FORMA DIFERENCIAL

DAS EQUAÇÕES DE TRANSPORTE

Prof. Eugênio Spanó Rosa
FEM/DE UNICAMP
Criada em 2009
Revisada abril 2019

ÍNDICE GERAL

Forma Genérica das Equações de Transporte

O movimento das particulas em um meio continuamente deformável é representado por meio das equações que descrevem, matematicamente, a conservação de uma grandeza, por exemplo: massa, momento , energia, etc. Estas equações de conservação, também conhecidas como equações de transporte, estão genericamente representadas na sua forma diferencial na Eq. (1) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\psi)+\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\psi\right)=\nabla\cdot J+f \tag{1}$$

onde Ψ , a grandeza a ser transportada, pode ser de natureza escalar ou vetorial; ∇ é o operador diferencial que representa o divergente e ρ a densidade da grandeza Ψ; as variáveis J e f estão relacionadas a fluxos difusivos e fontes/sumidouros relativos ao transporte de Ψ. A natureza da equação de transporte de Ψ pode ser linear ou não-linear; elíptica, parabólica ou hiperbólica. Estas características serão definidas ao se explicitar as grandezas, Ψ, J e f.

Na forma como está expressa a Eq. (1) é reconhecida como '***forma conservativa'*** das equações de transporte. Esta denominação se deve ao fato dela conter, implicitamente, a equação da conservação da massa. A afirmativa ficará evidente na apresentação a seguir da forma ***'não-conservativa***'. Aplicando-se a propriedade distributiva nos termos de transporte de Ψ na Eq. (1), tem-se que:

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial t}+\underbrace{\psi\frac{\partial\rho}{\partial t}+\psi\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)}_{=0}+\rho\vec{V}\nabla(\psi)=\nabla\cdot J+f \tag{2}$$

entretanto, o segundo e terceiro termos do lado esquerdo da Eq. (2) totalizam zero pois constituem a equação da conservação da massa, Eq. (5), multiplicados por Ψ, portanto, a forma não-conservativa da Eq. (1) fica sendo:

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\psi+\rho\vec{V}\cdot\nabla\psi=\nabla\cdot J+f\ . \tag{3}$$

De forma mais compacta, os termos de transporte também podem ser expressos por meio da derivada Substantiva ou Total,

$$\rho\frac{D}{Dt}\psi=\nabla\cdot J+f\ . \tag{4}$$

Deve-se destacar que tanto a forma conservativa, Eq. (1), como a forma não-conservativa, Eq. (4) contêm as mesmas informações. Entretanto o emprego de uma forma ou outra é utilizado em diferentes esquemas numéricos. Por exemplo, o método das diferenças finitas usualmente emprega a forma não-conservativa enquanto que o método dos volumes finitos usa a forma conservativa.

<u>Comentários a Cerca dos Termos de Transporte</u>

Observando-se a estrutura das Eqs. (1) e (4) nota-se que o lado direito de ambas é o mesmo, entretanto elas mostram duas formas para os termos de transporte de Ψ. Enquanto que na forma conservativa o transporte de Ψ,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\psi)+\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\psi\right)$$

está diretamente associado ao conceito Euleriano expressa pela variação de $\rho\Psi$ dentro do V.C. infinitezimal mais o fluxo líquido de $\rho V\Psi$ que cruza a S.C.; na forma não-conservativa o transporte de Ψ,

$$\rho\frac{D}{Dt}\psi\ ,$$

está diretamente associado ao conceito Lagrangiano, onde a derivada substantiva expressa a taxa de variação de Ψ seguindo uma partícula.

Deve-se salientar que interpretações tanto para a forma conservativa como para a forma não-conservativa aplicam-se, respectivamente, ao conceito de volume de controle e de sistema. Uma relação direta das variações de uma propriedade entre um sistema e volume de controle é dada pelo Teorema de Transporte de Reynolds.

Algumas Definições para as Variáveis Ψ, J e f

Nesta seção serão apresentadas algumas definições para as variáveis Ψ, J e f empregadas em diferentes equações de conservação com o intúito de mostrar a generalidade das formas das Eqs. (1) e (4) . Por conveniência estas definições estão mostradas na Tabela 1 e referem-se às equações de conservação de massa, quantidade de movimento, vorticidade, energia térmica, energia cinética e entropia.

Tabela 1 – Definições das variáveis Ψ, J e f para as equações de conservação de massa, quantidade de movimento, vorticidade, energia térmica, energia cinética e entropia.

Variável	Ψ	J	f
Massa	1	0	0
Quantidade Movimento	$\vec{V}$	$\mathbf{T}$	$\rho\vec{g} + \rho\vec{a}_l$
Vorticidade	$\vec{\omega}$	$\mu\nabla\vec{\omega}$	$\vec{\omega}\cdot\nabla\vec{V}$
Energia Cinética	k	$\mathbf{T}\cdot\vec{V}$	$\mathbf{T}\cdot\nabla\vec{V} + \rho\vec{V}\cdot\vec{g}$
Energia Interna	$\hat{u}$	$\vec{q}_k$	$\mathbf{T}\cdot\nabla\vec{V} + q'''$
Entropia	s	$\frac{\vec{q}_k}{\theta}$	$\frac{\rho q'''}{\theta} + \frac{k}{\theta^2}(\nabla\theta)^2 + \frac{\mathbf{T}\cdot\nabla\vec{V} - P\nabla\cdot\vec{V}}{\theta}$

Na tabela 1, **T** é o tensor das tensões no fluido, u e s a energia interna e entropia específica do fluido; θ é a temperatura, q_k é o fluxo de calor por unidade de área e q''' fonte ou sorvedouro de calor por unidade de volume.

As definições contidas na Tabela 1 permitem, numa notação compacta, o estabelecimento das equações de conservação e transporte acima listadas. Para tanto, é necessário a definição de equações auxiliares ou constitutivas para a completa especificação das equações. Isto aplica-se especificamente ao tensor de tensões do fluido, **T**, ao fluxo de calor por condução, q_k e às fontes/sumidouros volumétricos de calor, q’’’. As seções seguintes abordam estes temas específicos juntamente com uma interpretação física detalhada dos termos de cada uma das equações de transporte.

A Equação da Conservação da Massa

De acordo com a Tabela 1, a equação da conservação da massa é representada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot\rho\vec{V} = 0\,. \tag{5}$$

Ela estabelece que a variação temporal da massa por unidade de volume, (kg/s.m^3), dentro do volume de controle infinitezimal é igual a variação espacial do fluxo de massa por unidade de tempo, (kg/s.m^3), que cruza a superfície de controle.

Aplicando-se a propriedade distributiva na Eq. (5), tem-se que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{V}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\vec{V} \quad \equiv \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\vec{V} \quad = \quad 0\,, \tag{6}$$

A forma apresentada na Eq. (6) revela que a variação da densidade seguindo a trajetória de uma partícula de fluido é igual ao produto da densidade pelo divergente do campo de velocidade. Isto implica em dizer que para um **fluido com densidade constante** a equação da conservação da massa se reduz para:

$$\nabla\cdot\vec{V} \quad = \quad 0\,, \tag{7}$$

isto é o fluxo volumétrico que cruza S.C. é identidamente nulo!

A mesma equação (7) ainda é válida para casos especiais onde a densidade do fluido não é constante, mas sua derivada total é, isto é, $D\rho/Dt = 0$. Estas situações ocorrem tipicamente em escoamentos com estratificação. Por exemplo em correntes marítmas ou também em correntes atmosféricas. No primeiro caso a estratificação é devido a variação da sanilidade e no segundo está associada ao gradiente de temperatura da atmosfera. Nestes casos encontra-se, ao longo de uma linha de corrente, o valor de ρ constante mas $\nabla\rho\neq 0$ para qualquer outro caminho que não seja uma linha de corrente, veja representação esquemática na Fig. 1.

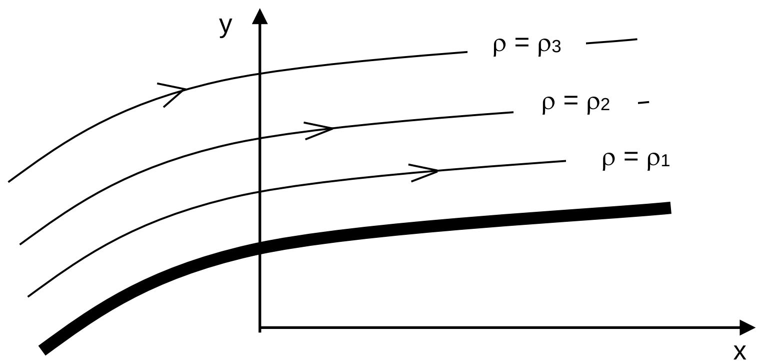

Fig. 1 – Esc. estratificado, $D\rho/Dt=0$-> $\nabla.V=0$ logo $\partial\rho/\partial t + V.\nabla\rho=0$ se $\partial\rho/\partial t$ então v e $\nabla\rho$ são ortogonais

A Equação (5) é uma equação diferencial parcial de primeira ordem cujas forma para um sistema cartesiano (x,y,z) com velocidades associadas (u,v,w) é dada por:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{\partial y} + \frac{\partial\rho w}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

As formas como estão expressas as equações (5) ou (8) constituem uma boa oportunidade para associar o teorema da divergência ao significado físico da conservação de uma propriedade escalar, no caso a massa. Considerando, por simplicidade, um caso 2D (x,y) com densidade constante, a forma integral da conservação da massa é dada por:

$$Q = \oint\!\!\!\oint_{SC} \rho\vec{V}\cdot\vec{n}\, dA = 0\,. \tag{9}$$

Os fluxos de vazão mássica que cruzam a SC estão esquematicamente representados na Fig. 2. Cada face da S.C. é associada aos pontos cardiais, [n], [s], [l] e [o] ; assim por exemplo [n] representa a face superior na direção y e [o] a face esquerda na direção x.

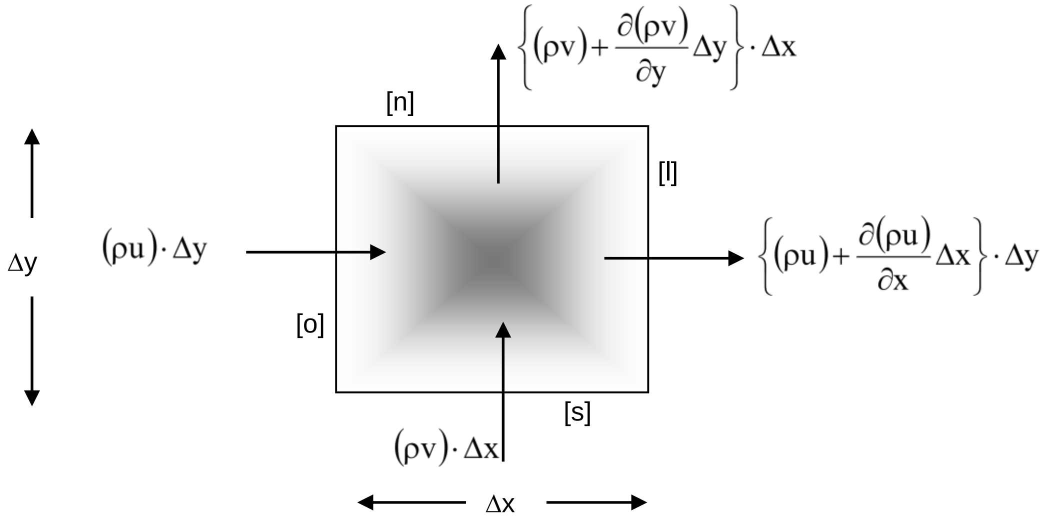

Fig. 2 – Representação esquemática dos fluxos vazão mássica na S.C.

