Matemática para Engenharia

Profa. Grace S. Deaecto

Faculdade de Engenharia Mecânica / UNICAMP
13083-860, Campinas, SP, Brasil.
grace@fem.unicamp.br

Segundo Semestre de 2013

NOTA AO LEITOR

Estas notas de aula foram inteiramente baseadas nas seguintes referências :

- J. C. Geromel e A. G. B. Palhares, "*Análise Linear de Sistemas Dinâmicos - Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*", 2ª Edição, Edgard Blucher Ltda, 2011.
- A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. Nawab, "*Signals & Systems*", 2nd Edition, *Prentice Hall*, 1997.
- S. Haykin, B. V. Veen, "*Sinais e Sistemas*", Bookman, 1999.

1. Representação de Fourier - Tempo contínuo
   - Sistemas LTI
   - Resposta a exponenciais complexas
   - Série de Fourier
   - Propriedades da série de Fourier
   - Transformada de Fourier
   - Propriedades da transformada de Fourier

Sistemas LTI

Um sinal definido para todo $t \in \mathbb{R}$ pode ser representado como uma combinação linear de exponenciais complexas.

Esta representação é importante, não somente, porque leva a uma expressão bastante simples da saída, mas também porque permite uma caracterização no domínio da frequência dos sinais e sistemas através da análise do seu espectro.

Antes de apresentá-la, vamos revisar algumas definições e características de um sistema dinâmico. Ele é um ente matemático denotado por $\mathcal{S}\{\cdot\}$ que converte um sinal de entrada $x(t)$ em um sinal de saída $y(t)$, ou seja

$$y(t) = \mathcal{S}\{x(t)\}$$

Sistemas LTI

Um sistema dinâmico $\mathcal{S}\{\cdot\}$ definido para todo $t \in \mathbb{R}$ é dito :

- Linear : Quando a saída para uma entrada $x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i(t)$ for igual a $y(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(t)$ para todo $\alpha_i \in \mathbb{R}$.
- Invariante no tempo : Quando a saída para uma entrada $x(t-\tau)$ for igual a $y(t-\tau)$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$.
- Causal : Quando a saída $y(t)$ depende da entrada $x(\tau)$ apenas para $\tau \leq t$. Ou seja, em qualquer instante, a saída depende apenas da entrada ocorrida no passado e no presente.

Sistemas LTI

Um sinal $x(t)$ definido em $t \in \mathbb{R}$ pode ser descrito como uma combinação linear de impulsos da seguinte maneira

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Seja $\mathcal{S}\{\cdot\}$ um sistema dinâmico LTI (Linear Time Invariant System) com entrada $x(t)$, sua saída $y(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{S}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathcal{S}\left\{\delta(t-\tau)\right\}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

Sistemas LTI

Em que a segunda igualdade decorre da propriedade de linearidade e a terceira da propriedade de invariância no tempo de um sistema LTI e

$$h(t) = \mathcal{S}\{\delta(t)\}$$

é a resposta ao impulso. Logo, $y(t) = x(t) * h(t)$, ou seja

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Ademais, se o sistema for causal então $h(t) = 0, \ \forall t < 0$ e, temos

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Resposta a exponenciais complexas

A resposta de um sistema LTI a uma exponencial complexa $x(t) = e^{\lambda t}$ com $\lambda \in \mathbb{C}$ é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{\lambda(t-\tau)}d\tau \\ &= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-\lambda\tau}d\tau\right\}e^{\lambda t} \end{aligned}$$

sendo

$$H(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-\lambda\tau}d\tau$$

relacionada à resposta ao impulso do sistema.

