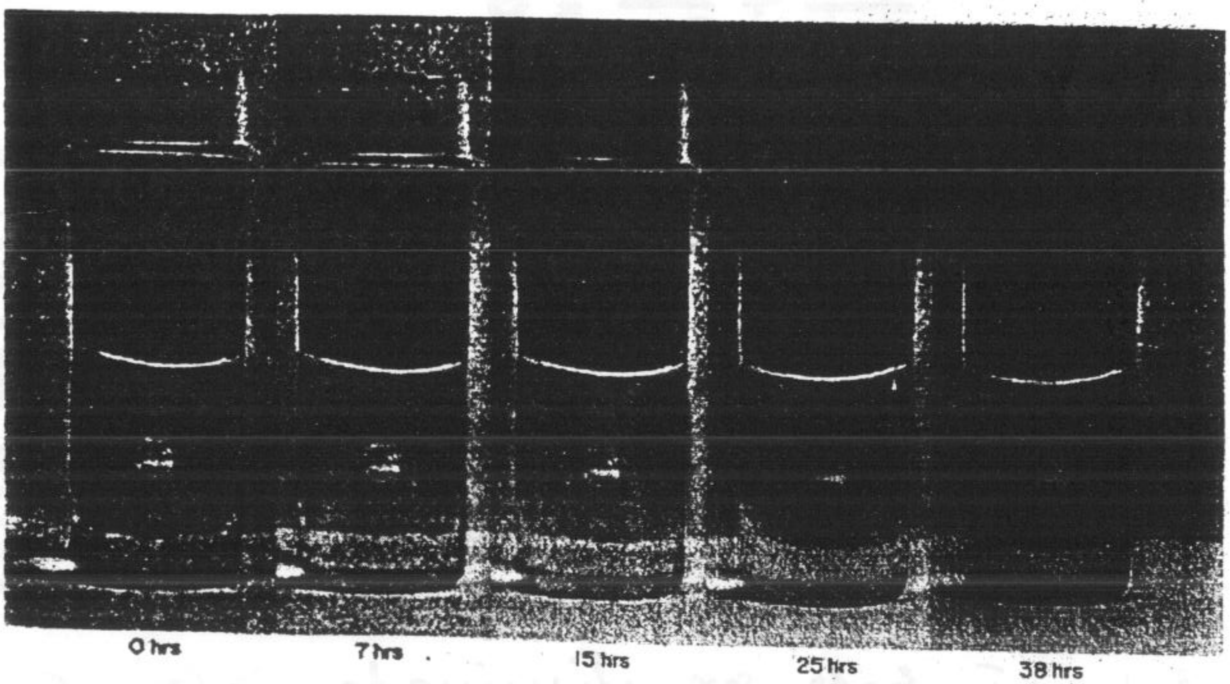
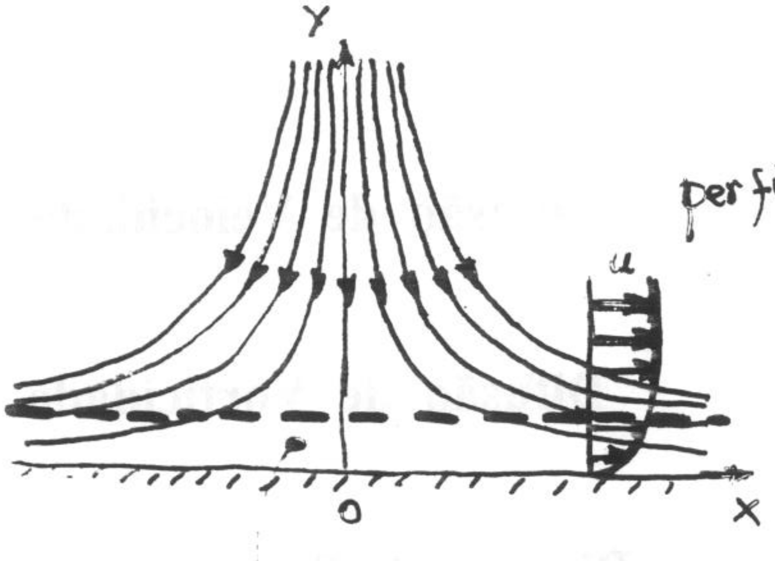


Figure 9.2 Vertical diffusion of grenadine syrup in water.

Hiemenz (1911) escoamento vis. estagnação 2-D



Eq. Massa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Eq. Momento:

$$(X) \quad \overbrace{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}}^{\text{convec. } u} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \overbrace{\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}^{\text{difusão } u}$$

$$(Y) \quad u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

A pressão pode ser eliminada $\frac{\partial}{\partial y}(X) - \frac{\partial}{\partial x}(Y)$

3

Na parede o fluido está impedido de ganhar velocidade mas não rotação. Portanto espera-se que a vorticidade concentre-se próximo à parede.

Para uma região afastada da influência da parede a vorticidade deve ser nula → $\omega = 0$ isto caracteriza escoamento irrotacional!

$$\vec{V} = \nabla\phi \rightarrow \omega = \nabla \times \vec{V} \equiv 0$$

O campo vel. pode ser previsto por uma função potencial

$$\phi = \frac{k}{2}\left(x^2 - y^2\right)$$

$$\psi = kxy$$

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = kx$$

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -ky$$

$$\omega \equiv 0$$

4 A existência da condição de não-deslizamento deverá mudar a dependência de (u, v) na dir. y mas não é evidente que a dependência de (u, v) em x altere. Vamos verificar se existe uma solução:

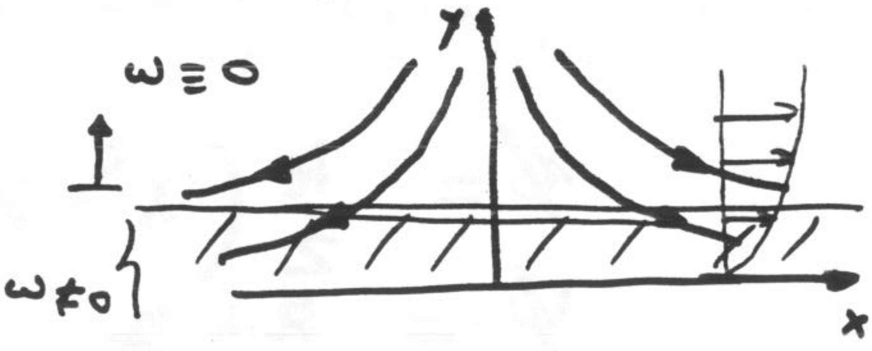
$$\psi_\omega = x\, f(y)$$

$$v = -f(y)$$

$$u = x \cdot f'(y)$$

$$\omega = -x \cdot f''(y)$$

condições contorno



$y = 0 \rightarrow u = 0 \rightarrow f'(0) = 0$

$\qquad\qquad v = 0 \rightarrow f(0) = 0$

$y \rightarrow \infty \quad u = kx \rightarrow f(y) = ky$

$\qquad\qquad \omega = 0 \rightarrow f''(\infty) = 0$

$$\underbrace{u\frac{\partial\omega}{\partial x}+v\frac{\partial\omega}{\partial y}}_{\text{convecção vorticidade}} = \underbrace{\nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)}_{\text{difusão vorticidade}}$$

$$\omega = \left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)$$

onde

ψ é a função corrente

substituindo estas definições na eq. da vorticidade encontra-se

$$f''' + \frac{k}{\nu}\left(ff'' - f'^2\right) = \frac{k}{\nu}$$

A eq. acima mostra que Hiemenz obteve similaridade! A var. x não aparece! Ela transformou-se em uma E.D.O. em y.

Esta eq. deve ser adimensionalizada p/ eliminar dependência de k e ν

$$\eta = y/\delta$$

$\delta \sim \sqrt{\nu t}$ difusão vorticidade

$t \sim L/U_0$ escala tempo convectiva seguindo uma partícula

$U_0 \sim kL \rightarrow t \sim 1/k$

$\therefore\ \delta \sim \sqrt{\nu/k}$ = Escala p/ dimensão $\underline{y}$!

$$\eta = y \cdot \sqrt{\frac{k}{\nu}} \quad e \quad \psi = x\,F(\eta)\sqrt{k\nu}$$

6 .

na forma adimensional

$$u = kx\,F'(\eta) \quad e \quad v = -F(\eta)\sqrt{k\nu}$$

$$\begin{cases} f'(y) = F' \cdot \dfrac{d\eta}{dy} = + F' \\ f''(y) = \dfrac{d}{dy}\left(f'\right) = (\nu k)^{1/2} \cdot \dfrac{k}{\nu} F'' \\ f'''(y) = \dfrac{d}{dy}\left(f''\right) = \dfrac{k^2}{\nu} F''' \end{cases}$$

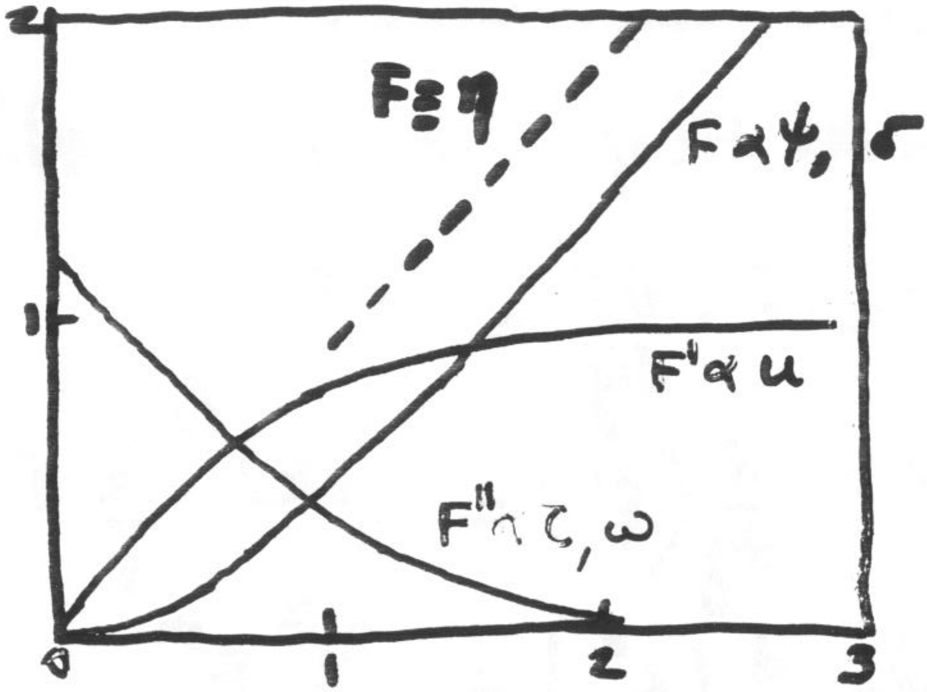
e eq. transformada:

$$F''' + F F'' + 1 - F'^2 = 0$$

$$y = 0 \rightarrow u = v = 0 \rightarrow F(0) = F'(0) = 0$$

$$y \rightarrow \infty \rightarrow u = kx \rightarrow F'(\infty) = 1.$$

7)



$$\eta = y\sqrt{\frac{k}{\nu}}$$

$u = kx\,F'(\eta)$ ou $\dfrac{u}{U_0} = F'(\eta)$; $U_0 = kx$

note que $\eta \to \infty$ $F'(\infty) \to 1$ e $u = U_0$

$v = -\sqrt{\nu k}\cdot F(\eta)$ ou $\dfrac{v}{U_0} = \dfrac{F(\eta)}{\sqrt{Re_x}}$; $Re_x = \dfrac{U_0 x}{\nu}$

note que $\eta \to \infty$ $F(\eta) \to \eta$ e $v = -ky$

$\omega = kx\,F''(\eta)\cdot\sqrt{\dfrac{k}{\nu}}$ ou $\left(\omega/k\right) = F''(\eta)\cdot Re_x$

3

Propagação dos efeitos da parede na vel. u

A parede retarda a vel. u. Espera-se que longe da parede • $u \to kx$

$$\frac{u}{U_0} = 0.99 \to \eta = 2.4$$

$$\delta \sqrt{\frac{k}{\nu}} = 2.4 \to \delta = \underbrace{2.4 \sqrt{\frac{\nu}{k}}}_{\text{distância parede } u/U_0 = 0.99}$$

$$\frac{\delta}{x} = 2.4 \sqrt{\frac{\nu}{kx^2}} \to \left(\frac{\delta}{x}\right) = \frac{2.4}{\sqrt{Re_x}}$$

- Espessura Relativa (δ/x) aumenta quando Re_x diminui!
- Espessura Relativa (δ/x) diminui quando Re_x aumenta!