Os fluxos de vazão mássica que cruzam as faces [o] e [s] são:

$$-(\rho u)\cdot\Delta y\,,\qquad -(\rho v)\cdot\Delta x\,, \tag{10}$$

considerando um incremento infinitezimal nas direções x e y, os fluxos que cruzam as faces [l] e [n] são:

$$\left\{(\rho u)+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x\right\}\cdot\Delta y\,,\qquad \left\{(\rho v)+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\Delta y\right\}\cdot\Delta x\,, \tag{11}$$

Com os fluxos expressos pelas Eqs. (10) e (11) é possível determinar o fluxo total que cruza as faces do V.C.,

$$Q=\left\{\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}\right\}\cdot\Delta x\Delta y=0\,. \tag{12}$$

A lado esquerdo da Eq. (12) pode ser identificado com o divergente do produto entre a densidade e o campo de velocidades do fluido, conforme decorrência da transformação da integral de superfície em volume pelo teorema da divergência:

$$Q=\oiint_{SC}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\cdot dA=\iiint_{VC}\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)\cdot d\forall=0\,. \tag{13}$$

Do ponto de vista físico, tomar o divergente de $\rho\vec{V}$ equivale a avaliar o fluxo líquido de massa que cruza um volume de controle infinitezimal.

A Equação do Transporte da Quantidade de Movimento

A terceira lei de Newton é válida para um sistema e expressa que a taxa de variação de quantidade de movimento de um sistema é igual a somatória das forças externas que atuam no sistema:

$$m\cdot\left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_{sist.}=\sum\vec{F}_{ext}$$

A extensão da terceira lei de Newton para materiais continuamente deformáveis (fluido), passa pela translação das propriedades do sistema para aquelas medidas a partir de um volume de controle. Esta transformação é feita pelo Teorema de Transporte de Reynolds. Tomando-se por forças externas o tensor de deformação do fluido, a força de campo gravitacional e a aceleração não inercial do referencial do sistema, o balanço de forças na forma integral fica sendo:

$$\iiint_{V.C.} \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} d\forall + \oint_{S.C.} \rho \vec{V}\left(\vec{V} \cdot \vec{n}\right) dA = \oint_{S.C.} T \cdot \vec{n} dA + \iiint_{V.C.} \rho \vec{g} d\forall - \iiint_{V.C.} \rho \vec{a}_I d\forall .$$

Por meio do teorema da divergência chega-se a sua forma diferencial conservativa, coincidente com aquela indicada na Tabela 1,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \vec{V}\right) + \nabla \cdot \left(\rho \vec{V}\vec{V}\right) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \cdot \vec{g} - \rho \cdot \vec{a}_I , \tag{14}$$

e a não conservativa por:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \cdot \vec{g} - \rho \cdot \vec{a}_I . \tag{15}$$

O lada esquerdo das Eq. (14) e (15) representam, respectivamente, a taxa de variação da quantidade de movimento que cruza a S.C. por unidade de volume (conceito Euleriano) ou a aceleração seguindo-se a trajetória uma partícula de fluido (conceito Lagrangeano). O lado direito das Eqs. (14) e (15) representa o somatório das forças externas, por unidade de volume, atuantes no V.C., neste caso representadas pelo tensor de tensões do fluido, **T**, devido ao campo hidrostático e às deformações do fluido, pela força de campo gravitacional, g e também por uma aceleração inercial, caso o referencial das velocidades não seja inercial. Forças de campo de natureza elétrica, eletro-magnética, centrífuga, por exemplo, poderiam ser representadas na forma genérica por meio de uma função potencial e adicionadas linearmente no lado direito das equações. A aceleração inercial é devido ao movimento relativo do referêncial do sistema em relação a um referencial inercial. Como os movimentos de translação e rotação entre referenciais são independentes, a aceleração inercial é dada em função destes,

$$\vec{a}_I = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right),$$

onde R é o vetor posição entre referenciais, Ω é a rotação do referencial não-inercial e r é o vetor posição do referencial não-inercial a um ponto qualquer no seu domínio, conforme indiacado na Fig. 2. O primeiro termo do lado esquerdo representa a aceleração translacional, o segundo termo a aceleração angular, o terceiro e quarto termos representam, respectivamente, a aceleração de Coriolis e Centrífuga.

As Equações (14) e (15) são equações vetoriais, isto é, possuem três componentes, uma para cada direção. Elas constituem um sistema de equações diferenciais parciais não lineares devido aos termos inerciais. Considerando um referencial inercial e um sistema cartesiano, (x,y,z), com velocidades associadas (u,v,w), as componentes da Eq. (14) são:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{T}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{T}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{T}_{zx}}{\partial z} + \rho \cdot g_x , \tag{15a}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{T}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{T}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{T}_{zy}}{\partial z} + \rho \cdot g_y , \tag{15b}$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho ww)}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{T}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{T}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{T}_{zz}}{\partial z} + \rho \cdot g_z . \tag{15c}$$

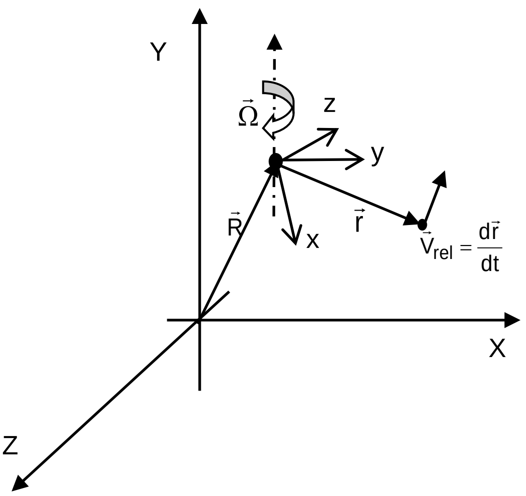

Figura 2 – Representação do referencial Não-Inercial (x,y,z) deslocando-se com velocidade linear e angular, dR/dt e Ω, com relação ao referencial Inercial (X,Y,Z).

As equações (15a) a (15c) representam a conservação de quantidade de movimento nas direções x, y e z, respectivamente; g_x, g_y e g_z representam as componentes do vetor aceleração da gravidade nas direções (x,y,z) e $\mathbf{T}_{ij}$ representa a componente do tensor das tensões do fluido que age num plano cuja normal é paralela a direção 'i' e cuja direção é paralela a direção 'j'.

A forma diferencial da Eq. (15) encobre o significado físico dos termos a ela associados. O processo de redução do V.C. a um volume infinitezimal não dissocia o significado que os termos de transporte e do tensor das tensões possuia no caso macroscópico. A seção que segue discute esta similaridade.

Interpretação da Física dos Termos Convectivos e do Tensor das Tensões

Os termos convectivos ou de transporte estão representados na forma Integral por meio da Eq. (16)

$$\vec{P} = \oiint_{SC} \rho\vec{V}\cdot\vec{n}\cdot dA = \oiint_{SC} \vec{V}\cdot d\dot{m}\,, \tag{16}$$

ela representa o taxa de quantidade de movimento que cruza a SC. A variável P é de natureza vetorial e sua componente na direção x é dada por:

$$P_x = \oiint_{SC} \rho u\cdot\vec{V}\cdot\vec{n}dA\,. \tag{17}$$

Considerando um caso 2D (x,y) por simplicidade, os fluxos P_x que cruzam a SC são esquematicamente representados na Fig. 3. Cada face da S.C. é associada aos pontos cardiais, [n], [s], [l] e [o] ; assim por exemplo [n] representa a face superior na direção y e [o] a face esquerda na direção x.

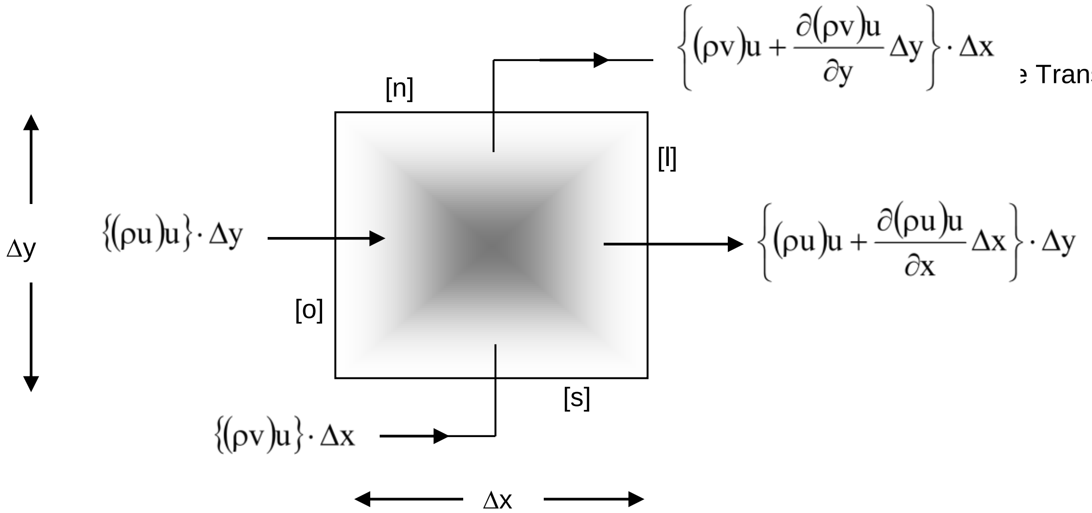

Fig. 3 – Representação esquemática dos fluxos de quantidade de movimento na direção (x)

Os fluxos de quantidade de movimento na direção (x) que cruzam as faces [o] e [s] são:

$$-\{(\rho u)u\}\cdot\Delta y, \qquad -\{(\rho v)u\}\cdot\Delta x, \tag{18}$$

considerando um incremento infinitezimal nas direções x e y, os fluxos que cruzam as faces [l] e [n] são:

$$\left\{(\rho u)u + \frac{\partial(\rho u)u}{\partial x}\Delta x\right\}\cdot\Delta y\ , \qquad \left\{(\rho v)u + \frac{\partial(\rho v)u}{\partial y}\Delta y\right\}\cdot\Delta x\ , \tag{19}$$

os termos entre parentesis estão associados aos fluxos de massa que cruzam as superfícies enquanto que o produto destes fluxos pela velocidade na direção (x) resulta na quantidade de movimento na direção paralela à velocidade.

Com os fluxos expressos pelas Eqs. (13) e (14) é possível determinar P_x,

$$P_x = \left\{\frac{\partial\rho uu}{\partial x} + \frac{\partial\rho vu}{\partial y}\right\}\cdot\Delta x\Delta y\ , \tag{20}$$

de modo similar pode-se mostrar que os fluxo de quantidade de movimento na direção y, P_y, é dado por:

$$P_y = \left\{\frac{\partial\rho uv}{\partial x} + \frac{\partial\rho vv}{\partial y}\right\}\cdot\Delta x\Delta y\ , \tag{21}$$

As Equações (20) e (21) mostram que o fluxo líquido de quantidade de movimento que cruza a S.C. constituem o vetor P. A associação entre a forma diferencial dos termos convectivos a forma integral fica então estabelecida. Esta associação é também uma manifestação da transformação da integral de superfície em integral de volume pelo teorema da divergência.

O fluxo de quantidade de movimento que cruza cada face da S.C. tem natureza tensorial. Isto é, para defini-lo é necessário uma área (no caso face) e uma direção. Este tensor é formado pelo produto diádico dos vetores velocidade,

$$\mathbf{W} = \rho\vec{V}\vec{V} = \rho u_i u_j = \begin{bmatrix}\rho uu & \rho vu\\ \rho uv & \rho vv\end{bmatrix},$$

logo o fluxo de quantidade de movimento que cruza a S.C. pode ser expresso pela divergência de **W** no V.C. utilizando o teorema da divergência:

$$\vec{P} = \oiint_{SC}\rho\vec{V}\vec{V}\cdot dA = \iiint_{VC}\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\vec{V}\right)\cdot d\forall\ . \tag{22}$$

Reconhecendo que o divergente de uma grandeza tensorial é um vetor, as componentes $\nabla.\mathbf{W}$ constituem o fluxo de quantidade de movimento por unidade de volume, $\vec{p}$:

$$\vec{p} = \nabla \cdot \mathbf{W} \quad \rightarrow \quad p_i = \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \rho uu}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho vu}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \rho uv}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho vv}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Do ponto de vista físico, tomar o divergente de $\rho\vec{V}\vec{V}$ equivale a avaliar o fluxo líquido de quantidade de movimento, por unidade de volume, que cruza um volume de controle infinitezimal. O operador diferencial divergente aplicado a um tensor reduz sua ordem, e neste caso, fornece as componentes do vetor quantidade de movimento.