Resposta a exponenciais complexas

Logo, a resposta a $e^{\lambda t}$ é igual a entrada a menos de uma constante $H(\lambda)$, ou seja

$$y(t) = H(\lambda)e^{\lambda t}$$

sendo $e^{\lambda t}$ chamada de autofunção e $H(\lambda)$ autovalor associado à autofunção $e^{\lambda t}$. Consequentemente, para

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{\lambda_k t}$$

teremos a seguinte saída

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k H(\lambda_k) e^{\lambda_k t}$$

Resposta a exponenciais complexas

- A representação de um sinal em termos de uma combinação linear de exponenciais complexas do tipo $e^{\lambda t}$ com $\lambda = j\omega$ é uma representação de Fourier do sinal.
- Ela é importante pois permite uma análise criteriosa de cada componente em frequência do sinal. Ademais, para cada componente, a resposta de um sistema a um sinal com representação de Fourier é simples, pois é idêntica à entrada a menos de uma constante $H(\cdot)$.
- Quando o sinal a tempo contínuo é periódico, ele pode ser representado por uma série de Fourier.
- Quando o sinal a tempo contínuo é aperiódico, ele pode ser representado por uma transformada de Fourier.

Série de Fourier

- Um sinal a tempo contínuo é periódico se para algum $T > 0$

$$x(t) = x(t + T), \ \forall t \geq 0$$

- Se $T > 0$ é o menor valor que satisfaz a igualdade acima, ele é chamado de período fundamental.
- Os sinais $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ e $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ são sinais periódicos de frequência fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$.
- Associados a eles podemos definir as exponenciais complexas harmonicamente relacionadas

$$x_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad \text{em que} \quad \frac{2\pi}{k\omega_0} = \frac{T}{k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

cuja combinação linear caracteriza a série de Fourier.

Série de Fourier

Série de Fourier

Um sinal periódico a tempo contínuo $x(t) = x(t+T)$ pode ser escrito como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

sempre que a série convergir, em que $\omega_0 = 2\pi/T$.

Os termos para $k = \pm 1$ possuem frequências fundamentais iguais a ω_0 sendo denominados componentes da primeira harmônica. Os termos $k = \pm n$ referem-se à frequência $n\omega_0$ sendo, portanto, componentes da n-ésima harmônica.

Série de Fourier

De fato, considerando que a primeira igualdade vale, multiplicando-a de ambos os lados por $e^{-jn\omega_0 t}$ e integrando ao longo de um período, temos

$$\begin{aligned}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt &= \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt \\ &= \alpha_n T\end{aligned}$$

pois

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \begin{cases} T \ , & k = n \\ 0 \ , & k \neq n \end{cases}$$

Logo, os coeficientes são calculados como

$$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Comentários :

- Os coeficientes espectrais $\alpha_k, \ k \in \mathbb{Z}$ medem a porção do sinal referente a cada harmônica da componente fundamental.
- Para sinais periódicos reais temos $x(t) = x^*(t)$, ou seja

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k^* e^{-jk\omega_0 t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}\end{aligned}$$

e, portanto, $\alpha_k^* = \alpha_{-k}$ o que nos permite escrever

$$\begin{aligned}x(t) &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \{\alpha_k e^{jk\omega_0 t} + \alpha_{-k} e^{-jk\omega_0 t}\} \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}\{\alpha_k e^{jk\omega_0 t}\}\end{aligned}$$

Comentários :

- Para α_k escrita da forma polar $\alpha_k = |\alpha_k|e^{j\theta_k}$, temos

$$x(t) = \alpha_0 + 2\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_k| \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

Ademais, escrevendo

$$\cos(k\omega_0 t + \theta_k) = \cos(k\omega_0 t)\cos(\theta_k) - \mathrm{sen}(k\omega_0 t)\mathrm{sen}(\theta_k)$$

obtemos uma outra maneira de representar $x(t)$ dada por

$$x(t) = \alpha_0 + 2\sum_{i=1}^{\infty}\{\beta_k \cos(k\omega_0 t) - \gamma_k \mathrm{sen}(k\omega_0 t)\}$$

com $\beta_k = |\alpha_k|\cos(\theta_k)$ e $\gamma_k = |\alpha_k|\mathrm{sen}(\theta_k)$