9) Análise escoamento estagnação 2-D com água & ar - mesmas velocidades

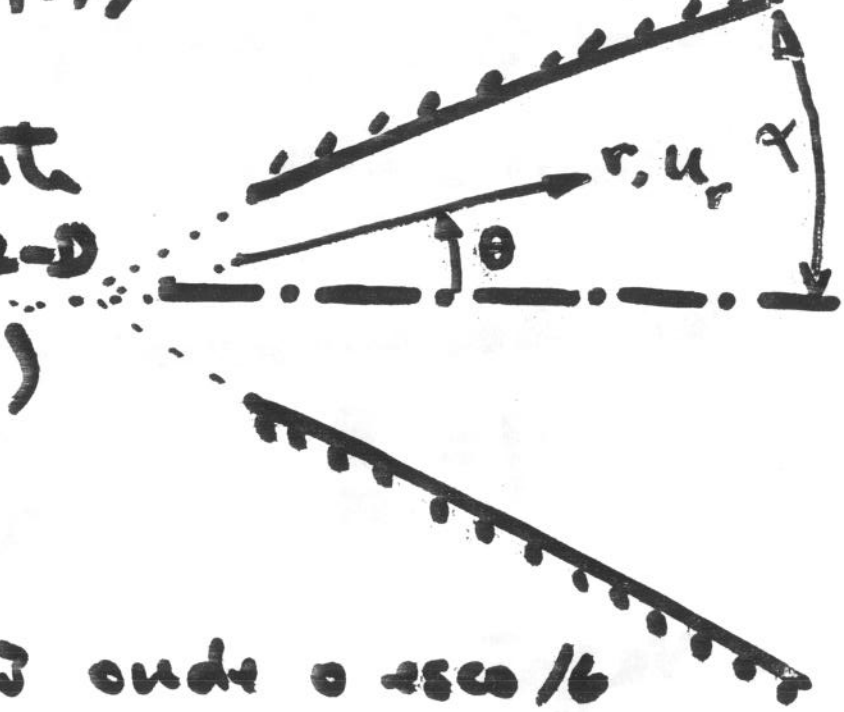
	k $(1/seg)$	x (m)	v_0 (m/s)	Re_x $\left(kx^2/\nu\right)$	δ (mm)
AR $\nu = 15 \times 10^{-6}$ (m^2/s)	10^{-3}	1	10^{-3}	67	294
H_2O $\nu = 1.0 \times 10^{-6}$ (m^2/s)	10^{-3}	1	10^{-3}	1000	76

- Se $Re \downarrow$ os efeitos difusivos aumentam sua propagação $\delta \uparrow$

- Se $Re \uparrow$ os efeitos difusivos ficam restritos a uma pequena região próxima a parede, $\delta \downarrow$

1) Jeffery & Hamel Flow
(1915) (1917)

Canal Convergente ou Divergente 2-D (coord. polares)



Procura-se solução onde o escoamento é puramente radial

$$r u_r = f(\theta) \text{ somente}$$
$$u_\theta = 0$$

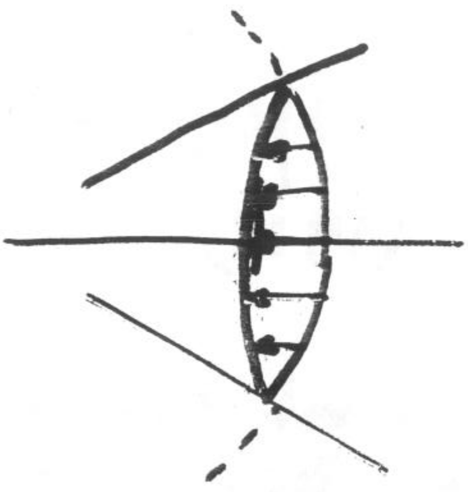
Eq. conservação massa, $\sigma_\theta = 0$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) = 0 \quad \text{ou} \quad r u_r = f(\theta)$$

A vazão no canal

$$Q = \int_{-\alpha}^{+\alpha} r u_r \, d\theta = \text{const}$$

2) Espera-se que u_r tenha um máximo local ($\theta = 0$) simetria



$u_{max} \cdot r = f(\theta)$

Var. Adimensionais:

$$\eta = \frac{\theta}{\alpha} \quad e \quad \frac{u_r}{U_{máx}} = f(\eta)$$

e Vazão

$$\frac{Q}{\nu} = \underbrace{\frac{u_{max} \cdot r \cdot \alpha}{\nu}}_{Re} \int_{-1}^{+1} f(\eta)\, d\eta$$

Os parametros adimensionais são:

η; $f(\eta)$; α e $Re = \dfrac{u_{max}\, r \cdot \alpha}{\nu}$

4) $\bar{E}q$. Momento em Coord. Polares; $u_\theta = 0$

$$(r) \Rightarrow \overbrace{u_r \frac{\partial u_r}{\partial r}}^{\text{convecção}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \overbrace{\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}\right)}^{\text{Difusão}}$$

$$(\theta) \Rightarrow 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\,\partial \theta} + \frac{2\nu}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

Fazendo $$\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\bar{E}q(r)\right] - \frac{\partial}{\partial r}\left[\bar{E}q(\theta)\right]$$

p/ eliminar P e substituindo η e f p/ θ e u_r, chega-se E.D.P. 3ª ordem não-linear!

$$f''' + 2\,Re\,\alpha f f' + 4\alpha^2 f' = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(+1) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array}\right\} \text{não deslizamento}$$

$f'(0) = 0 \rightarrow$ Máx local.

1/ Integrando-se uma vez

$$f'' + Re\,\alpha\, f^2 + 4\alpha^2 f = C$$

(x) f' e integrando-se novamente:

$$\frac{1}{2} f'^2 + \frac{1}{3} Re\,\alpha\, f^3 + 2\alpha^2 f^2 = Cf + d$$

usando as c.c. $f'(0)=0 \rightarrow f(0)=1$ $U=U_{máx}$

$$\frac{1}{3} Re\,\alpha + 2\alpha^2 = C + d$$

$$\rightarrow d = \frac{Re\,\alpha}{3} + 2\alpha^2 - C$$

c/ definição $\underline{d}$ a eq. fica:

$$f'^2 = (1-f)\left[\frac{2}{3} Re\,\alpha\,(f^2+f) + 4\alpha^2 f + C\right]$$

se $f(1)=0$ então

$$f'^2(1) = 1\cdot\left[\frac{2}{3} Re\cdot 1\cdot 0 + 4\alpha^2\cdot 0 + C\right]$$

$$\therefore C = f'^2(1) \sim \text{quadrado tensão parede}$$

6

* Para $\alpha \to 0$ (painel paralelo) e Re moderado para $Re \to 0$

$$1 = \int_0^1 \frac{df}{[(1-f)C]^{1/2}} \to 1 = \frac{2}{C^{1/2}} \therefore C = +4$$

integrando f c/ $C = +4$

$$\eta = \int_f^1 \frac{df}{[(1-f)4]^{1/2}} \to \underbrace{f = \frac{u}{U_{max}} = 1 - \eta^2}_{\text{Poiseuilli}}$$

* Para $Re \to 0$ mas $\alpha \neq 0$. Os termos c/ Re são desprezados mas os c/ α somente são mantidos (Stokes)

$$\eta = \int_f^1 \frac{df}{[(1-f)(4\alpha^2 f + C)]^{1/2}}$$

$$f(\eta) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{co-sec}^2 \alpha \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\eta\right) - 1\right]$$

9) separando f e η chega-se a equação integral:

$$\int_{\eta}^{1} d\eta = \eta \int_{f}^{1\,(f(1)=1)} \frac{df}{\left[(1-f)\left[\frac{2}{3}Re\alpha\,(f^2+f)+4\alpha^2 f+C\right]\right]^{1/2}}$$

A constante de integração C pode ser iterativamente resolvida ou pela eq.

$$C = f'^2(1)$$

ou pondo $\eta = 1 \rightarrow f(1) = 0$

$$\int_{1}^{0} d\eta = 1 = \int_{0}^{1} \frac{df}{\left[(1-f)\left[\frac{2}{3}Re\alpha\,(f^2+f)+4\alpha^2 f+C\right]\right]^{1/2}}$$

8)

Análise escoamento convergente

$$u_r = \frac{1}{r} f(\theta)$$

$$\omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = -\frac{1}{r^2} f'(\theta)$$

com ausência de forças viscosas a velocidade radial

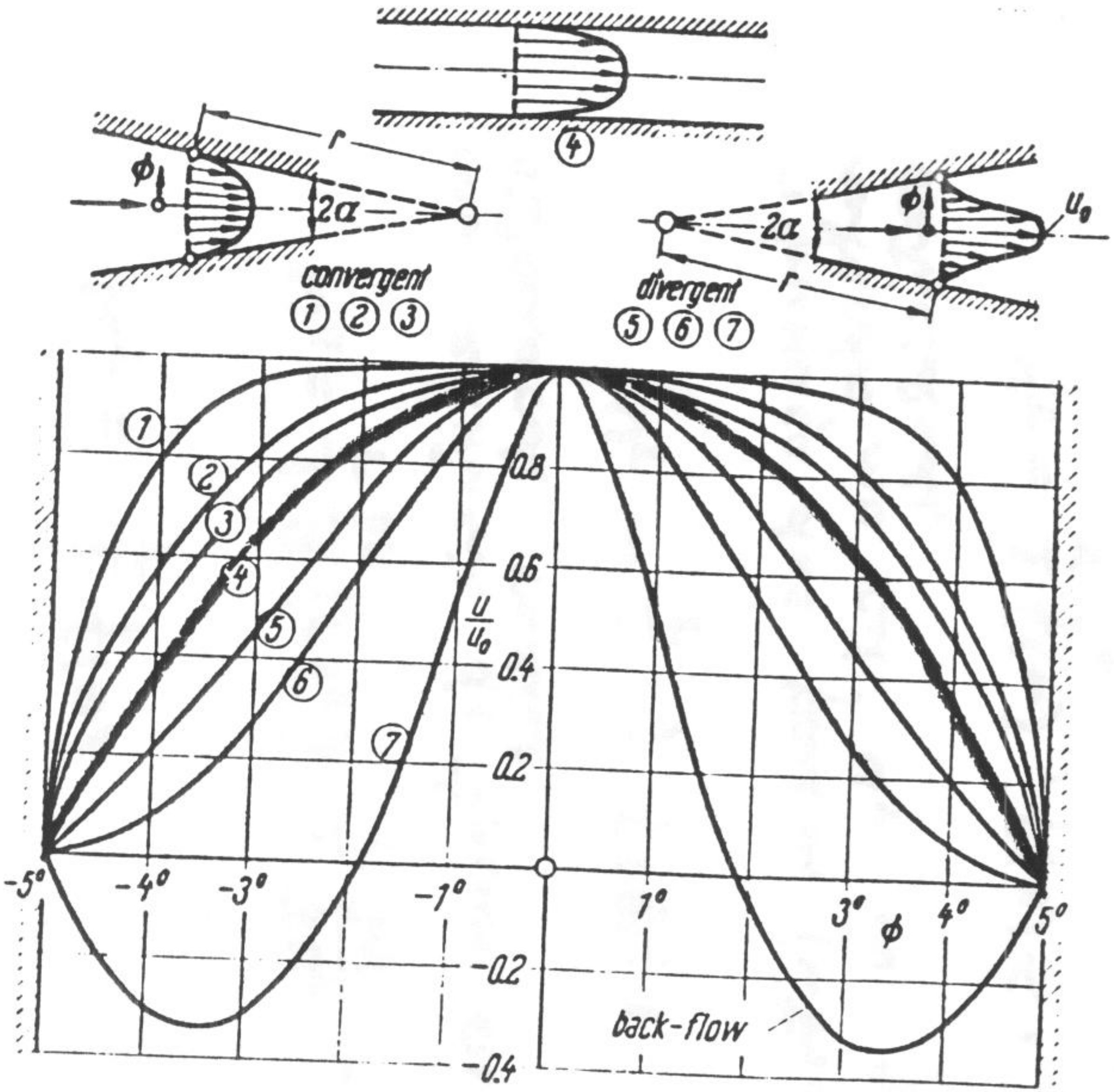
$$u_r \sim \frac{1}{r} \; ; \; f(\theta) \equiv 1$$

A presença das paredes introduz um retardo na vel. u_r ou produz vorticidade

$$u_r = \frac{1}{r} f(\theta) \, , \; f(\theta) < 1$$

└ correcção efeitos viscosos ou difusão das paredes.

Nota-se que para Re ↑ os perfis ficam cada vez + 'chatos', i.e., mais confinados próximo à parede. Fora desta região $f(\theta) \equiv 1 \rightarrow$ $u \sim 1/r$ i.e, irrotacional $\omega \equiv 0$.