O tensor das tensões T no fluido possui interpretação similar. Neste caso ele representa as forças externas que agem na S.C. cuja resultante é avaliada na sua forma integral por

$$\vec{J} = \oiint_{SC} \mathbf{T} \cdot \vec{n} \cdot dA\,. \tag{24}$$

Considerando um caso 2D (x,y) por simplicidade, a força resultante na direção x devido ao tensor **T** está esquematicamente representada na Fig. 3. Como nos casos anteriores, cada face da S.C. é associada aos pontos cardiais, [n], [s], [l] e [o] .

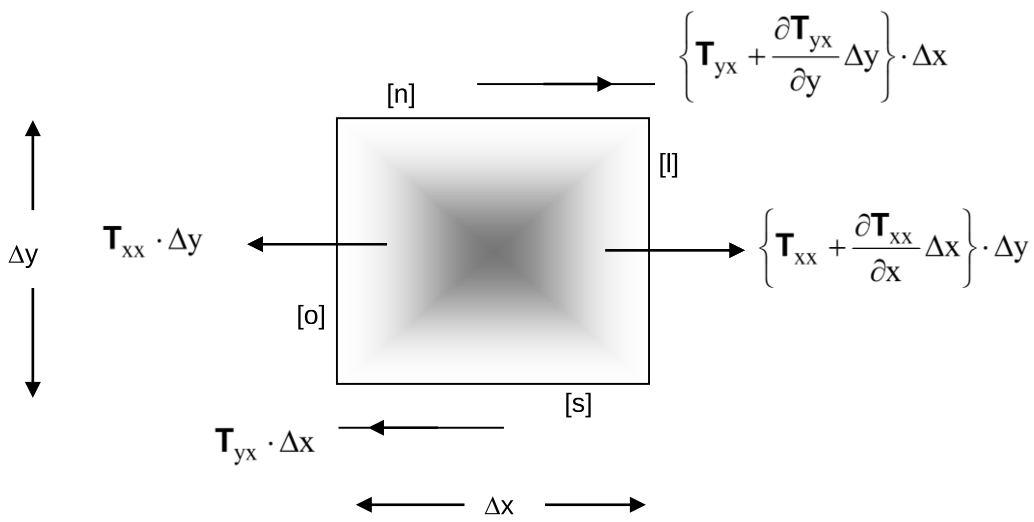

Fig. 4 – Representação esquemática das forças atuantes na direção (x) devido ao tensor **T**.

Coletando as componentes de **T** atuantes em cada face da S.C. na direção (x) obtêm-se a força resultante nesta direção:

$$J_x = \left\{ \frac{\partial \mathbf{T}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{T}_{yx}}{\partial y} \right\} \cdot \Delta x \Delta y\,, \tag{20}$$

de modo similar pode-se mostrar que a força resultante na direção (y), devido ao tensor **T** é dada por:

$$J_y = \left\{ \frac{\partial \mathbf{T}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{T}_{yy}}{\partial y} \right\} \cdot \Delta x \Delta y\,. \tag{21}$$

As equações (20) e (21) são as forças resultantes nas direções (x) e (y) respectivamente, causadas pelo tensor das tensões **T**. Resultado equivalente pode ser encontrado aplicando-se a transformação de integral de área para volume,

$$\vec{J} = \oiint_{SC} \mathbf{T} \cdot \vec{n} \cdot dA = \oiiint_{VC} \nabla \cdot (\mathbf{T}) \cdot d\forall\,. \tag{22}$$

O lado direito da igualdade mostra que as componentes da força resultante, por unidade de volume, são expressos por:

$$\vec{j} = \nabla \cdot \mathbf{T} \quad \rightarrow \quad j_i = \frac{\partial T_{j,i}}{\partial x_j} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} j_x \\ j_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{T}_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathbf{T}_{yx}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \mathbf{T}_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathbf{T}_{yy}}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Do ponto de vista físico, tomar o divergente de **T** equivale a avaliar a força resultante produzida pela ação da tensão, por unidade de volume, que atua numa superfície de controle infinitezimal. O operador diferencial divergente aplicado a um tensor reduz sua ordem, e neste caso, fornece as componentes do vetor da força resultante.

Equação Constitutiva para o Tensor das Tensões, T

Para definir completamente as Eqs. (15a) a (15c) é necessário estabelecer uma dependência entre o tensor de tensões no fluido, **T**, e o tensor de deformações, **S**, correspondente ao campo de velocidades. A equação que estabelece a dependência entre **T** e **S** é denominada por equação constitutiva do fluido. Uma discussão em maior profundidade sobre equações constitutivas será adiada para um próximo capítulo. No momento será apresentado a equação constitutiva que estabelece uma **relação linear** entre **T** e **S**, também conhecida como equação constitutiva para um fluido Newtoniano. A denominação de fluido Newtoniano também é frequente na literatura. Ela refere-se a fluidos com comportamento linear entre **T ,** **Q** e **S:**

$$\mathbf{T} = -\mathbf{P} + \lambda \mathbf{Q} + 2\mu \mathbf{S}, \tag{24}$$

onde μ e λ são coeficientes de proporcionalidade entre **T, S** e **Q** denominados por primeiro e segundo coeficientes de viscosidade do fluido, **P**, **Q** e **S** são, respectivamente, os tensores da pressão hidrostática, divergência de volume e a parte simétrica do tensor de deformação do fluido, dados por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot \vec{V} & 0 & 0 \\ 0 & \nabla \cdot \vec{V} & 0 \\ 0 & 0 & \nabla \cdot \vec{V} \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2}\left[\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^T\right],$$

onde P é a pressão termodinâmica do fluido, e $\nabla \cdot \vec{V}, \nabla \vec{V}$ e $\nabla \vec{V}^T$ representa o divergente, o gradiente e seu transposto do vetor velocidades.

Por conveniência, as componentes de **S** em coordenadas cartesianas (x,y,z), são:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left(2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) & \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \left(2\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) & \left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & \left(2\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) \end{bmatrix}.$$

A relação entre o segundo coeficiente de viscosidade e o primeiro é dada pela hipótese de Stokes:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

e μ é também conhecido como a viscosidade dinâmica do fluido.

O tensor das tensões **T** é representado de forma mais compacta em notação indicial cartesiana:

$$\mathbf{T}_{i,j} = -P \cdot \delta_{i,j} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \cdot \delta_{i,j} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{25}$$

Reconhecendo que o tensor **T** é composto por duas parcelas: uma devido a pressão termodinâmica e outra devido ao movimento do fluido, denomina-se por **T'** o tensor de desvio das tensões para caracterizar a parcela devido ao movimento do fluido,

$$\mathbf{T}'_{i,j} = -\frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\cdot\delta_{i,j} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{26}$$

Para fluidos incompressíveis, $\nabla\cdot\vec{V} = 0$, o tensor das tensões simplifica-se para:

$$\mathbf{T}_{i,j} = -P\cdot\delta_{i,j} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{27}$$

Simetria do Tensor das Tensões do Fluido, T

Uma importante propriedade que o campo de tensões do fluido apresenta é sua simetria em relação a diagonal principal, isto é, o tensor **T** é simétrico,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{x,y} &= \mathbf{T}_{y,x} \\ \mathbf{T}_{y,z} &= \mathbf{T}_{z,y} \\ \mathbf{T}_{z,x} &= \mathbf{T}_{x,z} \end{aligned} \quad . \tag{28}$$

A relevância desta propriedade reside no fato que a simetria do tensor deve ser atendida por qualquer tipo de fluido e que portanto qualquer lei constitutiva que relacione o campo de tensões com o campo de deformações do fluido deve atende-la.

A demonstração desta propriedade parte do postulado que o torque resultante aplicado a uma partícula de fluido seja nulo. A equação de conservação da quantidade de movimento angular do sistema é obtida considerando-se que a variação da quantidade de movimento angular do sistema é igual a somatória dos torques externos aplicados ao sistema,

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\vec{x}\times\vec{V}\right) = \sum\left(\vec{x}\times\vec{F}_{ext}\right), \tag{29}$$

onde $\vec{x}$ é o vetor posição que liga a origem do referencial à partícula de fluido. Considerando que as forças externas que geram momentos são as forças de superfícies, representadas pelo tensor das tensões, **T**, e pela força de campo, g, então com o auxílio da Eq. (15) a Eq. (29) passa a ser:

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\vec{x}\times\vec{V}\right) = \nabla\cdot\left(x\times\mathbf{T}\right) + \left(\vec{x}\times\rho\vec{g}\right). \tag{29}$$

Aplicando-se a propriedade distributiva no primeiro termo da Eq. (29), tem-se que:

$$\rho\vec{x}\times\frac{D\vec{V}}{Dt} + \underbrace{\rho\vec{V}\times\frac{D}{Dt}(\vec{x})}_{=0} = \nabla\cdot\left(\vec{x}\times\mathbf{T}\right) + \left(\vec{x}\times\rho\vec{g}\right) \tag{30}$$

mas reconhecendo-se que o segundo termo é nulo uma vez que $\vec{V}\times D\vec{x}/Dt$ é o produto vetorial entre dois vetores idênticos, a Eq. (30) toma a forma:

$$\vec{x}\times\left\{\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} - \rho\vec{g}\right\} = \nabla\cdot\left(\vec{x}\times\mathbf{T}\right) \quad . \tag{31}$$

O divergente do produto vetorial entre o vetor posição $\vec{x}$ e o tensor **T** é um vetor cuja representação em notação indicial da componente na direção r é:

$$\nabla\cdot\left(\vec{x}\times\mathbf{T}\right)_r = \vec{\delta}_r\sum_i\sum_j\sum_k\varepsilon_{j,k,r}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_k\cdot\mathbf{T}_{i,j}\right),$$

em termos das direções 1,2 e 3, a componente (1) do vetor resulta das variações que os índices j, k e i assumem quando r = 1, conforme mostrado abaixo:

$$\nabla\cdot\left(\vec{x}\times\mathbf{T}\right)_1 \quad =$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_3\cdot\mathbf{T}_{1,2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_3\cdot\mathbf{T}_{2,2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_3\cdot\mathbf{T}_{3,2}\right)\right]-\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_2\cdot\mathbf{T}_{1,3}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_2\cdot\mathbf{T}_{2,3}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_2\cdot\mathbf{T}_{3,3}\right)\right]$$

aplicando o operador de diferenciação nos produtos e coletando os termos semelhantes, tem-se que:

$$\nabla\cdot\left(\vec{x}\times\mathbf{T}\right)_1 \quad =$$

$$x_3\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathbf{T}_{1,2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathbf{T}_{2,2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mathbf{T}_{3,2}\right)\right]-x_2\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathbf{T}_{1,3}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathbf{T}_{2,3}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mathbf{T}_{3,3}\right)\right]+\left[\mathbf{T}_{3,2}-\mathbf{T}_{2,3}\right],$$

mas reconhecendo-se que os dois primeiros termos do lado esquerdo resultam da componente na direção (1) de $\left(\vec{x}\times\nabla T\right)_1$, isto é,

$$\nabla\cdot\left(\vec{x}\times\mathbf{T}\right)_1 \quad = \left(\vec{x}\times\nabla\mathbf{T}\right)_1+\left\lfloor\mathbf{T}_{3,2}-\mathbf{T}_{2,3}\right\rfloor, \tag{32a}$$

de maneira similar, as componentes nas direções 2 e 3 são:

$$\nabla\cdot\left(\vec{x}\times\mathbf{T}\right)_2 \quad = \left(\vec{x}\times\nabla\mathbf{T}\right)_2+\left\lfloor\mathbf{T}_{3,1}-\mathbf{T}_{1,3}\right\rfloor, \tag{32b}$$

$$\nabla\cdot\left(\vec{x}\times\mathbf{T}\right)_3 \quad = \left(\vec{x}\times\nabla\mathbf{T}\right)_3+\left\lfloor\mathbf{T}_{2,1}-\mathbf{T}_{1,2}\right\rfloor, \tag{32c}$$

Substituindo-se a Eq. (32) na Eq. (31), tem-se que a componente na direção (k) da Eq. (31) passa a ser:

$$\left\{\vec{x}\times\underbrace{\left[\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}\ -\ \nabla\cdot\mathbf{T}\ -\ \rho\vec{g}\right]}_{\equiv 0}\right\}_{(k)} \quad = \quad \varepsilon_{i,j,k}\mathbf{T}_{i,j}\ . \tag{33}$$

O torque exercido numa partícula de fluido é igual ao lado direito da Eq. (33). Observa-se que cada componente do torque é nulo uma vez que ele resulta do produto vetorial entre $\vec{x}$ e a Equação da conservação da quantidade de movimento. Em vista que o lado esquerdo da Eq. (33) é nulo seu lado direito também deve ser, portanto

$$\varepsilon_{i,j,k}\mathbf{T}_{i,j}=0\,,$$

isto somente é verdadeiro se o tensor **T** for simétrico, $\mathbf{T}_{i,j}=\mathbf{T}_{j,i}$, como afirmado na Eq. (28).

As Equações de Navier-Stokes

As equações de transporte de quantidade de movimento expressas pelas tensões do fluido, Eq. (14), aplicam-se a qualquer classe de fluidos desde que seja especificado uma equação constitutiva para o fluido. As equações de Navier-Stokes são obtidas a partir da substituição da equação constitutiva para fluido Newtoniano, Eq. (25) na Eq. (14). Desta forma, pode-se dizer que elas particularizam a equação de transporte de quantidade de movimento no sentido destas serem aplicáveis somente para fluidos que exibem comportamento linear entre **T e S**, ou seja, fluidos Newtonianos.

A forma mais geral da Equação de Navier-Stokes é mostrada na Eq. (28). Ela aplica-se para escoamentos com propriedades físicas variáveis, isto é, ρ e μ podem variar em todo o campo do escoamento,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\vec{V}\right)+\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\vec{V}\right)=-\nabla P-\frac{2}{3}\nabla\left(\mu\nabla\cdot\vec{V}\right)+\nabla\cdot\left(2\mu\mathbf{S}\right)+\rho\cdot\vec{g}\,. \tag{34}$$

Lambrando-se que a Equação de NS é um modelo baseado em princípios físicos fundamentais, sua formulação constitui um dos grandes sucessos da mecânica dos fluidos. Ela vêm sendo estudada, testada e aplicada nos mais diversos fenômenos físicos que envolvem transporte de fluidos por mais de um século sem haver sido contestada.

A forma geral da equação de NS pode ser simplificada se sua aplicação for para fluidos incompressíveis com propriedades constantes, neste caso a Eq. (28) se transforma para:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\vec{V}\right)+\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\vec{V}\right)=-\nabla P+2\mu\nabla\cdot\mathbf{S}+\rho\vec{g}\,. \tag{35}$$

Para propriedades constantes, existe a identidade entre o tensor de deformações e o campo de velocidades,

$$\nabla\cdot 2\mathbf{S}=\nabla\cdot\left[\nabla\vec{V}+\nabla\vec{V}^{T}\right]=\nabla^2\vec{V}+\nabla\left[\nabla\cdot\vec{V}\right]. \tag{36}$$

Substituindo-se Eq. (30) na Eq. (29), chega-se uma das formas mais populares da eq. de NS para fluidos com propriedades constantes,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\vec{V}\right)+\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\vec{V}\right)=-\nabla P+\mu\nabla^2\vec{V}+\rho\vec{g}\,, \tag{31a}$$

ou na forma não-conservativa,

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=-\nabla P+\mu\nabla^2\vec{V}+\rho\vec{g}\,. \tag{31b}$$

O significado de cada termo da Eq.(31) é dado como segue: primeiro termo é a variação da quantidade de movimento que também pode ser entendido como a força por unidade de volume de uma partícula infinitezimal visto que é o produto da densidade pela aceleração material; o segundo e terceiro termos referem-se as forças de superfície que atuam no volume de controle infinitezimal, eles representam a ação das forças resultantes do tensor das tensões no fluido que está sub-dividido em duas partes: uma resultante do campo de pressões e outra devido as deformações dada pelo campo de velocidades; finalmente o quarto termo representa a força de campo gravitacional por unidade de volume.

Em termos das componentes (u,v,w), a Eq.(31) é escrita

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vu)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho wu)}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]+\rho\cdot g_x\,, \tag{32a}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vv)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho wv)}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]+\rho\cdot g_y\,, \tag{32b}$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vw)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho ww)}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]+\rho\cdot g_z\,. \tag{32c}$$

Com o auxílio da identidade vetorial:

$$\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}=\nabla\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right)-\vec{V}\times\nabla\times\vec{V} \tag{33}$$

pode-se escrever uma forma alternativa à Equação de NS aplicada para fluidos com propriedades constantes. Substituindo-se Eq. (33) na Eq. (31b), tem-se que:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{\left(\vec{V}\cdot\vec{V}\right)}{2}+\frac{P}{\rho}+gz\right)=\nu\nabla^2\vec{V}+\vec{V}\times\vec{\omega} \tag{34}$$

onde ω é a vorticidade definida na Eq. (35). Deve-se enfatizar que a informação contida na Eq. (34) é a mesma daquela contida na Eq. (31), entretanto este formato é conveniente para destacar que os termos associados a energia mecânica do fluido, isto é, energia cinética, trabalho de pressão e energia potencial se conservam desde que o escoamento seja isento de vorticidade e de viscosidade. Neste caso, para um escoamento em regime permanente, a Eq. (34) se reduz a conhecida equação de Bernoulli:

$$\frac{\rho V^2}{2} + P + \rho g z = \text{constante} \tag{34}$$

Equação de Transporte da Vorticidade

O campo de escoamento pode ser expresso tanto por meio do balanço da quantidade de movimento linear quanto pela variação da velocidade angular das partículas. Frequentemente determinados fenômenos em fluido-dinâmica são fácilmente visualizados por meio da rotação do fluido ao invés das variáveis primitivas U,V,W e P. No entanto deve-se enfatizar que tanto o conceito de transporte da vorticidade como o transporte de quantidade de movimento contém a mesma informação pois a equação da vorticidade é obtida a partir de uma transformação linear da equação de quantidade de movimento.

A vorticidade $\vec{\omega}$ é definida por meio de um conceito cinemático:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} \;, \tag{35}$$

que expressa o vetor $\vec{\omega}$ como sendo igual duas vezes a frequência de um elemento de fluido em estado de rotação. Partindo-se da Eq. (34) e aplicando-se o operador rotacional em ambos os lados da equação temos:

$$\frac{\partial\left(\nabla \times \vec{V}\right)}{\partial t} + \nabla \times \nabla\left[\frac{\left(\vec{V}\cdot\vec{V}\right)}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right] = \nu\nabla^2\left(\nabla \times \vec{V}\right) + \nabla \times \left(\vec{V} \times \vec{\omega}\right), \tag{34}$$

mas reconhecendo-se que a aplicação do rotacional ao gradiente de uma função fornece um resultado nulo, isto é $\nabla \times \nabla\phi \equiv 0$, a Eq. (34) passa a ser,

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} - \nabla \times \left(\vec{V} \times \vec{\omega}\right) = \nu\nabla^2\vec{\omega}\,. \tag{35}$$

Por sua vez, o segundo termo do lado esquerdo da Eq. (35) pode ser decomposto em:

$$\nabla \times \left(\vec{V} \times \vec{\omega}\right) = \vec{V}\left(\nabla \cdot \vec{\omega}\right) - \vec{\omega}\left(\nabla \cdot \vec{V}\right) - \vec{V} \cdot \left(\nabla\vec{\omega}\right) + \vec{\omega} \cdot \left(\nabla\vec{V}\right), \tag{36}$$

Para um fluido incompressível, $\nabla \cdot \vec{V} \equiv \nabla \cdot \vec{\omega} \equiv 0$ e, com a ajuda da Eq. (36) a Eq. (35) passa a ser:

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla\vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \nabla\vec{V} + \nu\nabla^2\vec{\omega}\,. \tag{37}$$

Observe que o primeiro termo é a derivada substantiva da vorticidade. Portanto a taxa de variação da vorticidade seguindo uma partícula é igual a difusão da vorticidade mais um termo correspondento ao produto $\vec{\omega} \cdot \nabla\vec{V}$. Este termo corresponde a criação ou destruição de vorticidade e é único na equação de transporte de vorticidade. Vamos mostrar a seguir que ele é proporcional a parte simétrica do tensor de deformações.

Para demonstrar esta propriedade decompõe-se o tensor deformação em suas partes simétricas e anti-simétricas, **S** e **R**, respectivamente†;

$$\vec{\omega} \cdot \nabla\vec{V} = \vec{\omega} \cdot S^T + \vec{\omega} \cdot R^T\,.$$

O tensor **S** por ser simétrico é igual ao seu transposto, $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$ e o tensor anti-simétrico **R** é igual ao negativo de seu transposto, $\mathbf{R}^T = -\mathbf{R}$. A equação acima pode ser re-escrita por:

† $\nabla\vec{V} = S^T + R^T \quad \text{e} \quad \nabla\vec{V}^T = S + R$

$$\vec{\omega}\cdot\nabla\vec{V} = \vec{\omega}\cdot S - \vec{\omega}\cdot R\,. \qquad (38)$$

As componentes do tensor **R**, por ser anti-simétrico podem ser expressas pelas componentes do vetor vorticidade,

$$R_{i,j} = \frac{1}{2}\varepsilon_{i,j,k}\omega_k\,,$$

então o produto,

$$\omega_i \cdot R_{j,k} = \frac{1}{2}\varepsilon_{i,j,k}\omega_j\omega_k\,,$$

mas a ordem dos índices j e k no tensor alternante $\varepsilon_{i,j,k}$ pode ser trocada sem alterar o sinal da igualdade,

$$\omega_i \cdot R_{j,k} = \frac{1}{2}\varepsilon_{i,j,k}\omega_j\omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{i,k,j}\omega_j\omega_k\,,$$

Invertendo-se mais uma vez a ordem dos índices i,,j,k, obtem-se uma mudança de sinal porque o tensor alternante $\varepsilon_{i,j,k}$ é anti-simétrico. Portanto chega-se a igualdade:

$$\omega_i \cdot \mathbf{R}_{j,k} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{i,j,k}\omega_j\omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{i,j,k}\omega_j\omega_k\,.$$

A igualdade é verdadeira somente se ambos os lados forem identicamente nulos. Consequentemente $\omega_i.\mathbf{R}_{j,k} = 0$; somente a parte simétrica de $\omega_i.\mathbf{S}_{i,j}$, contribui na Eq. (38). Então, a equação da conservação de vorticidade, na sua forma não-conservativa, é expressa por:

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\vec{\omega} = \vec{\omega}\cdot\mathbf{S} + \nu\nabla^2\vec{\omega}\,. \qquad (39a)$$

ou na forma conservativa,

$$\frac{\partial\rho\vec{\omega}}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\vec{\omega}\vec{V}\right) = \rho\vec{\omega}\cdot\mathbf{S} + \mu\nabla\cdot\nabla\vec{\omega}\,. \qquad (39b)$$

Comparando-se a equação da vorticidade, Eq. (39), com a equação de transporte de quantidade de movimento em variáveis primitivas, nota-se duas importantes diferenças: a ausência do termo de pressão e o aparecimento de um termo fonte: $\vec{\omega}\cdot\mathbf{S}$. A ausência dos termos de pressão é porque foi tomado o rotacional em ambos os lados da equação de quantidade de movimento, e $\nabla\times\nabla P \equiv 0$. O termo fonte adicional revela um mecanismo de produção ou destruição de vorticidade não possível de ser identificado em formulações com variáveis primitivas. No entanto, o campo de velocidades determinado pela formulação com variáveis primitivas coincide com aquele determinado a partir da vorticidade. Nas seções seguintes serão discutidos alguns aspectos relativo ao termo de produção de vorticidade e à equação da pressão.