Included angle $2\alpha = 10°$
Reynolds number $\bar{R} = u_0 r/\nu$

Convergent channel	Divergent channe[l]
Curve 1: R = 5000	Curve 5: R = 500[0]
Curve 2: R = 1342	Curve 6: R = 134[2]
Curve 3: R = 684	Curve 7: R = 68[4]

Curve 4 refers to a channel with parallel wal[ls] (Poiseuille's parobolic velocity distributio[n] cf. Fig. 5.1)

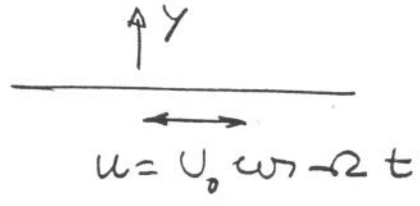
Fig. 5.15. Velocity distribution in a convergent and a divergent channel after G. Hamel [10] and K. Millsaps and K. Pohlhausen [21] (1953 sol. numérica)

Problemas com Difusão Periódica

7.4 Segundo Problema de Stokes

Considere uma placa infinita ($\frac{\partial}{\partial x} = 0$) que oscila com frequência Ω.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



$$u(0,t) = U_0 \cos \Omega t$$
$$u(y,0) = 0$$
$$u(\infty,t) = 0$$

Esta eq'n parabólica periódica pode ser resolvida por separação de variáveis (Arpaci cap 5) ou através de um campo de velocidades complexo (método + fácil) (Arpaci cap

Define uma velocidade complexa:

$$\Psi(y,t) = u(y,t) + i\, u^*(y,t)$$

onde u^* satisfaz a mesma E.D.P. com as seguintes C.C.

$$u^*(0,t) = U_0 \sin \Omega t$$
$$u^*(y,0) = 0$$
$$u^*(\infty,t) = 0$$

portanto

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

C.I $\quad \psi(y,0) = 0$

$$\text{C.C.} \begin{cases} \psi(0,t) = U_0 e^{i\Omega t} \\ \psi(\infty,t) = 0 \end{cases}$$

$$\psi = Y(y) \cdot \tau(t)$$

impondo que

$$\tau(t) = e^{i\Omega t}$$

isto implica que a solução só é válida para t suficientemente grande de forma que o regime permanente de oscilação no fluido seja estabelecido. É de se esperar, devido ao caráter linear da eq'n, que a frequência de oscilação do fluido é a mesma da placa, portanto é razoável que caso seja a função p/ o fluido se espere uma função no tempo da forma mostrada acima.

Assim:

$$\psi = Y(y)\, e^{i\Omega t}$$

Note que esta escolha já não pode satisfazer a condição inicial

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i\Omega\, e^{i\Omega t}\, Y(y)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = e^{i\Omega t} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

entaõ a eq'n fica:

$$i\Omega e^{i\Omega t} \cdot Y(y) = \nu e^{i\Omega t} \cdot Y''$$

ou $\quad Y'' - \frac{i\Omega}{\nu} Y = 0$

c.c. $\begin{cases} Y(0) = U_0 \cancel{e^{i\Omega t}} \\ Y(\infty) = 0 \end{cases}$

$$Y(y) = e^{by}$$

$$\left(b^2 - \frac{i\Omega}{\nu}\right) = 0 \quad \therefore b = \pm\sqrt{\frac{i\Omega}{\nu}}$$

$$Y(y) = A e^{\sqrt{\frac{i\Omega}{\nu}} y} + B e^{-\sqrt{\frac{i\Omega}{\nu}} y}$$

sabendo-se que

$$\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

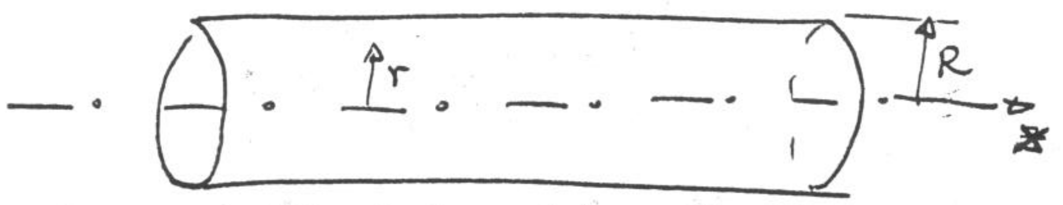
$$z_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)$$

$k = 0, 1, 2, \dots n-1$

$$\therefore Y(y) = A e^{\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}} y} \cdot e^{i\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}} y} + B\left(e^{-\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}} y} \cdot e^{-i\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}} y}\right)$$

p/ $Y(\infty) = 0 \Rightarrow A = 0$

Escoamento Pulsátil em um tubo cilíndrico



$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right]$$

Equação parabólica não homogenea. C. C.

$u(t,0) =$ finito

$u(t,R) = 0$ (não deslizamento)

Considera-se o escoamento desenvolvido, implicando que a solução só é válida p/ $t \gg 1$ → regime permanente de oscilações.

O gradiente de pressão, termo que introduz a não homogeneidade na E.D.P.P., pode ser expresso através de um movimento harmonico simples escrito em forma complexa:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = A^* e^{i\omega t}$$

onde A^* é uma constante complexa também,
A solução para $u(r,t)$ também deve ser
complexa periódica portanto

$$u = w(r) e^{i\omega t}$$

substituindo na eq. N-S.

$$\mu\left[\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right] - A^* \cancel{e^{i\omega t}} = i\omega\rho\, w\, \cancel{e^{i\omega t}}$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} - \frac{i\omega}{\nu} w = -\frac{A^*}{\mu}$$

multiplicando-se ambos os lados da eq. por
r^2;

$$r^2\frac{d^2w}{dr^2} + r\frac{dw}{dr} - \frac{i\omega}{\nu} r^2 w = -\frac{A^*}{\mu} r^2$$

solução particular desta eq. é

$$w_p(r) = \frac{A^*}{i\rho\omega}$$

A solução homogênea é dada em termos das combinação linear das funções de Bessel do primeiro tipo e da modificada do segundo tipo, ambas de ordem zero.

$$w_h(r) = B J_0\left(r\sqrt{\omega/\nu}\,.\,i^{3/2}\right) +$$

$$C K_0\left(r\sqrt{\omega/\nu}\, i^{1/2}\right)$$

A solução geral

$$w(r) = \frac{A^*}{i\rho\omega} + B J_0\left(r\sqrt{\omega/\nu}\, i^{3/2}\right) +$$

$$C K_0\left(r\sqrt{\omega/\nu}\, i^{1/2}\right)$$

C. contorno:

$w(0) =$ finito $\Rightarrow C \equiv 0$

$w(R) = 0 \Rightarrow B = -\dfrac{A^*}{i\rho\omega} \cdot \dfrac{1}{J_0\left(R\sqrt{\omega/\nu}\, i^{3/2}\right)}$

então o perfil de velocidades complexo $u(r,t)$ fica sendo

$$u(r,t) = \frac{A^*}{i\omega\rho}\left[1 - \frac{J_0\left(r\sqrt{\omega/\nu}\, i^{3/2}\right)}{J_0\left(R\sqrt{\omega/\nu}\, i^{3/2}\right)}\right] e^{i\omega t}$$

A quantidade $R\sqrt{\omega/\nu}$ é adimensional e é denominada número de Womersley (α). Ela está diretamente relacionada ao número de Reynolds e ao número de Strouhal,

$$\alpha^2 \equiv \underbrace{\frac{U R}{\nu}}_{Re} \cdot \underbrace{\frac{R \omega}{U}}_{St}$$

O raio também pode-se tornar adimensional fazendo $y = r/R$, substituindo estas transformações em $u(r,t)$ obtem-se:

$$u(r,t) = \frac{A^* R^2}{i \mu \alpha^2} \cdot \left[1 - \frac{J_0(\alpha y i^{3/2})}{J_0(\alpha i^{3/2})} \right] e^{i \omega t}$$

O perfil de velocidades é a parte real de $u(r,t)$, no entanto pode-se fazer simplificações a fim de obter uma relação mais simples de se calcular.

$$J_0(\alpha y i^{3/2}) = \mathrm{ber}(\alpha y) + i\,\mathrm{bei}(\alpha y)$$

$$= M_0(y)\, e^{i\theta_0(y)}$$

$$J_0(\alpha i^{3/2}) = M_0\, e^{i\theta_0}$$

onde $M_0 = \sqrt{\mathrm{ber}^2(\alpha y) + \mathrm{bei}^2(\alpha y)}$

$$\theta_0 = \tan^{-1}\left[\mathrm{bei}(\alpha y)/\mathrm{ber}(\alpha y)\right]$$

e

$$\mathrm{ber}\, x = \sum_{k=0}^{\infty}{}' (-1)^k \frac{(x/2)^{4k}}{[(2k)!]^2},$$

$$\mathrm{bei}\, x = \sum_{k=0}^{\infty}{}' (-1)^k \frac{(x/2)^{4k+2}}{[(2k+1)!]^2}$$

A pressão também pode ser escrita

$$A^* e^{i\omega t} = M e^{i(\omega t + \varphi)}$$

onde M é o módulo da pressão e φ é a sua fase, substituindo em $u(r,t)$,

$$u(r,t) = \frac{MR^2}{\mu a^2} \cdot \left[1 - \frac{M_0(y)}{M_0} \cdot e^{i(\theta_0(y)-\theta_0)}\right] e^{i(\omega t-\varphi)}$$

$$u(r,t) = \frac{MR^2}{\mu a^2} \cdot \left[\operatorname{sen}(\omega t-\varphi) - \frac{M_0(y)}{M_0} \operatorname{sen}(\omega t-\varphi-\delta_0)\right]$$

onde $\delta_0 = \theta_0 - \theta_0(y)$

note que para $r = R \rightarrow y = 1$, $M_0(y) = M_0$ e $\delta_0 = 0$ então $u(R,t) = 0$ condição de não deslizamento

DIFFERENTIAL EQUATION FOR Ber, Bei, Ker, Kei FUNCTIONS

24.72 $$x^2y'' + xy' - (ix^2 + n^2)y = 0$$

The general solution of this equation is

24.73 $$y = A\{\mathrm{Ber}_n(x) + i\,\mathrm{Bei}_n(x)\} + B\{\mathrm{Ker}_n(x) + i\,\mathrm{Kei}_n(x)\}$$

GRAPHS OF BESSEL FUNCTIONS

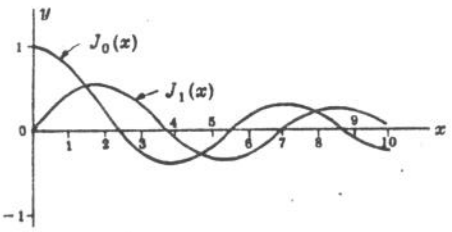


Fig. 24-1

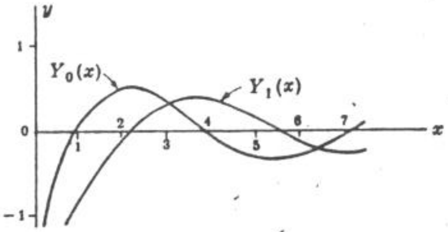


Fig. 24-2

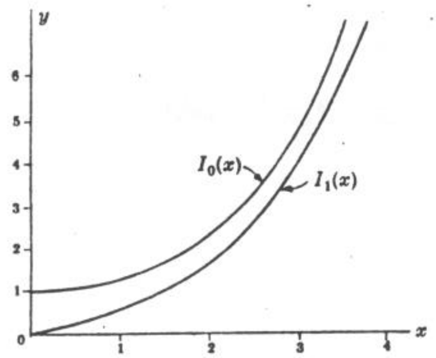


Fig. 24-3

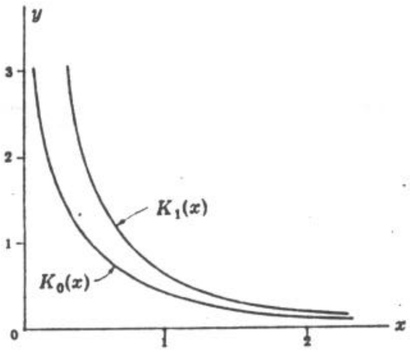


Fig. 24-4

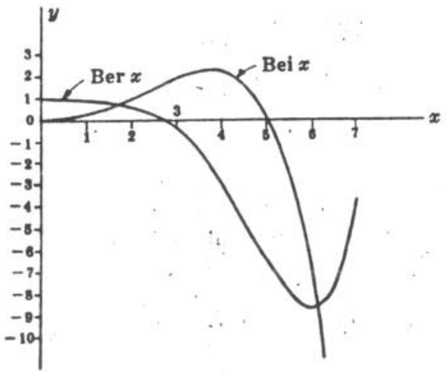


Fig. 24-5

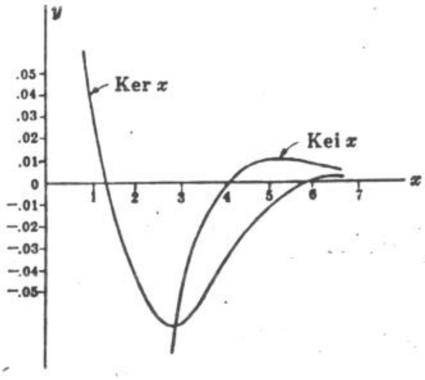


Fig. 24-6

the cycle in relation to the pressure-gradient is shown in Fig. 5.4. Thus, at 135° of the cycle, the average velocity in the artery is approximately zero; the axial laminae are still flowing forward when the mural laminae are flowing back-

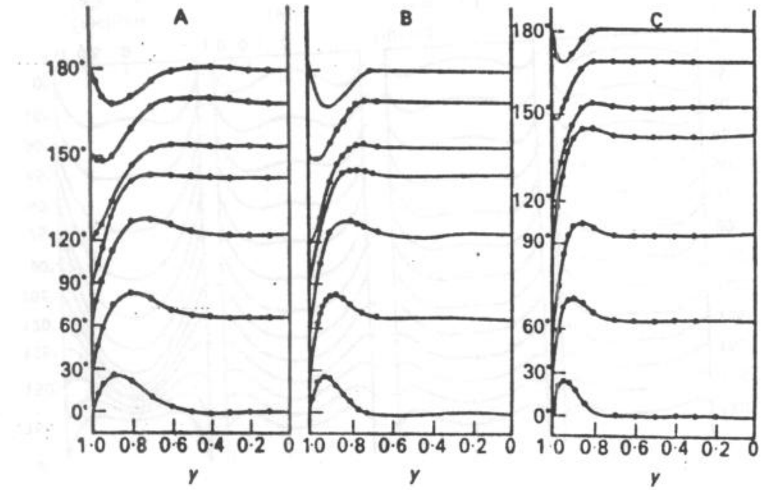


Fig. 5.2. Velocity profiles of a cylindrical tube created by a pressure-gradient of sinusoidal wave-form. Profiles are given for half the tube at intervals of 30° from 0° to 180° as in Fig. 5.1.
A. when $\alpha = R(\omega/\nu)^{1/2} = 10$
B. $\alpha = 15$
and C. $\alpha = 20$.
The flattening of the profile in the centre of the tube with increasing α that is seen in Fig. 5.1 is here further accentuated.

ward. During back flow the harmonics are considerably out of phase with one another and the profile, in contrast to that in forward flow, is very much flattened. Indeed, the maximum retrograde velocity does not occur at the axis but in the laminae with a fractional radius of between 0·3 and 0·4. From Fig. 5.4 it can be seen that even in a vessel as small as the femoral artery the point of flow reversal in the most peripheral lamina ($y = 0{\cdot}95$) is about 25° later than pressure-gradient reversal; in the axial lamina ($y = 0$) reversal occurs about 40° later still.

Inhomogenous liquid. The viscous behaviour of blood, due to the fact that it is a suspension of cells in plasma, was discuss... in Ch. 3. As the laminae vary

McDonald, 1965). He made the assumption that the mean viscosity was an inverse power function, m, of the radius of a lamina, r,

$$\bar{\mu} = \mu(r/R)^{-m} \qquad 5.15$$

There is no experimental justification for this equation but it is mathematically tractable and gives a qualitative picture of the effect that will occur to

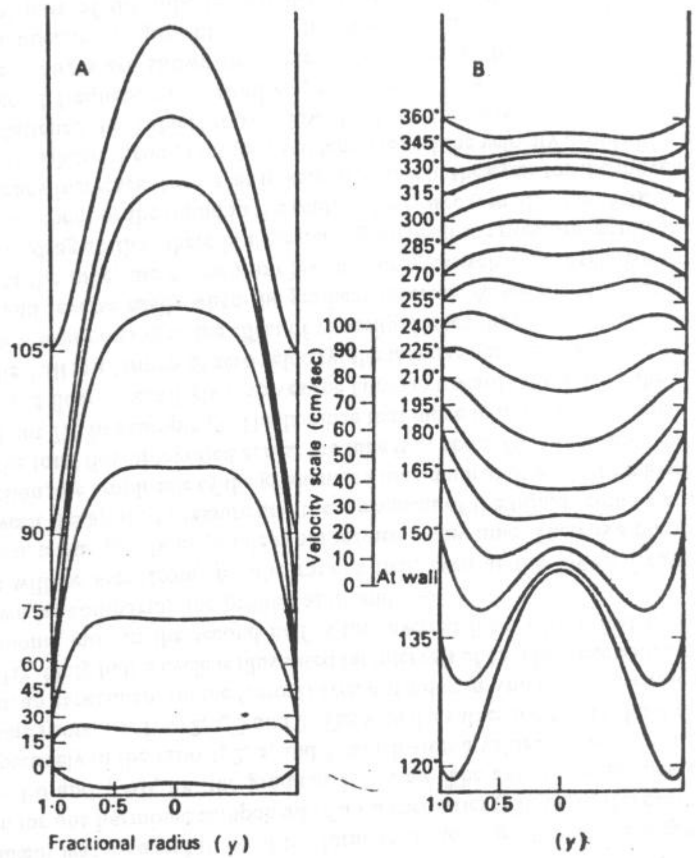


Fig. 5.3. Velocity profiles calculated from the measured pressure-gradient in the femoral artery of the dog. The first four harmonic components with the same values of α as in Fig. 5.1 are summed together with a parabola (axial velocity 30 cm/sec) representing the steady forward flow. The m... ...um forward velocity occurs in the axis because here the harmonic components are in

or since $\alpha^2 = R.\frac{\omega\rho}{\mu}$ (eqn. 5.6), eqn. 5.13 may be written as

$$w = \frac{MR^2}{\mu} \cdot \frac{M'_0}{\alpha^2} \cdot \sin(\omega t - \varphi + \varepsilon_0) \qquad 5.14$$

in this form it can be seen that for steady flow (eqn. 2.5) the term M'_0/α^2 is analogous to $(1 - y^2)/4$, where $y^2 = r^2/R^2$.

(The zero subscript in M'_0 indicates that only Bessel functions of zero order are involved and is modified when functions of a higher order are involved —see Ch. 6).

The forms of the velocity profile created by a pressure-gradient which oscillates sinusoidally were discussed in some detail by Hale *et al.* (1955). Some examples calculated from eqn. 5.14 are shown in Fig. 5.1. The pressure-

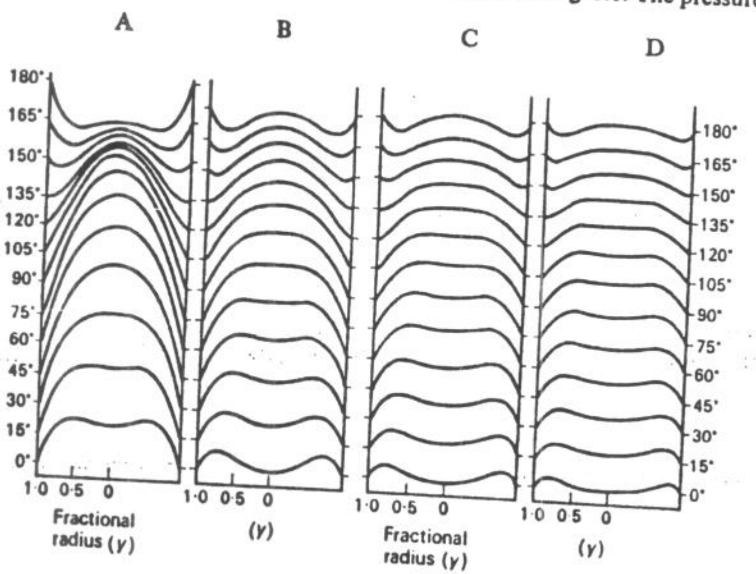


Fig. 5.1A. The velocity profiles, at intervals of 15°, of the flow resulting from a sinusoidal pressure-gradient (cos ωt) in a pipe. In this case, $\alpha = R \cdot \sqrt{\omega/\nu} = 3{\cdot}34$, corresponding to the fundamental harmonic of the flow curves illustrated in Figs. 5.3 and 5.4. Note that reversal of flow starts in the laminae near the wall. As this is harmonic motion only half a cycle is illustrated as the remainder will be the same in form but opposite in sign, e.g. compare 180° and 0°.

B. A similar set of profiles for harmonic motion of double the frequency of A ($\alpha = 4{\cdot}72$). The amplitude and phase of the pressure are the same here and in C and D as in A. The effects of the larger α are thus seen to be a flattening of the profile of the central region, a reduction of amplitude of the flow and the rate of reversal of flow increases close to the wall.

C. The third harmonic with $\alpha = 5{\cdot}78$. The effects of higher frequency noted in B are here further accentuated.

D. The fourth harmonic ($\alpha = 6{\cdot}67$) shows the same effects again. The rapidly varying part of the flow lies between $y = 0{\cdot}8$ and $y = 1{\cdot}0$ and the central mass of the fluid reciprocates almost like a solid core.

gradient was assumed to be of the form $M \cos(\omega t - \varphi)$, the standard expression for one harmonic component of a Fourier series (Ch. 6). In this example, $M = 1{\cdot}0$ and $\varphi = 0$, i.e. the gradient is cos ωt. The angular frequency ω is respectively in the ratio 1, 2, 3, and 4, which gives α values in the ratios of the square roots, i.e. 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ and 2. The actual α values used were those taken from an experiment on the femoral artery of a dog in which the pulse rate was 2·8 Hz. Only half a cycle is illustrated (at intervals of 15°) because with simple harmonic motion the second half is the inverted form of the first half—as shown by comparing the profiles at 0° and 180°.

It will be seen from the illustrations that, even at the lowest frequency shown, a true parabolic profile is not formed at any time. There is a phase lag between the applied pressure and the movement of the liquid; being a cosine function, the amplitude of the gradient is a maximum at 0° while the maximum for the total flow integrated across the tube is at about 60° in example A, and at about 77° in example D. The laminae that move first are those nearest the wall and flow successively involves the laminae towards the axis of the tube. At the wall is a lamina of zero velocity; the laminae near the wall always have a low velocity owing to the effect of viscosity. Hence they have a low momentum and reverse easily when the gradient reverses. As we move towards the axis of the tube, the momentum becomes progressively higher relative to the viscous drag so that there is a greater lag between the pressure–gradient and the movement of the liquid in the centre of the tube (see also Fig. 5.4). As the frequency increases there is, as it were, less time in the cycle for the movement to be translated throughout the axial laminae and the velocity profile becomes very flattened, i.e. subject to very low shear. An increase of diameter without change of frequency will, similarly, produce a like alteration in the profile. These changes are shown for higher values of α (such as are found in the low-frequency components of aortic flow) in Fig. 5.2. The liquid in the central part of the tube is virtually unsheared and the significant velocity gradients are only found in the layers near the wall. Thus the liquid begins to behave rather like a solid mass sliding inside a thin layer of viscous liquid surrounding it. For example, in Fig. 5.2c where $\alpha = 20$ the region of high velocity gradient is virtually confined to the outer 5 per cent of the tube radius. In order to visualize the velocity profiles in an artery it is necessary to sum the profiles of the main harmonic components, with their appropriate amplitudes and phases, together with a parabolic profile representing the steady flow component, i.e. the mean forward flow. Such a summation has been done in Fig. 5.3 for a typical cycle for the femoral artery from the four harmonics illustrated in Fig. 5.1. It can be seen that in the fast systolic rush all the harmonics are most nearly in phase and create a profile which approaches the form of a parabola. Then reversal of flow following reversal of the press[illegible]-gradient begins in the peripheral laminae and progressively involves those [illegible]wards the axis. The oscillations of certain selected laminae throughout

Camada Limite Hidrodinâmica

EQUAÇÕES DA CAMADA LIMITE BI-DIMENSIONAL

1. Fenômemo da Camada Limite Hidrodinâmica

A equação de Navier-Stokes para um fluido incompressível com propriedades físicas constantes, pode ser escrita em termos adimensionais por:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}.\nabla \vec{V} = - \nabla P + \left[\frac{1}{Re_L} \right] .\nabla^2 \vec{V} \qquad (1)$$