<u>O Termo de Produção de Vorticidade</u>

A Equação (37) mostra que o transporte de vorticidade é balanceado pela difusão da vorticidade e pelo termo de produção ou destruição de vorticidade, $\vec{\omega}\cdot\mathbf{S}$. Este mecanismo, não revelado pela formulação com variáveis primitivas, representa uma amplificação e uma rotação ou redistribuição do vetor vorticidade pela taxa de deformação. As componentes vetoriais do termo de produção são dadas nas relações abaixo:

$$\vec{\omega}\cdot\mathbf{S} = \begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{S}_{xx} & \mathbf{S}_{yx} & \mathbf{S}_{zx}\\ \mathbf{S}_{xy} & \mathbf{S}_{yy} & \mathbf{S}_{zy}\\ \mathbf{S}_{xz} & \mathbf{S}_{yz} & \mathbf{S}_{zz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\omega_x\mathbf{S}_{xx} + \omega_y\mathbf{S}_{yx} + \omega_z\mathbf{S}_{zx}\\ \omega_x\mathbf{S}_{xy} + \omega_y\mathbf{S}_{yy} + \omega_z\mathbf{S}_{zy}\\ \omega_x\mathbf{S}_{xz} + \omega_y\mathbf{S}_{yz} + \omega_z\mathbf{S}_{zz}\end{bmatrix}, \qquad (40a)$$

ou, de forma mais compacta, sua componente na direção (i) em termos da notação indicial é representada por:

$$\left(\vec{\omega}\cdot S\right)_i = \omega_j \cdot S_{j,i} \quad \text{onde} \quad S_{j,i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \qquad (40b)$$

Pode-se constatar na Eq. (40) que cada componente vetorial do termo de produção é constituida por duas parcelas: uma representando a redistribuição de vorticidade e outra devido ao estiramento da componente da vorticidade. Tomando-se como exemplo a componente na direção z da Eq. (40a) tem-se que as parcelas:

$$\omega_x \mathbf{S}_{xz} + \omega_y \mathbf{S}_{yz}$$

representam uma redistribuição do produto vorticidade-deformação que ocorrem nos planos x e y para a componente (z) da equação da vorticidade. Por sua vez o termo:

$$\omega_z \mathbf{S}_{zz}$$

representa o alongamento da componente de vorticidade na direção z dado pela deformação na mesma direção, 'vortex stretching'.

De modo geral, a vorticidade pode ser amplificada se a $\mathbf{S}_{i,j}>0$, por outro lado ela pode ser reduzida caso $\mathbf{S}_{i,j} < 0$. Este termo de produção ou destruição de vorticidade ocorre somente em escoamentos 3D. Para escoamentos 2D o vetor vorticidade possui apenas uma componente não nula na direção normal ao plano do escoamento enquanto que o tensor deformação tem componentes não nulas somente aquelas que correspondem ao plano. Por exemplo, um escoamento no plano (x,y), apresenta somente a componente ω_z diferente de zero e o tensor deformação tem somente as componentes $\mathbf{S}_{xx}$, $\mathbf{S}_{xy}$ $\mathbf{S}_{yx}$ e $\mathbf{S}_{yy}$ não nulas,

$$\vec{\omega}\cdot\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{xx} & \mathbf{S}_{yx} & 0 \\ \mathbf{S}_{xy} & \mathbf{S}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (40a)$$

consequentemente, **um campo 2D não consegue redistribuir ou alongar o vetor vorticidade**.

<u>A Equação da Pressão (fluido incompressível e viscosidade constante)</u>

A partir do campo de vorticidade o campo de pressões pode ser determinado. Considere a Eq. N-S para um fluido com propriedades constantes, isto é, ρ e μ constantes. Tomando-se a divergência de ambos os lados:

$$\nabla\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial t}\vec{V} + \vec{V}\cdot\nabla\vec{V} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu\nabla^2\vec{V}\right\}, \qquad (41)$$

denominando-se a divergência do campo de velocidade por Δ, isto é, $\Delta = \nabla\cdot\vec{V} \equiv 0$, Eq. (41) é re-escrita em função de Δ:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta) + \nabla\cdot\left[\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\right] = -\nabla\cdot\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu\nabla^2(\Delta), \qquad (42)$$

Com o auxílio das identidades [‡] pode-se demonstrar que o termo $\nabla\cdot\left(\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\right)$ passa a ser:

$$\nabla\cdot\left(\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\right)\equiv\vec{V}\cdot\nabla\underbrace{\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)}_{=0}+\left(\nabla\vec{V}^{T}\right):\left(\nabla\vec{V}\right)=\left(\nabla\vec{V}^{T}\right):\left(\nabla\vec{V}\right)\ . \tag{43}$$

Reconhecendo-se que o gradiente de velocidades é representado pelo tensor de deformação **S** (simétrico) e pelo de rotação **R** (anti-simétrico)

$$\begin{aligned}\nabla\vec{V}^{T}&=S+R=\underbrace{\tfrac{1}{2}\left(\nabla\vec{V}+\nabla\vec{V}^{T}\right)}_{S}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\left(\nabla\vec{V}-\nabla\vec{V}^{T}\right)}_{R}\\ \nabla\vec{V}&=S+R^{T}=\underbrace{\tfrac{1}{2}\left(\nabla\vec{V}+\nabla\vec{V}^{T}\right)}_{S}-\underbrace{\tfrac{1}{2}\left(\nabla\vec{V}-\nabla\vec{V}^{T}\right)}_{R^{T}=-R}\end{aligned},$$

então o produto escalar do tensor deformação também pode ser expresso em função de suas partes simétrica e anti-simétrica:

$$\left(\nabla\vec{V}\right)^{T}:\left(\nabla\vec{V}\right)=\left(S+R\right):\left(S+R^{T}\right)\equiv\left(S:S\right)+\underbrace{\left(S:R^{T}\right)}_{=0}+\underbrace{\left(R:S\right)}_{=0}+\left(R:R^{T}\right)\equiv\left(S:S+R:R^{T}\right),$$

os termos nulos são em virtude do produto entre tensores simétricos e anti-simétricos e o último termo é reconhecido como a magnitude do vetor vorticidade,

$$\left(R^{T}:R\right)=-\left(R:R\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^{2}=-\frac{1}{2}\left|\vec{\omega}\right|^{2},$$

então o termo $\left(\nabla\vec{V}\right)^{T}:\left(\nabla\vec{V}\right)$ fica representado por:

$$\nabla\cdot\left(\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\right)=\left(\nabla\vec{V}^{T}\right):\left(\nabla\vec{V}\right)=S:S-\frac{1}{2}\left|\omega\right|^{2} \tag{44}$$

Substituindo Eq. (44) na Eq. (42) chega-se a forma da equação da pressão em termos do divergente da velocidade, isto é, em função de Δ:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\right)+2\left(\nabla\Delta\right)\cdot\vec{V}+\mathbf{S}:\mathbf{S}-\frac{1}{2}\left|\omega\right|^{2}+\Delta^{2}=-\frac{1}{\rho}\nabla^{2}P+\nu\nabla^{2}\left(\Delta\right). \tag{46}$$

Como o divergente de V é nulo, isto é, $\Delta=0$, a Eq. (46) simplifica-se para[§]:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla^{2}p=S:S-\frac{1}{2}\left|\omega\right|^{2}=\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{47}$$

A equação (47) define o acoplamento entre o campo de pressão e o campo de velocidades via tensor de deformação e o módulo da vorticidade. Nota-se que a pressão é governada por uma equação de Poisson e não depende da viscosidade! Uma vez conhecido-se o campo de vorticidades pode-se determinar o campo de pressão.

[‡] A identidade é obtida com o auxílio das relações:

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\left(\mathbf{T}\cdot\vec{V}\right)=\left(\nabla\cdot\mathbf{T}^{\mathbf{T}}\right)\cdot\vec{V}+\mathbf{T}^{\mathbf{T}}:\nabla\vec{V}\\&\nabla\cdot\left(\nabla\vec{V}^{\mathbf{T}}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)\\&\nabla\cdot\vec{V}\vec{V}=\left(\nabla\vec{V}\right)\cdot\vec{V}+\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)\cdot\vec{V}\end{aligned}$$

[§] $S:S-\frac{1}{2}\left|\omega\right|^{2}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^{2}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$

Equação similar a Eq. (46) foi também utilizada por Harlow & Welch (1965) para descrever o acoplamento entre o campo de pressão num método numérico com variáveis primitivas. Ela ou suas derivações são extensivamente empregada em métodos de volumes finitos tipo SOLA, SIMPLE, SIMPLEC, SIMPLEST entre outros.

Em coordenadas cartesianas e bi-dimensional (x,y) & (u,v), a equação da pressão toma a forma:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla^2 p = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \tag{49}$$

ou, substituindo-se a indentidade fornecida pela equação da conservação de massa,

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]^2 = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = -2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{50}$$

chega-se a sua forma alternativa:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla^2 p = 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) - 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{51}$$

Equação de Transporte da Energia

A equação de transporte de energia térmica é obtida a partir da primeira lei da termodinâmica:

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{sist} = Q - W \tag{52}$$

que estabelece que a variação de energia E para um sistema é igual a soma dos fluxos de calor e trabalho que cruzam a fronteira do sistema. Na formulação da primeira lei, segue-se a conveção de sinal: o calor recebido e o trabalho exercido pelo sistema são positivos por sua vez, o calor rejeitado e o trabalho recebido pelo sistema são negativos. Entende-se por trabalho qualquer transformação cujo efeito final possa ser representado pela elevação de um peso (Reynolds, 1977).

Em termos das taxas temporais da variação dos fluxos de energia a primeira lei pode ser re-escrita como:

$$\iiint_{V.C.} \rho \frac{\partial e}{\partial t} d\forall + \iint_{S.C.} \rho e\left(\vec{V}\cdot\vec{n}\right)dA = \iint_{S.C.} \vec{q}_k \cdot \vec{n} dA + \iiint_{V.C.} q''' d\forall - \iint_{S.C.} \vec{w}\cdot\vec{n} dA\ , \tag{53}$$

que estabelece que a taxa de variação de energia por unidade de volume (ρe) (Watts/m^3), é igual a soma dos fluxos de calor e trabalho que cruzam a superfície e dos fontes e sumidouros de energia por unidade de volume (Watts/m^3), q'''. Eles representam a energia térmica liberada ou absorvida por reações químicas.

Observe que enquanto Q e W mostrados na Eq.52 representam energia por segundo e são de natureza escalar a representação na forma integral e faz uso da energia específica, e, e expressa

Aplicando-se o teorema da divergência, chega-se a forma diferencial da equação da energia:

$$\rho \cdot \frac{De}{Dt} = \nabla \cdot \left(\vec{q}_k - \vec{w}\right) + q''' , \tag{54}$$

Os modos de energia a serem considerados serão aqueles mais comuns a sistemas térmicos: energia cinética, energia potencial e energia interna. Assim, a energia específica 'e' passa a representar estas parcelas como indicado:

$$e = \hat{u} + \frac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{V} + \vec{g}\cdot\vec{r}\,, \tag{55}$$

onde r é o vetor posição. Finalmente o termo fonte, q''', representa as fontes e sumidouros de energia por unidade de volume (Watts/m^3) dentro do V.C. provenientes, por exemplo, da energia liberada por reações químicas.

Substituindo-se os modos de energia na Eq. (54) tem-se (➢):

$$\rho\frac{D\hat{u}}{Dt} + \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{V}\right) + \left(\rho\vec{g}\cdot\vec{V}\right) = \nabla\cdot\left(\vec{q}_k - \vec{w}\right) + q''' \;. \tag{56}$$

Para concluir a equação de conservação da energia é necessário constituir leis físicas que representem o fluxo de calor e de trabalho de deformação do fluido assim como adequa-los à convenção de sinal dos fluxos de energia da primeira lei.

<u>Equação Consitutiva para Fluxo Calor</u>

O fluxo de calor $\vec{q}_k$ que cruza a S.C. é dado pela lei de Fourier,

$$\vec{q}_k = -\left(-k\cdot\nabla\boldsymbol{\theta}\right) \tag{57}$$

onde k é a condutibilidade térmica do fluido e θ é sua temperatura. O sinal negativo a frente da Eq. (57) é para satisfazer a convenção de sinais dos fluxos de calor da primeira lei: calor rejeitado pelo sistema é positivo e calor recebido pelo sistema é negativo. Isto, expresso em termos do vetor normal a SC, do elemento de área e do fluxo q_k é dado pelas relações:

$$Q = \vec{n}\cdot\vec{q}_k\Delta A > 0 \quad \text{calor rejeitado pelo sistema}$$
$$Q = \vec{n}\cdot\vec{q}_k\Delta A < 0 \quad \text{calor recebido pelo sistema}$$

e representado na figura 5.