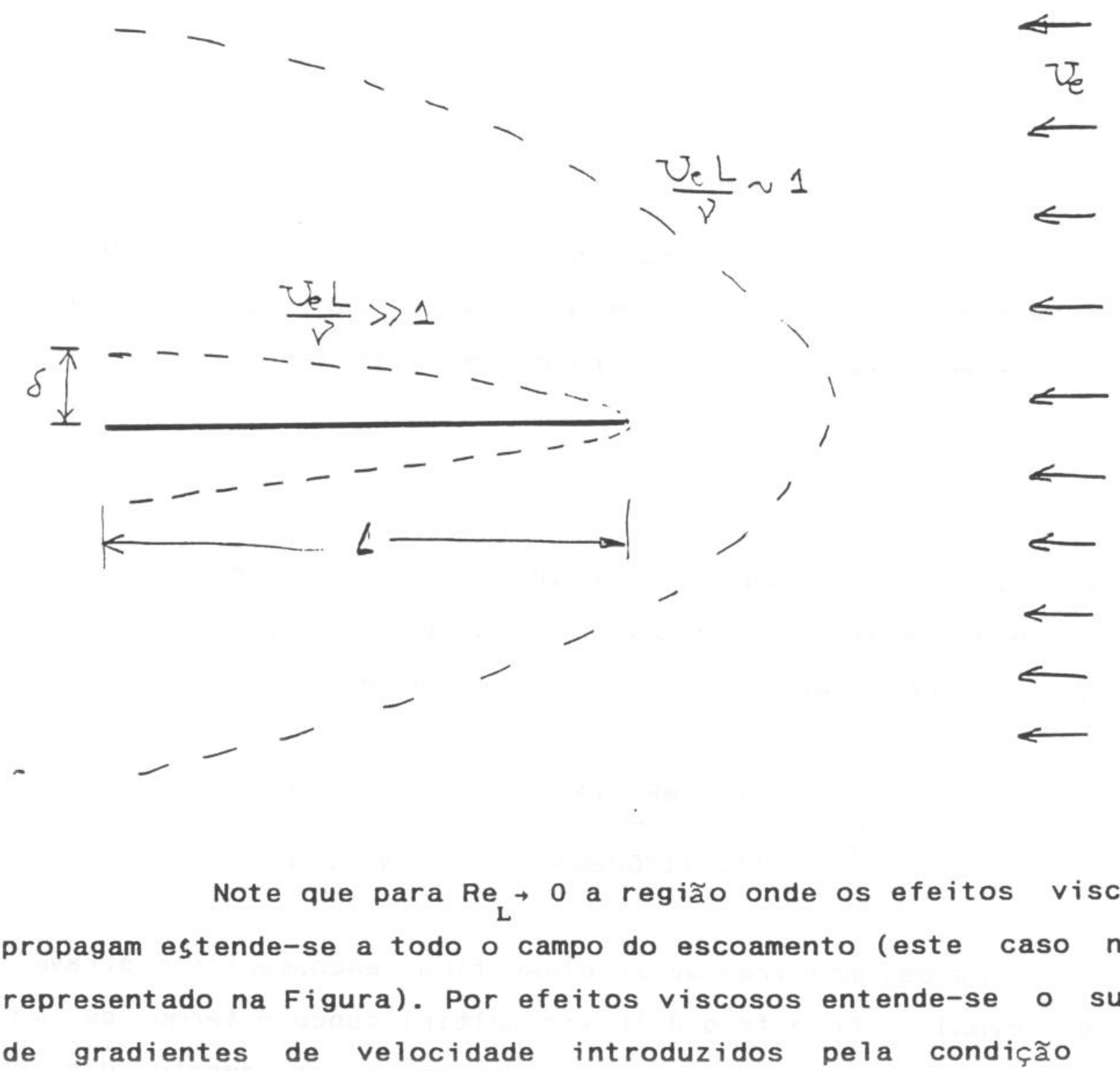
onde as escalas características para espaço e velocidade são, respectivamente, L e Vo; para o tempo, L/Vo e para pressão ρVo^2. O parâmetro adimensional Re_L é o número de Reynolds definido por:

$$Re_L = \frac{\rho\ Vo\ L}{\mu}$$

onde ρ e μ são respectivamente a densidade e a viscosidade dinâmica do fluido. Este adimensional expressa diretamente a razão entre a ordem de grandeza dos termos inerciais e os termos viscosos:

$$Re_L = \frac{[T.\ INERCIAIS]}{[T.\ VISCOSOS]} \simeq \frac{(\rho Vo^2/L)}{(\mu Vo/L^2)}$$

Uma das maneiras de se classificar escoamentos é através do número de Reynolds. Pelo fato dele vir multiplicando o termo de maior ordem da equação de N-S, as soluções possuem comportamento distinto para: $Re_L \rightarrow 0$ (escoamento com ausência de termos inerciais ou escoament de Stokes); $Re_L \simeq O(1)$ (escoamento com termos inerciais da mesma ordem de grandeza dos termos viscosos) e $Re_L \rightarrow \infty$ (escoamento com ausência dos termos viscosos ou escoamento sem viscosidade ou escoamento ideal). A Figura abaixo mostra físicamente estes limites para o escoamento sobre uma placa plana, com velocidade uniforme Vo a montante da placa.



Note que para $Re_L \rightarrow 0$ a região onde os efeitos viscosos se propagam estende-se a todo o campo do escoamento (este caso não está representado na Figura). Por efeitos viscosos entende-se o surgimento de gradientes de velocidade introduzidos pela condição de não deslizamento na superfície sólida da placa.

Para $Re_L \simeq O(1)$ as forças inerciais e viscosas se equilibram, e a região onde os efeitos viscosos agem é mais próxima a placa plana. A medida em que a difusão do momento ocorre da superfície sólida para o campo de escoamento, os termos convectivos tendem a "varrer" este efeito no sentido do escoamento. Como $Re_L \simeq O(1)$, os efeitos de difusão e de convecção são da mesma ordem de grandeza. Fora da região onde existem os efeitos viscosos o escoamento possui velocidade uniforme, isto é, o efeito da condição de não deslizamento não se faz sentir.

Na outra extremidade de nossa análise, quando $Re_L \to \infty$, os efeitos viscosos ficam confinados a pequenas regiões do campo do escoamento denominada por camada limite hidrodinâmica. Fisicamente, a característica essencial da camada limite é ser uma região que apresenta um forte gradiente de velocidade na direção transversal ao escoamento. Fora dela o escoamento é uniforme. Matematicamente, este é um problema de perturbação singular. O parâmetro $(1/Re_L)$ é um parâmetro de perturbação. Isto indica que pode-se buscar uma solução aproximada para o problema dividindo-se em duas regiões: região externa (onde não há efeitos viscosos) e região interna, também conhecida por camada limite onde existem efeitos viscosos.

Expansão Externa para Placa Plana; Escoamento Básico sem Viscosidade

Para $Re_L \to \infty$, a Eq. (1) pode ser aproximada por:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}.\nabla \vec{V} = - \nabla P \qquad (2)$$

que é também conhecida como equação de Euler. Deve-se observar, no entanto, que ao omitir os termos vis cosos na Eq. (2), por serem $(1/Re_L)$ vezes menores que os termos inerciais, a ordem da E.D.P. foi reduzida de ordem dois para ordem um. Isto implica que a Eq. (2) não pode satisfazer as condições de contorno que a Eq. (1) satisfazia. Retornando ao exemplo da Figura, ela só pode satisfazer a condição de velocidade uniforme para regiões afastadas da placa. A condição de não deslizamento não pode ser atendida pela Eq. (2).

Expansão Interna; Equações da Camada Limite; Casamento

A perda do termo com a derivada de ordem mais elevada é a marca clássica dos problemas de pertubação singular. É sabido que as soluções da Eq. (2) não são válidas próximo a superfície por que a condição de não deslizamento foi abandonada.

O que se busca agora é saber qual tipo de equação que se aplica a esta região do escoamento. Partindo-se da Eq. (1) que descreve o fenômeno global, o primeiro passo é efetuar uma análise da ordem de grandeza dos termos desta equação aplicados na região da camada limite. A fim de definir as escalas características do fenômeno é util descrevê-lo qualitativamente através das Figuras abaixo.

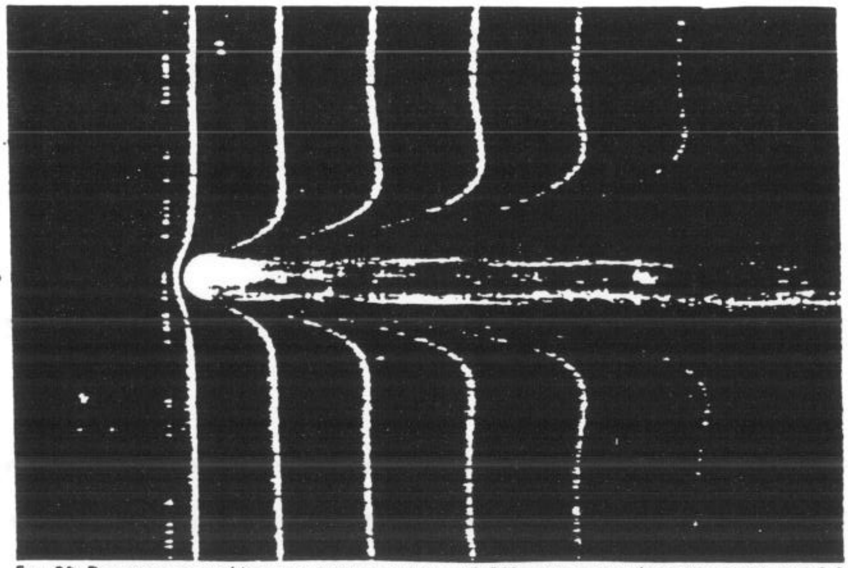


Fig. 20. Development of laminar boundary layer (0.01% salt water, free steam velocity 0.6 cm/s, thickness of the plate 0.5 mm, hydrogen bubble method).

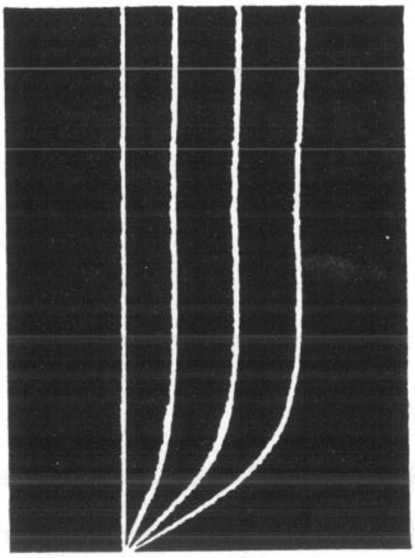
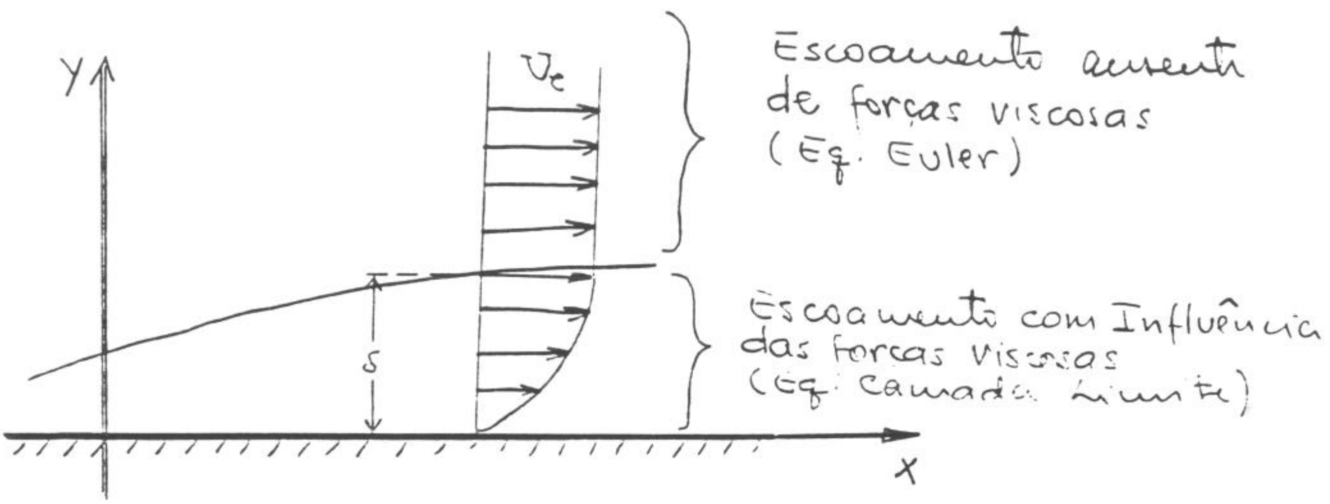


Fig. 21. Velocity profile in the laminar boundary layer (0.01% salt water, free stream velocity 0.6 cm/s, distance from the leading edge 200 mm, $Re = 1.2 \times 10^2$, hydrogen bubble method).



A fotografia superior mostra o perfil de velocidades para o escoamento em uma placa plana e o desenho acima ilustra as dimensões na direção y (δ), x (L) e a velocidade externa Vo. É sabido que para $Re_L \rightarrow \infty$, a região onde os efeitos viscosos existe, δ, tende a zero. Assim parte-se do pressuposto que:

$$\delta/L \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad Re_L \rightarrow \infty$$

Tomando-se por dimensões características: δ, L e Vo como sendo representativas para as direções y, x e velocidade na direção (x), as ordens de magnitude das variáveis do problema ficam então definidas por:

$$x \simeq O(L)$$
$$y \simeq O(\delta)$$
$$u \simeq O(Vo)$$
$$P \simeq O(\rho Vo^2) \text{ [escala inercial]}$$

Da equação da continuidade obtêm-se a escala para a velocidade v,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

substituindo-se as escalas para u, x e y, obtêm-se:

$$\left(\frac{Vo}{L}\right) \simeq \left(\frac{V}{\delta}\right) \Rightarrow V \simeq Vo\left(\frac{\delta}{L}\right)$$

portanto a ordem de magnitude da velocidade na direção y é:

$$v \simeq O(V) = O\left[Vo\left(\frac{\delta}{L}\right)\right]$$

Com base na ordem de magnitude dos termos passa-se a analisar a equação do momento na direção (x) para avaliar a importância relativa dos termos:

$$\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{TERMOS INÉRCIAIS}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}}_{\text{TERMOS PRESSÃO}} + \underbrace{\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}_{\text{TERMOS VISCOSOS}}$$

$$O\left(\frac{Vo^2}{L}\right) \qquad O\left(\frac{Vo^2}{L}\right) \qquad O\left(\frac{Vo\,\nu}{\delta^2}\left[\frac{\delta^2}{L^2} + 1\right]\right)$$

Note que nos termos viscosos, tem-se difusão de momento na direção (x) $(\delta/L)^2$ menor que a difusão na direção (y). Isto já era de se esperar por que nesta região os maiores gradientes ocorrem na direção transversal ao escoamento. Portanto, pode-se desprezar, em primeira aproximação, o termo $\partial^2 u/\partial x^2$ em relação ao termo $\partial^2 u/\partial y^2$ por que $(\delta/L) \ll 1$.