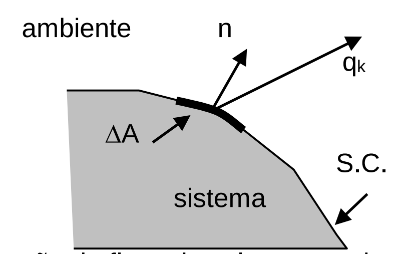

Fig. 5 – Representação do fluxo de calor cruzando a superfície de controle

<u>Equação Constitutiva para o Trabalho de Deformação do Fluido</u>

O trabalho por unidade de tempo e unidade de área devido a deformação do fluido é dado pelo divergente do produto entre o tensor das tensões do fluido e a velocidade:

$$\vec{w} = -\left(T\cdot\vec{V}\right). \tag{58}$$

O sinal negativo a frente da Eq. (58) é para satisfazer a convenção de sinais do trabalho na primeira lei: trabalho realizado pelo sistema é positivo e trabalho recebido pelo sistema é negativo. As figuras 6 e 7

➢ O termo de energia potencial: D(gr)/Dt =gDr/Dt pq. g é constante. Do ponto de vista Lagrangeano, se r é o vetor posição, então Dr/Dt é a taxa de variação de r seguindo-se uma partícula, ou seja a velocidade, assim, D(gr)/Dt = g.V.

ilustram o trabalho exercido pelas forças normais e tangenciais que tem como resultado final a elevação de um peso. A Fig. 6 representa um êmbolo que desloca um peso devido a ação das tensões normais, $\mathbf{T_n}$. A Fig. 7 representa uma placa que desliza pela ação da tensão tangencial do fluido, $\mathbf{T_t}$, e eleva um peso devido a um mecanismo de roldanas. Nas figuras em questão a direção crescente do eixo ordenado e o sentido do vetor gravidade estão respresentados. A velocidade, coincidente com o sentido do eixo positivo é representada por V em ambas figuras. Considerando a Fig. 6, a tensão que o êmbolo exerce no fluido é $\mathbf{T_n}$< 0(pq. tem o sentido de z < 0) e aquela que o fluido exerce no sólido é $\mathbf{T^R_n}$ > 0 (pq. tem o sentido de z>0) de tal forma que $\mathbf{T_n}+\mathbf{T^R_n}=0$. De forma similar, a tensão tangencial exercida pela placa no fluido é $\mathbf{T_t}$ < 0 (pq. tem o sentido de x < 0) e aquela do fluido na placa é $\mathbf{T^R_t}$ > 0 (pq. tem o sentido de x > 0) de tal forma que $\mathbf{T_t} + \mathbf{T^R_t} = 0$. Considerando os sinais algébricos devido ao sentido das tensões, pode-se expressar o trabalho exercido por elas através de:

$$\Delta W_n = -\left(-\mathbf{T_n} V \Delta A\right)$$
$$\Delta W_t = -\left(-\mathbf{T_t} V \Delta A\right),$$

onde T é o tensor que atua num plano normal ou tangencial ao elemento de área ΔA.

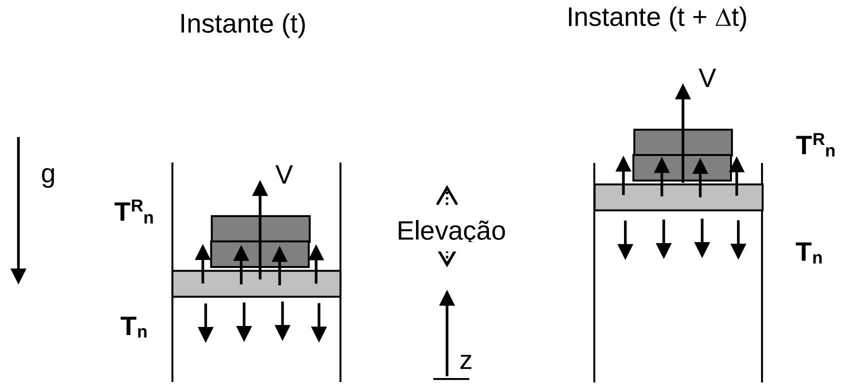

Fig. 6 – Representação do trabalho devido às tensões normais realizado pelo sistema.

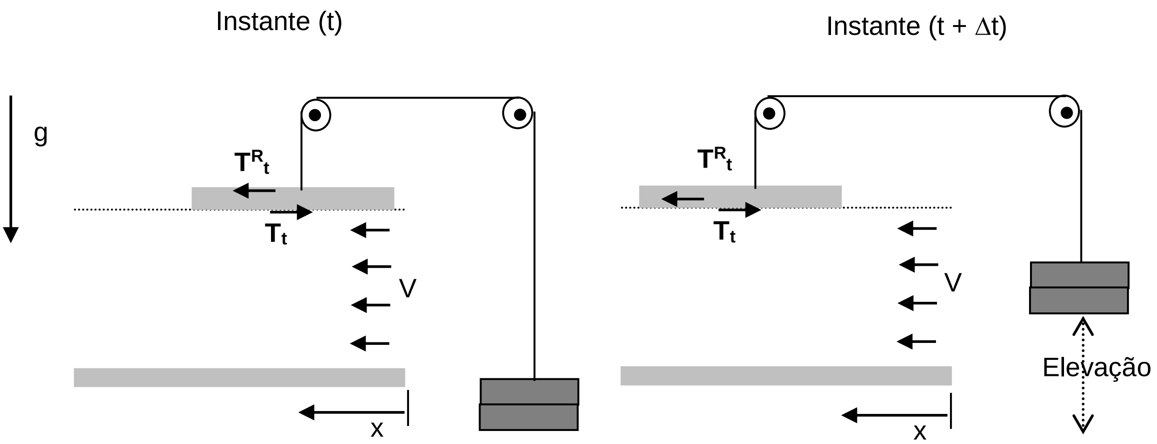

Fig. 7 – Representação do trabalho devido às tensões tangenciais realizado pelo sistema.

O trabalho de deformação por unidade de tempo pode ser nulo se as forças por unidade de área representadas pelo tensor T ou a velocidade forem nulas na fronteira do V.C. A afirmativa se verifica aplicando-se o teorema da divergência:

$$\iiint_{V.C.} \left(\nabla \cdot \mathbf{T}\vec{V}\right) d\forall = \oiint_{S.C.} \vec{n} \cdot \left(\mathbf{T} \cdot \vec{V}\right) dA = 0 \ \textbf{se} \ \mathbf{T} \ \textbf{ou} \ \vec{\mathbf{V}} \ \textbf{forem nulos em S.C.} \quad (59)$$

O trabalho por unidade de tempo por unidade de área, $\vec{w}$, pode ser decomposto em duas parcelas: uma devido a pressão termodinâmica do fluido e outra devido às deformações volumetricas e angulares do fluido:

$$\vec{w} = -\left[-\left(P\delta\cdot\vec{V}\right)+\left(T'\cdot\vec{V}\right)\right] = P\vec{V} - T'\cdot\vec{V}\,, \tag{60}$$

onde δ é o tensor simétrico de Kronecker, P a pressão termodinâmica e **T'** o tensor simétrico do desvio das tensões.

A função dissipação viscosa, ϕ

O termo de dissipação viscosa, para fluidos Newtonianos, é sempre positivo porque ele pode ser expresso pela soma de um quadrado de termos como será visto nesta sub-seção. Isto implica em dizer que para todos os escoamentos existe uma degradação de energia mecânica (cinética, pressão ou potencial) em energia térmica. Isto é fluidos viscosos degradam energia mecânica de maneira irreversível.

A função dissipação viscosa advem do desdobramento do trabalho de deformação do fluido,

$$\nabla\cdot\left(\mathbf{T}'\cdot\vec{V}\right) = \nabla\mathbf{T}'^{\mathbf{T}}\cdot\vec{V} + \mathbf{T}'^{\mathbf{T}} : \nabla\vec{V} \equiv \nabla\mathbf{T}'\cdot\vec{V} + \mathbf{T}' : \nabla\vec{V}\,, \tag{61}$$

a igualdade é válida reconhecendo-se que **T'** é um tensor simétrico e portanto, $\mathbf{T}'^{\mathbf{T}} = \mathbf{T}'$. A função dissipação viscosa, ϕ é identificada pelo segundo termo do lado direito da Eq. (61)

$$\phi = \mathbf{T}' : \nabla\vec{V}\,, \tag{62}$$

substituindo-se a definição do tensor desvio de tensões na Eq. (62),

$$\phi = \mathbf{T}' : \nabla\vec{V} = \lambda\nabla\cdot\vec{V}\left(\delta : \nabla\vec{V}\right) + 2\mu\left(\mathbf{S} : \nabla\vec{V}\right), \tag{63}$$

onde λ é o segundo coeficiente de viscosidade do fluido. Notando-se que $\left(\delta : \nabla\vec{V}\right) = \left(\delta : \mathbf{S}\right) = \nabla\cdot\vec{V}$ porque o tensor de Kronecker é simétrico e que portanto para o produto ser diferente de zero ele deve ser com a parte simétrica de ∇V. Neste caso forma geral da função dissipação para um fluido Newtoniano e compressível passa a ser:

$$\phi = \mathbf{T}' : \nabla\vec{V} = \lambda\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)^2 + 2\mu\left(\mathbf{S} : \nabla\vec{V}\right). \tag{64}$$

Alternativamente pode-se reconhecer que o gradiente de velocidades é também expresso por suas componentes simétricas e anti-simétricas. Neste caso a expressão para a função dissipação toma a forma:

$$\phi = \mathbf{T}' : \nabla\vec{V} \equiv \mathbf{T}' : \left(\mathbf{S} + \mathbf{R}\right), \tag{65}$$

mas, como o tensor **T'** é simétrico, então o produto **T':R** é nulo e a função dissipação pode ser expressa somente pelo produto entre o tensor desvio das tensões e o tensor deformação:

$$\phi = \mathbf{T}' : \nabla\vec{V} = \mathbf{T}' : \mathbf{S}\,. \tag{66}$$

Substituindo-se a definição do tensor desvio de tensões na Eq. (xx),

$$\phi = \lambda\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)^2 + 2\mu\left(\mathbf{S} : \mathbf{S}\right), \tag{67}$$

A representação da função dissipação dada pela Eq. (64) como aquela dada pela Eq. (67) são distintas porém seu resultado é o mesmo por ambos procedimentos. Em notação indicial cartesiana a Eq. (64) é representada por:

$$\phi = \lambda\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right)^2 + \mu\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right), \tag{68}$$

enquanto que a Eq. (67) é dada por:

$$\phi = \lambda\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)^2 . \tag{69}$$

Conforme pode-se observar na Eq. (69), a função dissipação é sempre positiva porque resulta do quadrado do produto de funções que envolvem derivadas do campo de velocidades. Por outro lado, λ pode ser negativo, como é segundo a hipótese de Stokes (λ = -2/3μ). No entanto as condições necessárias para que a função dissipação seja sempre positiva (Warsi 1992) são:

$$\phi \geq 0 \quad \text{desde que} \quad 3\lambda + 2\mu \geq 0 \quad \text{e} \quad \text{que} \quad \mu > 0 .$$

Para referência, a função dissipação em coordenadas cartesianas, é escrita por:

$$\phi = -\frac{2}{3}\mu\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)^2 + 2\mu\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] + \mu\left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right]$$

onde o primeiro termo está associado à dissipação devido a dilatação volumétrica do fluido (inexistente para fluidos incompressíveis), o segundo à deformação linear do fluido e o terceiro à deformação angular do fluido.