Com isto a equação do momento na direção (x) se reduz a:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Retornando a análise de ordem de magnitude dos termos, vamos agora comparar a ordem de grandeza dos termos inerciais com os termos viscosos. Isto pode ser feito dividindo-se por (Vo^2/L) em ambos os lados da equação:

TERMOS INÉRCIAIS	TERMOS PRESSÃO	TERMOS VISCOSOS
$O(1)$	$O(1)$	$O\left(\frac{\nu}{Vo\ L}\left[\frac{L}{\delta}\right]^2\right)$

isto pode ser $= 0$ / $\to \infty$ > conduzem a solução degenerada
limite finito →

Mas, dentro da camada limite, os termos viscosos devem possuir a mesma ordem de grandeza dos termos inerciais portanto:

$$\left(\frac{\nu}{Vo\ L}\left[\frac{L}{\delta}\right]^2\right) \simeq O(1), \quad \text{ou}$$

$$\left(\frac{\delta}{L}\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{Re_L}} \; ; \qquad Re_L = \frac{Vo\ L}{\nu} \tag{3}$$

Equação (3) explicita a ordem de grandeza da espessura da camada limite em função do inverso da raiz quadrada do número de Reynolds do escoamento. Ela é uma das relações fundamentais no estudo de camada limite hidrodinâmica. Note que para $Re_L \to \infty$, $(\delta/L) \to 0$, como havia-se previsto anteriormente. Além disto, Eq. (3), é um teste para se saber se um dado escoamento externo aplica-se a uma análise de camada limite por que Re_L pode ser facilmente calculado a priori.

Desta análise também pode-se extrair informações sobre a ordem de magnitude da tensão de cisalhamento na parede, τw.

$$\tau w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad ; \quad \tau w \simeq O\left(\frac{\rho\, Vo^2}{\sqrt{Re_L}} \right)$$

Portanto o coeficiente de atrito de Fanno, $C_f = \tau w/(0.5\rho Vo^2)$, é da ordem de:

$$C_f \simeq \frac{1}{\sqrt{Re_L}}$$

Passa-se agora à análise da equação do momento na direção (y). O procedimento é análogo ao descrito acima. Substituindo-se as respectivas escalas e dividindo-se todos os termos pelo termo inercial, encontra-se:

TERMOS INÉRCIAIS		TERMOS PRESSÃO		TERMOS VISCOSOS

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$O\left(\frac{\delta}{L}\right) \qquad\qquad O\left(\frac{L}{\delta}\right) \qquad\qquad O\left(\frac{\delta}{L}\right)\left[\frac{\nu}{Vo.L}\frac{L^2}{\delta^2}\right]$$

Mas,

$$\left(\frac{\delta}{L}\right) << 1 \qquad e \qquad \left[\frac{\nu}{Vo.L}\frac{L^2}{\delta^2}\right] \simeq 1$$

Nota-se então que o único termo de ordem de magnitude superior aos demais termos é o gradiente de pressão na direção (y); para que todos os termos tenham a mesma ordem de grandeza, isto implica que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

Equação (4) é a equação do momento na direção (y). Ela mostra que dentro da camada limite não há variação de pressão na direção (y); Ou seja, a pressão que o escoamento externo, dado pela Eq. (2), se transmite integralmente para dentro da camada limite. Denotando-se por P_e e U_e a pressão e velocidade do escoamento externo a camada limite, da Eq. (2) tem-se

$$-\frac{1}{\rho}\,\frac{d\,P}{d\,x} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{d\,P_e}{d\,x} = \frac{\partial\,U_e}{\partial\,t} + U_e\,\frac{\partial\,U_e}{\partial\,x}$$

De posse desta análise, pode-se apresentar as equações da camada limite hidrodinâmica em coordenadas cartesianas:

Eq. Massa

$$\frac{\partial\,u}{\partial\,x} + \frac{\partial\,v}{\partial\,y} = 0$$

Equação do Momento (x)

$$\frac{\partial\,u}{\partial\,t} + u\,\frac{\partial\,u}{\partial\,x} + v\,\frac{\partial\,u}{\partial\,y} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\,P_e}{\partial\,x} + \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial\,y^2}$$

Equação do Momento (y)

$$\frac{\partial\,P}{\partial\,y} = 0$$

Condições de Contorno:

Não Deslizamento	$u(x,0,t) = 0$; $v(x,0,t) = 0$ ou
	$v(x,0,t) = 0$ sem injeção ou sucção de massa, ou
	$v(x,0,t) = \pm\, v_w$ com injeção (+) ou sucção (-)
Condição Inicial	$u(x,y,0) = f(x,y)$, f é conhecido em todo o campo
Condição de Entrada	$u(x_o,y,t) = g(y,t)$, g é conhecido em x_o
Casamento com Escoamento Externo	$u(x,y,t) = U(x,t)$, quando $y \to \infty$

Existem importantes detalhes a serem observados do conjunto de equações acima:

1. A Equação da Continuidade não é afetada pela análise da ordem de magnitude dos termos.

2. O gradiente de pressão na direção y é desprezível. Consequentemente a pressão é uma variável conhecida para as equações da camada limite, sendo dada pela análise do escoamento externo.

3. Todas as derivadas de segunda ordem com relação a (x) foram descartadas nas equações da camada limite. Isto trás duas consequências: *i*) as equações são agora parabólicas ao invés de elípticas, de modo que x é agora uma variável de marcha e as soluções analíticas e numéricas são relativamente mais fáceis; *ii*) algumas condições de contorno não podem ser mais satisfeitas, notavelmente aquelas em v e em x. A variável v possui somente uma derivada parcial em y nas equações da camada limite, $\partial v/\partial y$, os termos $\partial v/\partial x$ e todos os outros termos de segunda ordem em x e em y foram desprezados. Portanto v pode agora satisfazer apenas uma condição de contorno em uma posição y. A mais obvia é a condição de não deslizamento: v = 0 em y = 0. As condições na entrada, inicial e de casamento com o escoamento externo não são necessárias especificar.

<u>Formulação da Equação da Camada Limite em Termos da Função Corrente</u>

Em diversas situações é conveniente transformar a dependência de u e v, da equação da camada limite, para uma única variável ψ, a função corrente. Esta transformação aplica-se a escoamentos bi-dimensionais e axi-simétricos. O interesse nesta transformação advém do fato que a equação da camada limite deixa de ser diferencial parcial para ser diferencial ordinária, entretanto passa a ser de terceira ordem em y enquanto que era de segunda ordem.

Considerando o caso bi-dimensional cartesiano, com variáveis (x,y); x ao longo do escoamento e y transversal ao escoamento, pode-se definir a função corrente como:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

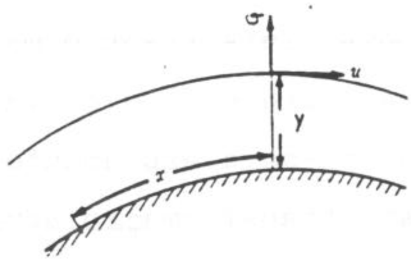
substituindo-se estas relações na equação da camada limite temos:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{d U_e}{d t} + U_e \frac{d U_e}{d x} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

sujeita as condições de contorno especificadas anteriormente.

Equações da Camada Limite para Escoamentos ao Longo de Superfícies Curvas

Quando a superfície na qual a camada limite se desenvolve é curva, é necessário desenvolver um sistema de coordenadas que se ajusta ao corpo, também conhecido como "body fitted coordinates". Neste sistema, a coordenada x é tomada ao longo do perímetro do corpo e a coordenada y é tomada como normal ao corpo, como ilustrado na figura abaixo



Coordinates for boundary-layer flow along a curved surface.

As equações da conservação da massa e do momento devem ser modificadas para incluir o efeito da curvatura. Relativo a um sistema de coordenadas ortogonais ajustado ao corpo, os fatores de escala associados são: $h_1 = (1 + Ky)$ e $h_2 = 1$ onde K é a curvatura da superfície; para uma superfície plana, $K = 0$, e para um vértice de 90 graus, $K = \infty$. As equações do movimento para um fluido viscoso neste sistema são:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{1+\kappa y}u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\kappa}{1+\kappa y}uv \\
&\quad=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{1+\kappa y}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left[\frac{1}{(1+\kappa y)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{y}{(1+\kappa y)^3}\frac{\partial \kappa}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right. \\
&\qquad\left.+\frac{\kappa}{1+\kappa y}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\kappa^2}{(1+\kappa y)^2}u+\frac{1}{(1+\kappa y)^3}\frac{\partial \kappa}{\partial x}v+\frac{2\kappa}{(1+\kappa y)^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right], \\
&\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{1+\kappa y}u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\kappa}{1+\kappa y}u^2 \\
&\quad=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left[\frac{1}{(1+\kappa y)^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{y}{(1+\kappa y)^3}\frac{\partial \kappa}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right. \\
&\qquad\left.+\frac{\kappa}{1+\kappa y}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\kappa^2}{(1+\kappa y)^2}v-\frac{1}{(1+\kappa y)^3}\frac{\partial \kappa}{\partial x}u-\frac{2\kappa}{(1+\kappa y)^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right], \\
&\qquad\qquad\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}[(1+\kappa y)v]=0.
\end{aligned}$$

Estas equações são exatas. Se for realizado o processo de aproximações desenvolvido anteriormente, a ordem de magnitude de h_1 é:

$$h_1 \simeq (1 + O(K\delta)),$$

mas

$$\delta \simeq L\, Re_L^{-1/2}$$

logo,

$$h_1 \simeq (1 + O(KLRe_L^{-1/2}))$$

desde que

$$K << Re_L^{1/2}/L; \qquad h_1 \simeq O(1)$$

como para escoamentos com fenômeno de camada limite, $Re_L \to \infty$, é uma condição necessária, $h_1 \simeq 1$. Portanto as equações da camada limite para uma superfície curva com coordenadas ajustadas ao corpo são:

Eq. Massa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Equação do Momento (x)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_e}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Equação do Momento (y)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = K\rho u^2$$

Isto mostra que a única diferença entre as equações da camada limite para superfícies planas ou curvas se encontram na equação do momento para a direção (y). $\partial P/\partial y$ é diferente de zero para balancear os efeitos centrífugos dado pela curvatura da superfície. Entretanto a variação de pressão normal a camada limite é ainda pequena,

$$\frac{\partial P}{\partial y} \simeq O(K.\rho \quad U_e^2)$$

e pode ser desprezada; de maneira que,

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} = \frac{dU_e}{dt} + U_e\frac{dU_e}{dx}$$

onde U_e é a velocidade do escoamento externo paralelo a superfície curva para $y = \delta$. Conclui-se então que as equações a serem resolvidas são exatamente as mesmas para uma superfície plana ou curva.

Nota Sobre a Classificação de Equações Diferenciais Parciais

Considere a equação diferencial parcial de segunda ordem:

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F\phi + G = 0$$

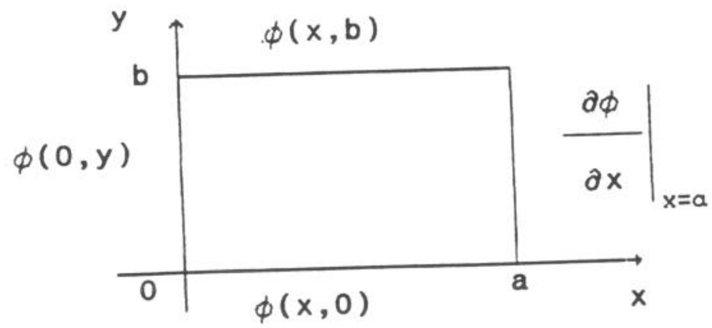
Se $B^2 - A.C$
- < 0 Equação Elíptica
- $= 0$ Equação Parabólica
- > 0 Equação Hiperbólica

Equações Elípticas $B^2 - A.C < 0$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \lambda(x,y) = 0$$

Equação de Poisson

Tipo de condição de contorno: é necessário que se especifique as condições de contorno em toda fronteira do domínio. Elas podem ser do tipo Dirichlet (ϕ na fronteira conhecido) ou do tipo Neumann ($\partial\phi/\partial n$, onde n é o vetor normal a fronteria, conhecido).



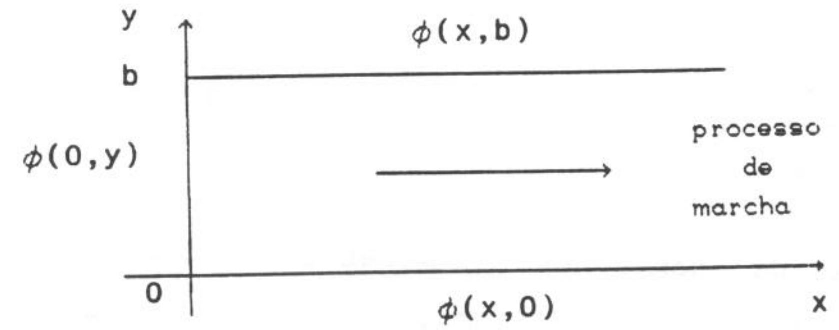
Dentro do domínio, a variável ϕ sofre a influência do valor que ϕ ou $\partial\phi/\partial n$ assume no contorno.