Equação de Transporte da Energia Interna

Substituindo-se as equações que constituem o fluxo de calor e trabalho de deformação na Eq. (56) tem-se a equação de conservação de energia interna, cinética e potencial:

$$\rho\frac{D\hat{u}}{Dt} + \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{V}\right) - \left(\rho\vec{g}\cdot\vec{V}\right) = \nabla\cdot\left(k\nabla\theta\right) - \nabla\cdot\left(P\vec{V}\right) + \nabla\cdot\left(T'\cdot\vec{V}\right) + q''' . \tag{70}$$

Multiplicando-se a equação de conservação da quantidade de movimento pelo vetor velocidade, chega-se a uma versão da equação de conservação da energia cinética e potencial:

$$\rho\vec{V}\cdot\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{V}\cdot\nabla P + \vec{V}\cdot\nabla\cdot\mathbf{T'} + \rho\vec{V}\cdot\vec{g} \tag{71}$$

Subtraindo-se a Eq. (71) da Eq. (70), obtem-se a equação de conservação da energia interna do fluido ([**]):

$$\rho\frac{D\hat{u}}{Dt} = \nabla\cdot\left(k\nabla\theta\right) - P\nabla\cdot\vec{V} + \phi + q''' \tag{72}$$

onde ϕ é a função dissipação viscosa definida na Eq. (62). Na forma conservativa, a equação de transporte da energia interna do fluido é representada por:

$$\frac{\partial(\rho\hat{u})}{\partial t} + \nabla\cdot\left[\rho\hat{u}\vec{V}\right] = \nabla\cdot\left[k\nabla\theta\right] - P\left(\nabla\cdot\vec{V}\right) + \phi + q''' . \tag{73}$$

O significado dos termos da Eqs. (72) ou Eq. (73) segue. O lado esquerdo das equações representa a taxa de variação da energia interna de um sistema. O lado direito representa o fluxo de calor por condução que cruza a fronteira do sistema, o trabalho de compressão, a função dissipação e por último fontes volumétricas (watts/m^3) de calor. O trabalho de compressão pode ser positivo ou negativo, dependendo se o fluido se expande ou contrai; esta variação de sinal também indica que a troca entre energia interna em energia mecânica (pressão) é reversível. A função dissipação viscosa vem precedida de um sinal positivo, ao contrário do que ocorre com a equação de conservação da energia cinética. Neste caso o sinal positivo indica que há uma conversão direta de energia mecânica (pressão, cinética ou potencial) em energia interna. A conversão se dá de modo irreversível e degrada a energia mecânica.

A energia térmica do fluido também pode ser expressa por meio de outras variáveis termodinâmicas. Nas próximas seções desenvolve-se a equação da energia em termos da entalpia, do calor específico a volume constante e do calor específico a pressão constante.

[**] Chega-se a equação da energia interna do fluido reconhecendo-se na Eq. (70) que $\mathbf{T'}^{\mathbf{T}} = \mathbf{T'}$ pelo fato de **T'** ser um tensor simétrico. Isto permite dizer que $\nabla(\mathbf{T'}.V) = \nabla\mathbf{T'}^{\mathbf{T}}.V + \mathbf{T'}^{\mathbf{T}}:\nabla V = \nabla\mathbf{T'}.V + \mathbf{T'}:\nabla V$

Equação de Transporte da Entalpia

A equação da conservação da energia pode ser expressa por meio da taxa de variação de entalpia do fluido manipulando-se o termo reversível de trabalho de pressão: $P\nabla.V$.

Da equaçào de conservação de massa, pode-se expressar o divergente do campo de velocidades em termos da taxa de variação da densidade:

$$\nabla \cdot \vec{V} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}, \tag{74}$$

substituindo a definição da Eq. (74) no termo de trabalho de pressão:

$$P\nabla \cdot \vec{V} = -\frac{P}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} \equiv \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{P}{\rho}\right) - \frac{DP}{Dt}. \tag{75}$$

Substituindo-se Eq. (75) na equação da energia interna e reconhecendo-se que a entalpia específica do fluido é:

$$h = \left(\hat{u} + P/\rho\right),$$

chega-se a equação de conservação da energia em termos da entalpia h do fluido:

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = \nabla \cdot \left(k\nabla\theta\right) + \frac{DP}{Dt} + \phi + q'''. \tag{76}$$

Equação de Transporte da Energia Térmica em Função de C_v

Frequentemente é conveniente trabalhar com a equação da energia em termos do produto entre temperatura e calor específico ao invés da energia interna ou entalpia do fluido. Para expressar a equação da energia em função da temperatura e do calor específico a volume constante é necessário reconhecer que a energia interna do fluido é uma função do volume específico v e da temperatura θ (Reynolds, 1977):

$$d\hat{u} = \left.\frac{\partial\hat{u}}{\partial v}\right|_{\theta} dv + \left.\frac{\partial\hat{u}}{\partial\theta}\right|_{v} d\theta = \left[-P + \theta\left(\left.\frac{\partial P}{\partial\theta}\right|_{v}\right)\right]dv + C_v d\theta, \tag{77}$$

onde Cv é a capacidade térmica do fluido a volume constante. Tomando-se a derivada substantiva da Eq. (xx) e multiplicando-se ambos os lados por ρ, tem-se:

$$\rho\frac{D\hat{u}}{Dt} = \left[-P + \theta\left(\left.\frac{\partial P}{\partial\theta}\right|_{v}\right)\right]\rho\frac{Dv}{Dt} + \rho C_v\frac{D\theta}{Dt}. \tag{78}$$

Reconhecendo-se que:

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \rho\frac{D\left(1/\rho\right)}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} \equiv \nabla \cdot \vec{V} \tag{79}$$

e também que a derivada da pressão com a temperatura mantendo-se o volume constante para uma substância pura pode ser dada por [≻]:

$$\left.\frac{\partial P}{\partial\theta}\right|_{v} = \left.\frac{\partial P}{\partial\theta}\right|_{\rho} = \frac{\beta}{\kappa}, \tag{80}$$

≻ Esta relação pode ser demonstrada por meio das relações termodinâmica de Maxwell: $\left.\frac{\partial s}{\partial v}\right|_{\theta} = \left.\frac{\partial P}{\partial\theta}\right|_{v} = -\frac{\left.\partial v/\partial\theta\right|_{P}}{\left.\partial v/\partial P\right|_{\theta}}$, veja Reynolds (1977).

onde β é o coeficiente de compressibilidade isobárica e κ é o coeficiente de compressibilidade isotérmica definidos por:

$$\beta = \frac{1}{v}\left.\frac{\partial v}{\partial \theta}\right|_P \quad \textbf{e} \quad \kappa = -\frac{1}{v}\left.\frac{\partial v}{\partial P}\right|_\theta . \tag{81}$$

Substituindo-se as definições das Eqs. (78) a (80) na equação da energia em termos da energia interna do fluido, Eq. (63), chega-se a forma da equação da energia em termos do calor específico a volume constante:

$$\rho C_V \frac{D\theta}{Dt} = \nabla\cdot(k\nabla\theta) - \theta\left(\frac{\beta}{\kappa}\right)(\nabla\cdot\vec{V}) + \phi + q''' , \tag{82}$$

ou na sua forma conservativa:

$$C_V\left\{\frac{\partial\rho\theta}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\theta\vec{V}\right)\right\} = \nabla\cdot(k\nabla\theta) - \theta\left(\frac{\beta}{\kappa}\right)(\nabla\cdot\vec{V}) + \phi + q''' . \tag{83}$$

Equação de Transporte da Energia em Função de C_p

A equação da conservação da energia térmica também pode ser escrita em termos do calor específico a pressão constante e da temperatura reconhecendo-se que a entalpia específica é uma função da pressão e da temperatura de uma substância simples:

$$dh = \left.\frac{\partial h}{\partial \theta}\right|_P d\theta + \left.\frac{\partial h}{\partial P}\right|_\theta dP = C_P d\theta + v[1-\theta\beta]dP , \tag{84}$$

onde C_P é a capacidade térmica do fluido a pressão constante e v é o volume específico. Tomando-se a derivada substantiva da Eq. (84) e multiplicando-se ambos os lados por ρ, tem-se:

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = \rho C_P \frac{D\theta}{Dt} + [1-\beta\theta]\frac{DP}{Dt} . \tag{85}$$

Substituindo-se Eq. (85) na Eq. (76) chega-se a forma final da equação da conservação da energia térmica em termos do calor específico a pressão constante e da temperatura:

$$\rho C_P \frac{D\theta}{Dt} = \nabla\cdot(k\nabla\theta) - \beta\theta\frac{DP}{Dt} + \phi + q''' , \tag{86}$$

ou na sua forma conservativa:

$$C_P\left\{\frac{\partial\rho\theta}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\theta\vec{V}\right)\right\} = \nabla\cdot(k\nabla\theta) - \beta\theta\frac{DP}{Dt} + \phi + q''' . \tag{87}$$

Formas Simplificadas da Equação da Energia em Termos da Temperatura

Consideráveis simplificações podem ser alcançadas na representação da Eq. (87) se forem realizadas hipóteses sobre o comportamento do fluido e do escoamento.

Para ***gases perfeitos*** o coeficiente de compressibilidade isobárica é unitário, isto é, β = 1, neste caso a Eq. (xx) passa a ser:

$$C_P\left\{\frac{\partial\rho\theta}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\theta\vec{V}\right)\right\} = \nabla\cdot(k\nabla\theta) - \theta\frac{DP}{Dt} + \phi + q''' . \tag{88}$$

Para ***líquidos incompressíveis***, β = 0, então:

$$C_P\left\{\frac{\partial\rho\theta}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\theta\vec{V}\right)\right\} = \nabla\cdot(k\nabla\theta) + \phi + q''' , \tag{89}$$

em particular para líquidos incompressíveis, C_P=C_V sendo usual representa-los por C somente, a capacidade térmica do líquido. Finalmente em casos onde a condutibilidade térmica é constante, sem fontes volumétricas de calor e com função dissipação viscosa desprezível, chega-se a sua forma mais simples:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\theta\vec{V}\right)=\underbrace{\frac{k}{\rho C_P}}_{\alpha}\nabla^2\theta\,, \tag{90}$$

onde α é a difusividade térmica do fluido. Em termos de coordenadas cartesianas a Eq. (90) é representada por:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+U\frac{\partial\theta}{\partial x}+V\frac{\partial\theta}{\partial y}+W\frac{\partial\theta}{\partial z}=\alpha\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right]. \tag{91}$$

Equação de Transporte da Energia Cinética

A energia cinética do fluido por unidade de massa é expressa pelo produto escalar do vetor velocidade do fluido:

$$K=\frac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{V}=\frac{1}{2}U_i^2=\frac{1}{2}\left(U^2+V^2+W^2\right). \tag{92}$$

A equação de transporte da energia cinética é obtida a partir do produto escalar do vetor velocidade com a equação de quantidade de movimento:

$$\vec{V}\cdot\left\{\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=-\nabla P+\nabla\cdot\mathbf{T'}+\rho\cdot\vec{g}\right\}, \tag{93}$$

onde **T’** é o tensor desvio das tensões. Ela é uma equação escalar porém lineramente dependente das três componentes da equação de quantidade de movimento. As informações de uma ou de outra equação se equivalem dado sua interdepência. No entanto, pode ser conveniente analizar o campo de escoamento a partir da energia cinética do fluido ao invés das variáveis primitivas.Termo a termo os produtos escalares da equação (93) são expressos por:

$$\rho\vec{V}\cdot\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\frac{DK}{Dt}, \tag{94a}$$

$$\vec{V}\cdot\nabla P=\nabla\cdot\left(P\vec{V}\right)-P\left(\nabla\cdot\vec{V}\right), \tag{94b}$$

$$\vec{V}\cdot\nabla\mathbf{T'}=\nabla\cdot\left(\mathbf{T'}\cdot\vec{V}\right)-\mathbf{T'}:\left(\nabla\vec{V}\right) \tag{94c}$$

finalmente, considerando-se que a gravidade está alinhada com o sentido do eixo z decrescente,

$$\vec{V}\cdot\rho\vec{g}=-\vec{V}\cdot\nabla\left(\rho gz\right)=-\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}gz\right)-gz\frac{D\rho}{Dt}. \tag{94d}$$

Substituindo-se as igualdades da Eq. (94a-d) na Eq. (93), encontra-se a equação de transporte da energia cinética:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho K\right)+\nabla\cdot\left(\rho K\vec{V}\right)=-\nabla\cdot\left(P\vec{V}\right)+P\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)+\nabla\cdot\left(\mathbf{T'}\vec{V}\right)-\phi-\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}gz\right)-gz\frac{D\rho}{Dt}. \tag{95}$$

O lado esquerdo da Eq. (95) refere-se ao transporte de K pelo escoamento. O lado direito expressa os modos de trabalho e dissipação de energia. O primeiro e segundo termo referem-se ao trabalho que as forças de pressão exercem no volume de controle infinitezimal. Em particular a segunda parcela está associada aos efeitos compressíveis uma vez que ∇V pode ser positivo ou negativo, dependendo se o fluido está expandindo ou contraindo. Este modo de trabalho é reversível uma vez que energia térmica armazenada na contração ou dispendida na expansão do gás pode ser convertida novamente em energia cinética. O terceiro termo refere-se ao trabalho exercido pelas forças viscosas ou o trabalho de deformação do fluido. O quarto termo é a função dissipação viscosa. Por ser sempre positivo, ele é responsável pela transformação de energia cinética, pressão ou gravitacional em energia térmica de maneira irreversível. Finalmente a energia potencial é expressa na combinação dos dois últimos termos. Ele é relevante para problemas com superfície livre; em escoamentos forçados ele pode ser incorporado ao termo de pressão.

Equação Energia Mecânica para Fluido Incompressível

Uma forma alternativa de se analisar a Eq. (95) é agrupando os termos de energia mecânica, que correspondem a soma das parcelas da energia cinética, trabalho de pressão e potencial, em um único operador. Para um fluido incompressível em regime permanente ela toma a forma:

$$\nabla\cdot\rho\vec{V}\left(K+\frac{P}{\rho}+gz\right)=\nabla\cdot\left(\vec{V}\cdot\mathbf{T'}\right)-\phi. \qquad (96)$$

O lado esquerdo da equação refere-se ao fluxo de energia mecânica que cruza a superfície de controle. Os termos do lado direito representam o trabalho de deformação do fluido e a dissipação viscosa. Na ausência de trabalho de deformação e em virtude da conservação da energia, nota-se que o termo de dissipação viscosa é o agente responsável pela degradação de energia mecânica em energia térmica (irreversível). Isto pode ser observado em escoamentos confinados por fronteiras sólidas. Aplicando-se o teorema de Gauss na integral de volume do lado direito da Eq. (96) constata-se que o trabalho de deformação é nulo em vista da velocidade da fronteira ser nula.

O lado direito da equação (96) também pode ser expresso na forma

$$\nabla\cdot\rho\vec{V}\left(K+\frac{P}{\rho}+gz\right)=\vec{V}\cdot\left(\nabla\cdot\mathbf{T'}\right). \qquad (97)$$

Reconhecendo que o divergente do tensor desvio das tensões pode ser expresso por:

$$\nabla\cdot\mathbf{T'}=\nabla\cdot\mathbf{2}\mu\mathbf{S}=\mu\nabla^{\mathbf{2}}\vec{V},$$

então o lado direito da Eq. (97) fica sendo

$$\begin{aligned}\vec{V}\cdot\left(\nabla\cdot\mathbf{T'}\right)&\equiv\mu\vec{V}\cdot\nabla^{\mathbf{2}}\vec{V}\\&\equiv\mu\nabla^{\mathbf{2}}K-\mu\left(\nabla\vec{V}\right)^{2}\\&\equiv\mu\nabla^{\mathbf{2}}K+\mu\left(\nabla\vec{V}:\nabla\vec{V}^{T}\right)-\phi\end{aligned}, \qquad (98)$$

a demonstração desta identidade é dada na nota de rodapé (*) (Hinze, 1959; Townsend, 1976). Substituindo-se a Eq. (98) em (97), chega-se a duas formas alternativas para equação de transporte da energia cinética específica do fluido:

$$\nabla\cdot\rho\vec{V}K=\mu\nabla^{\mathbf{2}}K-\nabla\cdot\vec{V}P^{*}+\mu\left(\nabla\vec{V}\right)^{2}, \qquad (99a)$$

$$\nabla\cdot\rho\vec{V}K=\mu\nabla^{2}K-\nabla\cdot\vec{V}P^{*}+\mu\left(\nabla\vec{V}:\nabla\vec{V}\right)-\phi, \qquad (99b)$$

onde P* = (P+ρgz). A equação (99) revela o transporte da energia cinética em termos dos mecanismos de convecção e difusão de K. Os termos adicionais são o trabalho de pressão, termo viscoso e função dissipação para a Eq. (99b). Note que apesar do termo viscoso associado a eq. (99a) ser sempre positivo

---

(*)
$$\mu U_i\frac{\partial^2U_i}{\partial x_j\partial x_j}=\mu\frac{\partial^2\left(\frac{1}{2}U_iU_i\right)}{\partial x_j\partial x_j}-\mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)^2=\mu\left\{\frac{\partial^2\left(\frac{1}{2}U_iU_i\right)}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{\partial^2U_iU_j}{\partial x_j\partial x_j}\right\}-\mu\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)^2$$

$$=\mu\left\{\frac{\partial^2\left(\frac{1}{2}U_iU_i\right)}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right\}-\phi\rightarrow\mu U_i\frac{\partial^2U_iU_j}{\partial x_j\partial x_j}=\mu\nabla^2K+\mu\nabla V:(\nabla V)^T-\phi$$

(quadrado do grad. V) ele não representa a função dissipação. Uma relação direta entre a dissipação e os termos viscosos é dada subtraindo-se Eq. (99b) de (99a):

$$\mu\left(\nabla\vec{V}\right)^2 = \mu\left(\nabla\vec{V} : \nabla\vec{V}^T\right) + \phi \qquad (100)$$

ou em notação indicial:

$$\mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)^2 = \phi - \mu\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad , \qquad (101a)$$

ou também (Wilcox, 1998),

$$\mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)^2 = \phi - \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(U_i\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right). \qquad (101b)$$

Como comentário final deve-se observar a semelhança entre a Eq. (96) e a Eq. (35), repetida aqui por conveniência:

$$\nabla\rho\left(K + \frac{P}{\rho} + gz\right) = \mu\nabla^2\vec{V} + \rho\vec{V}\times\vec{\omega}. \qquad (35)$$

De fato elas são linearmente dependentes pois multiplicando-se Eq. (35) por V chega-se a forma da Eq. (99a).

Equação de Transporte de Entropia

A equação de conservação ou transporte da entropia baseia-se na segunda lei da termodinâmica. Sua relevância reside do fato dela permitir otimizar processos térmicos a partir da minimização da geração da entropia ou, de forma equivalmente, maximizar o trabalho disponível (exergia).

A função potencial termodinâmico entalpia pode ser expressa por meio da entropia e da pressão de um sistema:

$$dh = \theta ds + \frac{dP}{\rho}, \qquad (100)$$

onde θ representa a temperatura absoluta e h e s a entalpia e entropia específicas. Em termos da derivada total a Eq. (100) fica:

$$\frac{Dh}{Dt} = \theta\frac{Ds}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{DP}{Dt}. \qquad (101)$$

Substituindo-se Eq. (101) na equação de conservação da entalpia, Eq. (76), chega-se a equação da conservação da entropia:

$$\rho\frac{Ds}{Dt} = \frac{\nabla\cdot\left(k\nabla\theta\right)}{\theta} + \frac{\phi}{\theta} + \frac{q'''}{\theta}, \qquad (102)$$

ou na sua forma conservativa:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho s\vec{V}\right) = \frac{\nabla\cdot\left(k\nabla\theta\right)}{\theta} + \frac{\phi}{\theta} + \frac{q'''}{\theta}. \qquad (103)$$

As Eqs. (102) e (103) expressam a taxa de variação da entropia em função do fluxo de calor por condução, da dissipação viscosa e das fontes de calor.

Produção de Entropia

Mais interessante que a determinação do transporte da entropia no campo de escoamento é a avaliação da produção de entropia. Esta é realizada com o auxílio da segunda lei da termodinâmica que estabelece que todos os processos reais são irreversíveis, isto é a variação da entropia do sistema é maior ou igual a razão do fluxo de calor e temperatura que cruza a fronteira do sistema:

$$dS \geq \frac{dQ}{\theta} \tag{104}$$

que em termos dos fluxos que cruzam o V.C. pode ser expressa por:

$$\iiint_{V.C.} \rho \frac{\partial s}{\partial t} d\forall + \oint\!\!\oint_{S.C.} \rho s \left(\vec{V} \cdot \vec{n}\right) dA \geq \oint\!\!\oint_{S.C.} \frac{dQ}{\theta} + \iiint_{V.C.} q''' d\forall \,. \tag{105}$$

Aplicando-se o Teorema da divergência e introduzindo a lei de Fourier para representar o fluxo de calor que cruza a fronteira chega-se a forma diferencial desigualdade da segunda lei:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho s \vec{V}\right) \geq \nabla \cdot \left[\frac{k \nabla \theta}{\theta}\right] + \frac{q'''}{\theta} \,. \tag{106}$$

A desigualdade pode ser substituida pelo sinal de igual introduzindo-se um termo de produção de entropia, P_S, no lado direito da Eq. (106),

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho s \vec{V}\right) = \nabla \cdot \left[\frac{k \nabla \theta}{\theta}\right] + \frac{q'''}{\theta} + P_S \,. \tag{107}$$

Uma comparação direta entre as Eqs. (107) e (103) mostra que o termo de produção de entropia por unidade é expresso por meio de (*) :

$$P_S = \underbrace{\frac{k(\nabla\theta)^2}{\theta^2}}_{>0} + \underbrace{\frac{\phi}{\theta}}_{>0} \,. \tag{108}$$

O primeiro e o segundo termo, sendo sempre positivos, causam um aumento da entropia do sistema. Eles representam, respectivamente, a geração de entropia por meio de um contato térmico imperfeito (gradiente finito de temperatura) e pela dissipação viscosa do fluido.

Em um escoamento bi-dimensional incompressível com propriedades constantes, a taxa de produção de entropia por unidade de volume em coordenadas cartesianas é dada por:

$$P_S = \frac{k}{\theta^2}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{2\mu}{\theta}\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\} \geq 0 \,. \tag{109}$$

De modo complementar pode-se definir o trabalho perdido, W_L, como sendo diretamente proporcional a taxa de geração de entropia:

$$W_L = \theta_0 P_S \,, \tag{110}$$

(*) Chega-se a forma final do termo de geração de entropia por meio da igualdade:

$$\frac{\nabla \cdot (k\nabla\theta)}{\theta} - \nabla \cdot \left[\frac{k\nabla\theta}{\theta}\right] = \frac{\nabla \cdot (k\nabla\theta)}{\theta} - \left\{\frac{\nabla \cdot (k\nabla\theta)}{\theta} - \frac{(k\nabla\theta)\cdot(\nabla\theta)}{\theta^2}\right\} = + \frac{k(\nabla\theta)^2 \cdot}{\theta^2}$$

onde θ_0 é a temperatura absoluta do reservatório térmico ambiente (θ_0 = constante). A Eq. (110) revela a transformação irreversível do trabalho útil em energia térmica.

Referências

[1] White, F.M.; **"Viscous Fluid Flow"**, McGraw Hill (1974)

[2] Moore, F.K.; **"Theory of Laminar Flows"**, Princeton Un. Press (1964)

[3] Rosenhead, L.; **"Laminar Boundary Layers"**, Oxford (1963)

[4] Warsi, Z.U.A., **"Fluid Dynamics: Theoretical and Computational Approaches"**, CRC (1993)

[5] Panton, R. **"Incompressible Flow"**, John Wiley (1984)

[6] Tennekes, H. and Lumley, J.L., "**A First Course in Turbulence**", MIT Press, 1972,

[7] Reynolds W.C. and Perkins, H.C., "**Engineering Thermodynamics**", Mc Graw Hill, (1977)

[8] Hinze, J.O., "**Turbulence**", McGraw Hill, (1959)

[9] Townsend, A.A., "**The Strucuture of Turbulent Shear Flow**", Cambridge Un. Press, 2nd ed., (1976).

[10] Wilcox, D.C., "**Turbulence Modeling for CFD**", 2nd ed., DCW Industries, (1998).