Equações Parabólicas $B^2 - A.C = 0$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

Equação da condução de calor transiente, $(x \rightarrow t)$

Tipo de condição de contorno: é necessário especificar as condições de contorno em apenas <u>três fronteiras</u>, a quarta permanece aberta. A solução é um processo de marcha em direção a fronteira aberta. A informação provém apenas das fronteiras em y = constante e da condição de contorno em x = 0.



Deve-se destacar as semelhanças com as condições de contorno da camada limite: $\phi(0,y)$ = condições de entrada para u; $\phi(x,0)$ = condição de não deslizamento, b = δ espessura da camada limite, e, $\phi(x,b)$ = casamento com o campo de velocidade externo.

Equações Hiperbólicas $B^2 - A.C > 0$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

Equação da Onda

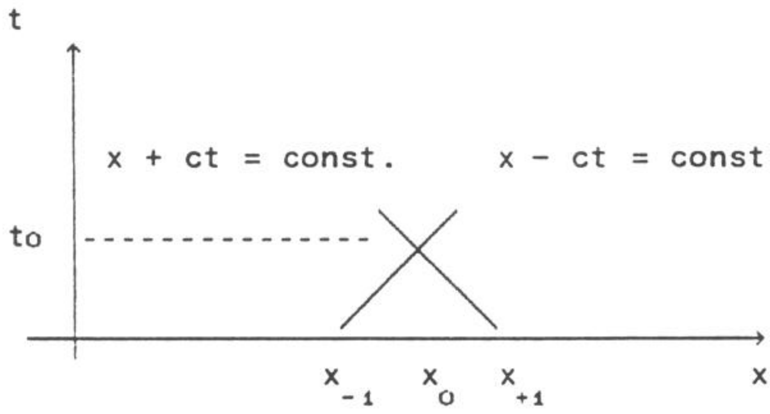
A solução geral é da forma:

$$\phi(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Fazendo-se o argumento destas funções igual a uma constante, gera-se linhas características no plano (x,t). Ao longo destas linhas, que atravessam todo domínio da solução, os valores de f e g são constantes. Portanto, para um domínio infinito, necessita-se apenas especificar as condições iniciais ao longo da linha (x,0)

$$\phi(x,0) = f(x) + g(x)$$

$$\partial\phi/\partial t|_{t=0} = 0$$



A solução em no ponto (x_0, t_0) é dada por:

$$\phi(x_0, t_0) = f(x_{-1}) + g(x_{+1})$$

Dentro do triângulo definido por x_{-1}, x_{+1} e t_0 todos os pontos sofrem a influência dos valores que f(x) e g(x) assumem neste intervalo. Por outro lado, os valores que f(x) e g(x) assumem fora deste intervalo, não afetam a solução dos pontos no interior do triângulo definido.

Referências:

[1] Panton, R.L. "Incompressible Flow", John Wiley, 1984

[2] Rosenhead, L., "Laminar Boundary Layers", Oxford, 1963

[3] Meyer, R.E., "Introduction to Mathematical Fluid Dynamics", Dover 1982

[4] Goldstein, S., "Modern Developments in Fluid Dynamics", Dover 1965

[5] White, F.M., "Viscous Flow", Mc Graw Hill, 1974

EQUAÇÕES INTEGRAIS DA CAMADA LIMITE BI-DIMENSIONAL

Índice

EQUAÇÕES INTEGRAIS DA CAMADA LIMITE BI-DIMENSIONAL

Durante o período compreendido entre 1920 a 1950, onde computadores digitais nem sequer existiam, o desenvolvimento de aplicações da teoria da camada limite ocorreu através do desenvolvimento e aperfeiçoamento dos métodos integrais. Soluções aproximadas utilizando-se equações integrais para a camada limite deve-se ao trabalho pioneiro de Von Kármán publicado em 1921. Uma revisão extensiva destes métodos pode ser encontrada em Rosenhead (1964). Apesar de atualmente se dispor de eficientes algoritmos computacionais, tornando quase que obsoleta a utilização destes métodos para escoamentos laminares, eles são ainda hoje freqüentemente utilizados em problemas complexos tais como: turbulência, transferência de calor e combustão.

Definição de Espessura de Deslocamento e Espessura de Momento

A espessura de deslocamento, δ^* está relacionada ao déficit de vazão devido a desaceleração que o fluido sofre pela ação da viscosidade. Considerando-se um perfil típico de velocidades dentro da camada limite, como mostra a Fig. 1,

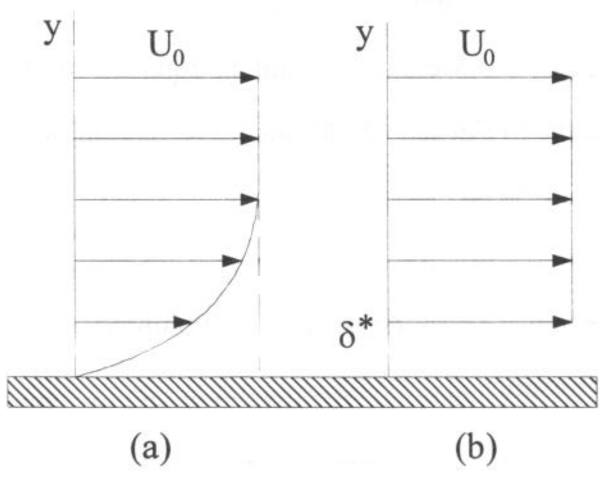


Fig. 1 - Espessura de deslocamento é a distância da parede que o escoamento externo a camada limite deveria estar afim de que as vazões produzidas pelo escoamento com presença de termos viscosos (a) seja a mesma que a produzida pelo escoamento sem a presença de termos viscosos (b).

Considere o perfil de velocidades mostrado na Fig. 1a, a vazão mássica em uma seção é dada por

$$\dot{M} = \int_0^{+\infty} \rho \bullet u \bullet dy \tag{1}$$

esta vazão mássica é equivalente a vazão produzida pelo escoamento externo, Fig. 1b, porém descontado um déficit de massa devido a desaceleração sofrida pelo fluido próximo a parede,

$$\dot{M} = \int_{0}^{+\infty} \rho \bullet U_0 \bullet dy - (\rho \bullet U_0 \bullet \delta^*) \tag{2}$$

Isolando-se δ^* das equações (1) e (2), encontra-se a definição da espessura de deslocamento, Eq. (3):

$$\boxed{\delta^* = \int_{0}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy \tag{3}}$$

De maneira análoga, é definido a espessura de momento, θ. Ela refere-se ao déficit de momento associado a desaceleração do fluido causada pela viscosidade. O fluxo de momento J em uma seção é dado por:

$$J = \int_{0}^{\infty} u \bullet (\rho u dy) \tag{4}$$

este fluxo de momento é igual ao fluxo de momento dado pelo escoamento externo descontando-se um déficit de momento:

$$J = \int_{0}^{\infty} U_0 \bullet (\rho u dy) - \left(\rho U_0^2 \theta\right) \tag{5}$$

Isolando-se θ das equações (4) e (5) encontra-se a definição da espessura de momento:

$$\boxed{\theta = \int_{0}^{+\infty} \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy \tag{6}}$$

A espessura de deslocamento e de momento, δ^* e θ, estão representadas pela área sob as curvas definidas por: $(1 - u/U_0)$ e $u/U_0(1 - u/U_0)$ na Fig. 2. Pela sua definição, θ deve ser sempre menor que δ^*, de maneira que a razão δ^*/θ, também chamada de fator de forma H, é sempre maior que a unidade.

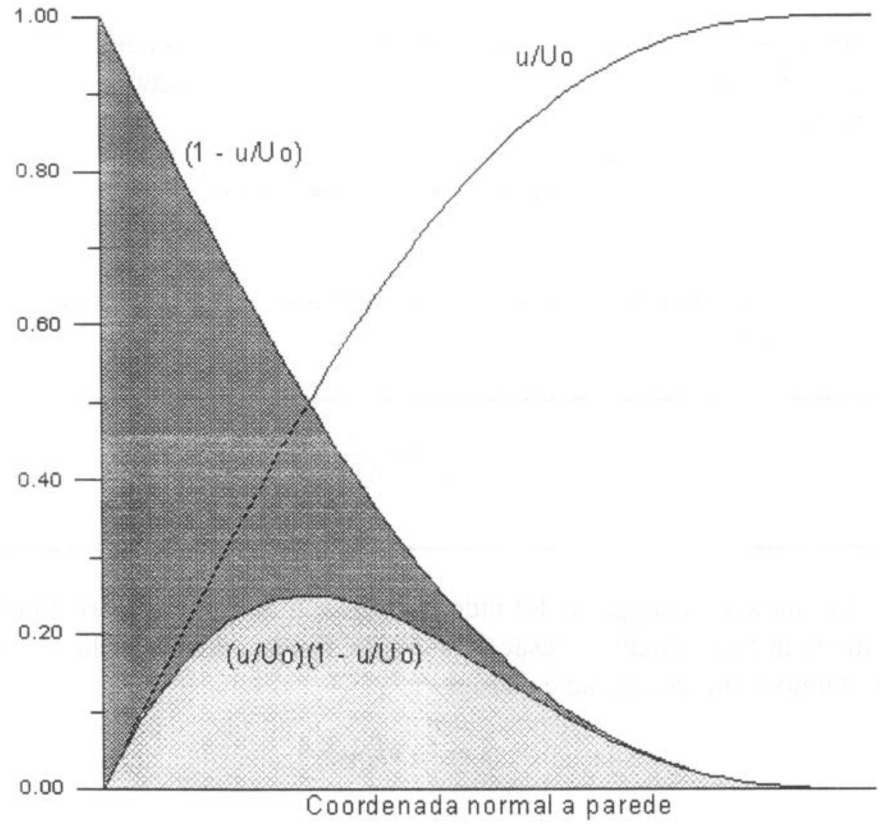


Fig. 2 - Espessura de momento e de deslocamento

Equação Integral da Camada Limite Bi-Dimensional

A ideia básica atrás da formulação integral da camada limite é expressar os balanços de conservação de momento e massa, na direção transversal ao escoamento, integrando-se as equações entre y = 0 a y = ∞. Partindo-se das equações da camada limite, em regime laminar e escoamento incompressível, tem-se para a conservação da massa e momento as equações:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{7}$$

$$u \bullet \frac{\partial u}{\partial x} + v \bullet \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + U_0 \frac{dU_0}{dx} \tag{8}$$

Multiplicando-se a Eq. (7) por u e somando-se a Eq. (8), obtêm-se:

$$\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial vu}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+U_0\frac{dU_0}{dx} \tag{9}$$

integrando-se Eq. (9) na direção y no intervalo de 0 a ∞,

$$\int_0^\infty \frac{\partial u^2}{\partial x}dy+\int_0^\infty \frac{\partial vu}{\partial y}dy=\nu\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy+\int_0^\infty U_0\frac{dU_0}{dx}dy \tag{10}$$

Observando-se que o termo $\int\partial(vu)/\partial y\bullet dy$ é igual a $(vu)_\infty$ - $(vu)_0$ mas pela condição de não deslizamento, $u(x,0) = 0$, logo, $\int\partial(vu)/\partial y\bullet dy = vU_0$. Da Eq. (7), $[v(x,y) - v(x,0)] = -\int\partial u/\partial x\bullet dy$; para o caso de fronteira impermeável $v(0) = 0$, então:

$$\int_0^\infty \frac{\partial(vu)}{\partial y}dy=-U_0\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x}dy+U_0\cdot v_W \tag{11}$$

Observando-se também que o termo $\nu\int\partial^2u/\partial y^2dy$ é igual a $\nu(\partial u/\partial y|_\infty - \partial u/\partial y|_0)$, mas, por definição, o escoamento externo a camada limite não possui vorticidade, então $\partial u/\partial y|_\infty = 0$, então:

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy=-\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}_{|y=0}=-\frac{\tau_W}{\rho} \tag{12}$$

onde τ_w é a tensão na parede. Substituindo-se equações (11) e (12) na Eq. (10) encontra-se:

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty u^2dy-U_0\frac{d}{dx}\int_0^\infty udy=-\frac{\tau_W}{\rho}+\frac{dU_0}{dx}\int_0^\infty U_0dy-U_0\cdot v_W \tag{13}$$

na Eq. (13) a ordem de diferenciação e integração foi trocada por que os limites de integração não é função de x. Além disto, notando-se que:

$$\frac{d}{dx}\left[U_0\int_0^\infty udy\right]=\frac{dU_0}{dx}\int_0^\infty udy+U_0\frac{d}{dx}\int_0^\infty udy$$

então Eq. (13) pode ser re-escrita na forma:

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty u^2 dy - \frac{d}{dx}\int_0^\infty U_0 u dy + \frac{dU_0}{dx}\int_0^\infty u dy = -\frac{\tau_W}{\rho} + \frac{dU_0}{dx}\int_0^\infty U_0 dy - U_0 \cdot v_W \quad (14)$$

ou

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty u(U_0 - u)dy + \frac{dU_0}{dx}\int_0^\infty (U_0 - u)dy - U_0 \cdot v_W = \frac{\tau_W}{\rho}$$

que em termos das definições de espessura de deslocamento e espessura de momento fica sendo:

$$\frac{d}{dx}\left(U_0^2\theta\right) - U_0 \cdot v_W = \frac{\tau_W}{\rho} - \delta^* U_0 \frac{dU_0}{dx} \quad (15)$$

ou

$$\frac{d\theta}{dx} + (2\theta + \delta^*)\frac{1}{U_0^2}\frac{dU_0}{dx} - \frac{v_W}{U_0} = \frac{\tau_W}{\rho \cdot U_0^2}$$

Equação (15) foi estabelecida em 1921 por Von Kármán. Ela reflete um balanço entre a variação da quantidade de movimento (lado esquerdo da Eq.(15)) com a força viscosa e gradiente de pressão (lado direito da Eq. (15)). Equação (15) é uma função implícita do perfil de velocidade u/U_0, uma vez que a espessura de deslocamento e espessura de momento dependem destas relações, Eq. (6) e (3).

A essência do método integral consiste em assumir uma expressão que convenientemente represente a distribuição de velocidade u(y) na camada limite, levando-se em conta que ela satisfaça importantes condições de contorno para u(y) e que contenha, em adição, um parâmetro livre, comumemente adotado como sendo a espessura da camada limite, δ, que é finalmente determinado pela Eq. (15).

A eficácia do método integral consiste em, a partir de estimativas sobre a forma de comportamento do perfil de velocidades, realizar estimativas razoavelmente precisas ($\pm$ 15%) sobre o arrasto, espessura da camada limite, espessura de deslocamento e espessura de momento. O razoável grau de concordância das estimativas do método integral se deve ao fato que o processo de integração, envolvido nas expressões para δ^* e θ, tendem a suavizar os erros fazendo uma média entre os desvios positivos e negativos dos valores assumidos pelo perfil de velocidade adotado. Isto é particularmente verdadeiro para os perfis de velocidade laminar onde os perfis de velocidade são suaves e não apresentam dramáticas variações de inclinação como nos perfis de velocidade em regime turbulento.

Uma expressão simples para o perfil de velocidades deve tentar atender pelo menos as condições de contorno:

$u(0) = 0$ não deslizamento

$u(\infty) = U_0$ casamento com o escoamento externo

A condição de casamento com o escoamento externo aplica-se quando $y \to \infty$, entretanto sabe-se que este limite assintótico pode ser aproximado quando $y \to \delta$, onde δ é a espessura da camada limite. Nestas condições, as condições de contorno mínimas necessárias que um perfil genérico de velocidades deve atender deve ser:

$u(x,0) = 0$ não deslizamento (16a)

$u(x,\delta) = U_0$ casamento com o escoamento externo (16b)

Devido ao grau de liberdade na escolha do tipo de função para representar o perfil de velocidades, pode-se impor mais restrições que devem ser atendidas pela função que representa o perfil de velocidades. A inclusão de restrições, que advêm das condições de contorno, farão com que a função genérica represente melhor o perfil de velocidades. É portanto desejável que o perfil de velocidades também possa atender as condições:

$$\frac{\partial u(x,\delta)}{\partial y} = 0$$ vorticidade nula para $y \to \delta$ (16c)

$$\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial y^2} = -\frac{U_0(x)}{\upsilon}\frac{dU_0(x)}{dx}$$ atende equação do momento quando $y \to 0$ (16d)

$$\frac{\partial^2 u(x,\delta)}{\partial y^2} = 0$$ garante uma transição suave ao escoamento externo (16e)

Cabe uma observação com relação às condições aplicáveis a $y \to \delta$. Como os efeitos viscosos estão confinados na região $0 \le y \le \delta$, para $y = \delta$, $\partial u/\partial y$ e todas as suas derivadas de ordem superior, isto é $\partial^n u/\partial y^n$, devem ser nulas obrigando desta maneira que o perfil de velocidades da camada limite aproxime-se, de forma suave, da velocidade imposta pelo escoamento externo.

Procura-se agora funções genéricas capazes de atender estas condições de contorno. Da análise de similaridade pode-se pressupor que tais funções são do tipo:

$$\frac{u(x,y)}{U_0(x)} = F\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)$$

Uma forma funcional simples seria uma função polinomial do tipo:

$$\frac{u(x,y)}{U_0(x)} = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3 + e\eta^4; \quad \text{onde} \quad \eta(x,y) = \frac{y}{\delta(x)}$$

os coeficientes a, b, c, d, e são, em geral, funções de x, de maneira que soluções que não são similares podem ser obtidas. Estas constantes são obtidas através das condições de contorno impostas ao perfil de velocidades, e, conseqüentemente, o grau do polinômio determina o número de condições de contorno que podem ser satisfeitas. A seguir é dado um exemplo sobre a aplicação do método.

determina o número de condições de contorno que podem ser satisfeitas. A seguir é dado um exemplo sobre a aplicação do método.

Exemplo: Escoamento em uma Placa Plana

Como exemplo de partida, será considerado o problema de Blasius. Para o caso em consideração é proposto um perfil de velocidades do tipo:

$$\frac{u}{U_0} = a + b\eta + c\eta^2; \quad \text{onde} \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

como o perfil é um polinômio de segundo grau, pode-se atender apenas 3 condições de contorno. As condições de contorno escolhidas são: $u(x,0) = 0$, $u(x,\delta) = U_0$ e $\partial u/\partial y(x,\delta) = 0$. Impondo-se estas restrições ao perfil de velocidades, encontra-se que os valores das constantes a, b e c são, respectivamente: 0, 2, -1. Substituindo-se estes valores no polinômio que representa o perfil de velocidades obtêm-se:

$$\frac{u}{U_0} = 2\eta - \eta^2; \quad \text{onde } \eta = \frac{y}{\delta}$$

Para o problema de Blasius a equação integral do momento se reduz a:

$$\frac{d}{dx}\left(U_0^2\theta\right) = \frac{\tau_W}{\rho}$$

A espessura de momento, θ, é então avaliada através do perfil de velocidades adotado, e de acordo com Eq. (6), θ assume a forma:

$$\theta = \delta\int_0^1 \left(2\eta - \eta^2\right)\left(1 - 2\eta + \eta^2\right)d\eta = \frac{2}{15}\delta$$

enquanto que a tensão na parede:

$$\tau_W = \mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \mu\frac{U_0}{\delta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(2\eta - \eta^2\right)\Big|_{\eta=0} = 2\mu\frac{U_0}{\delta}$$

substituindo-se estas estimativas na equação integral do momento,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{15}\delta U_0^2\right) = \frac{2\upsilon U_0}{\delta}$$

ou

$$\delta d\delta = 15\frac{\upsilon}{U_0}dx$$

Impondo-se que para $x = 0$, $\delta = 0$, a integral da equação do momento resulta numa estimativa da espessura da camada limite:

$$\delta = \sqrt{30}\sqrt{\frac{\upsilon x}{U_0}}$$

ou de forma adimensional:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_x}}, \qquad \text{onde } Re_x = \frac{U_0 x}{\upsilon}$$

A tensão de cisalhamento na parede pode então ser estimada,

$$\tau_W = 2\mu\frac{U_0}{\delta} = \left(\frac{1}{2}\rho U_0^2\right)\frac{\sqrt{8/15}}{\sqrt{Re_x}}$$

e o fator de atrito C_f

$$C_f = \frac{\tau_W}{\left(\frac{1}{2}\rho U_0^2\right)} = \frac{0.730}{\sqrt{Re_x}}$$

O resultado obtido para C_f possui um erro relativo de 9.9% acima do resultado analítico de Blasius. Isto mostra que a abordagem integral da equação do momento é capaz de produzir resultados consistentes mesmo quando usada com aproximações grosseiras do perfil de velocidades. No caso em consideração um polinômio de segundo grau foi utilizado. Aproximações mais grosseiras poderiam ser utilizadas, por exemplo um polinômio do primeiro grau, neste caso somente duas condições de contorno poderiam ser satisfeitas: $u(x,0) = 0$ e $u(x,\delta) = U_0$. Por outro lado polinômios de grau superior poderiam igualmente serem utilizados e estes produziriam resultados mais precisos. Para o perfil de segunda ordem adotado no exemplo, $\partial u/\partial y(x,\delta) = -2U_0/\delta^2$ ao invés de zero. Utilizando-se um polinômio do terceiro grau, poderia-se impor a curvatura correta do perfil de velocidade para $y \rightarrow \delta$, o que produziria resultados mais precisos.

Comentários Sobre o Método Integral da Equação do Momento

A eficácia do método integral consiste em, a partir de estimativas sobre a forma do perfil de velocidades, realizar estimativas razoavelmente precisas sobre o coeficiente de atrito, perfil de velocidade, espessura da camada limite, espessura de deslocamento e espessura de momento. O razoável grau de concordância das estimativas do método integral se deve ao fato que o processo de integração, envolvido nas expressões para δ^* e θ, tendem a suavizar os erros fazendo uma média entre os desvios positivos e negativos dos valores assumidos pelo perfil de velocidade adotado. Isto é particularmente verdadeiro para os perfis de velocidade laminar onde os perfis de velocidade são suaves e não apresentam dramáticas variações de inclinação como nos perfis de velocidade em regime turbulento.

Uma questão permanece em aberto: é possível se prever o grau de incerteza nas estimativas fornecida pelo método integral? Em princípio não, entretanto, como via de regra, eles apresentam resultados satisfatórios numa faixa de ± 15%. A justificativa desta resposta reside na forma escolhida da função para representar o perfil de velocidades. Para melhor discutir esta questão, a tabela 1 apresenta diversos cálculos com perfis de velocidades distintos aplicados a uma placa plana (problema de Blasius).

	Distribuição de Velocidade $u/U_0 = F(\eta)$	Espessura de Momento $(\delta^*/x)\sqrt{Re_x}$	Coeficiente de Atrito $C_f\sqrt{Re_x}$	Erro Relativo de C_f (%)	Fator de Forma δ^*/θ
1	$F(\eta) = \eta$	1.731	0.577	- 13.1	3.00
2	$F(\eta) = 2\eta - \eta^2$	1.825	0.730	+ 9.9	2.50
3	$F(\eta) = \frac{2}{3}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$	1.738	0.646	- 2.7	2.69
4	$F(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$	1.752	0.685	+ 3.2	2.55
5	$F(\eta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$	1.742	0.655	- 1.4	2.66
6	Blasius (exata)	1.733	0.664	0.0	2.61

Tabela 1 - Resultados dos cálculos da camada limite baseado no método integral.

Na tabela 1, o perfil de velocidade linear (1) atende às condições de contorno descrita na Eq. (16a) e (16b); o perfil de velocidade quadrático (2) atende às condições de contorno descrita pela Eqs. (16a), (16b) e (16c); o perfil de velocidades cúbico (3) atende às condições de contorno descrita pelas Eqs. (16a), (16b), (16c) e (16e); o perfil de velocidades proporcional a potência quarta (4) atende às condições de contorno descrita pelas Eqs. (16a), (16b), (16c), (16d) e (16e); e finalmente, o perfil de velocidade senoidal (5) atende às condições de contorno descritas pelas Eqs. (16a) e (16b). Para fins de comparação, o perfil de velocidades (6) é o perfil da solução exata de Blasius. Para referência, estes perfis de velocidade estão mostrados na Fig. 2. Da Fig. 2 nota-se que, para perfis de velocidades polinomiais, há um aumento na suavidade para a transição ao escoamento externo a medida que se aumenta o grau do polinômio. Os perfis linear e quadrático apresentam uma derivada descontinua quando $y \rightarrow \delta$.

Nota-se que, em se tratando de aproximações polinomiais, o erro para o coeficiente de atrito local tende a diminuir a medida em que se aumenta o grau do polinômio. Um ganho substancial na precisão da resposta ocorre na utilização de um polinômio de terceiro grau; isto era de se esperar, por que um polinômio de terceiro grau pode atender mais condições de contorno do problema. Entretanto, o mesmo não ocorre para um polinômio de quarto grau, apesar de atender uma condição de contorno a mais que o de terceiro grau. A situação se agrava quando é testado um perfil de velocidades com variação senoidal. Este perfil, que atende apenas duas condições de contorno, apresenta o menor erro! As conclusões que se tira são: i) Em se tratando de perfis polinomias, aumentando-se o grau do polinômio em geral representa um ganho na precisão da resposta devido a um melhor ajuste das curvaturas do perfil de velocidades impostos pelas condições de contorno; e ii) O perfil senoidal apresenta os menores erros por pura coincidência; neste caso particular, a função senoidal é a que mais se aproxima do perfil de velocidades de Blasius.

Como, evidentemente, não são conhecidas a priori soluções exatas para se chegar a uma função que melhor descreva o perfil de velocidades e, nem tão pouco, para checar a precisão do método, espera-se em geral uma incerteza em torno de ± 15% para o método integral.