- O termo α_0 é constante e representa o valor médio do sinal

$$\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt$$

Condições de convergência da série de Fourier

Defina o erro de uma série finita como sendo

$$e_M(t) = x(t) - \sum_{k=-M}^{M} \alpha_k e^{jk\omega_0 t}$$

e considere a energia do erro ao longo de um período dada por

$$E_M = \int_T |e_M(t)|^2 dt$$

sendo os coeficientes

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

aqueles que minimizam a energia do erro. Dizemos que $x(t)$ pode ser representada em termos de uma série de Fourier se

$$\lim_{M \to \infty} E_M = 0$$

Isto não implica que o sinal e a sua série sejam iguais para todo $t \in \mathbb{R}$.

Condições de convergência da série de Fourier

De fato, as condições de Dirichlet garantem que o sinal $x(t)$ se iguala a sua série de Fourier exceto em $t \in \mathbb{R}$ onde $x(t)$ é descontínuo. Estas condições estão listadas a seguir :

- Condição 1 : O sinal $x(t)$ deve ser absolutamente integrável ao longo de um período, ou seja

$$\int_T |x(t)|dt < \infty$$

- Condição 2 : O sinal $x(t)$ possui um número finito de descontinuidades em qualquer período.
- Condição 3 : O sinal $x(t)$ deve possuir derivada limitada nos intervalos do período onde ela é contínua.

Se $x(t)$ for descontínua em $t = \tau$, temos

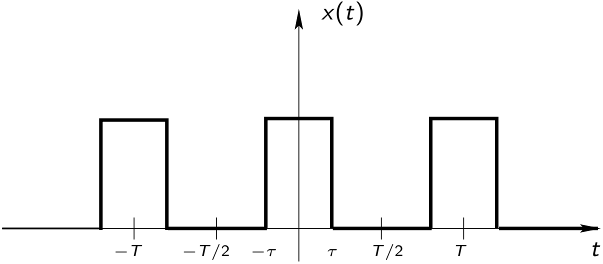
$$x(\tau) = \frac{x(\tau^-) + x(\tau^+)}{2}$$

Exemplo 1

- Considere um sinal retangular periódico definido por

$$x(t) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| < \tau \\ 0 & , \quad \tau < |t| < T/2 \end{cases}$$

encontre os coeficientes da série de Fourier e através deles, recupere o sinal $x(t)$.



Exemplo 1

Devido à simetria de $x(t)$ em relação a $t = 0$, vamos escolher o intervalo de integração como sendo $-T/2 < t < T/2$, logo

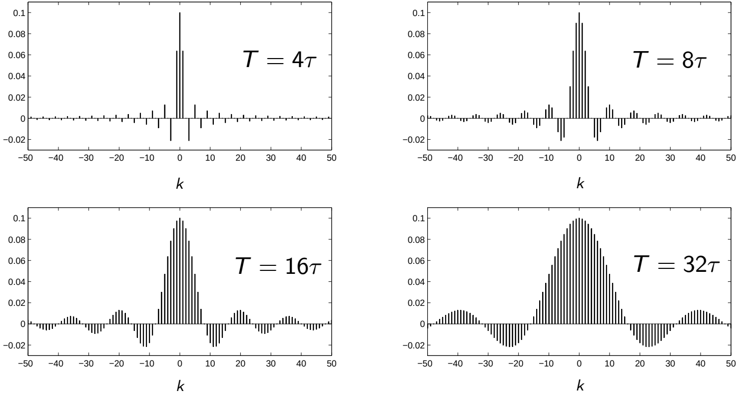
$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j\omega_0 kt}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega_0 kt}dt \\
&= \frac{2}{T\omega_0 k}\left\{\frac{e^{j\omega_0 k\tau} - e^{-j\omega_0 k\tau}}{2j}\right\} \\
&= \frac{2}{T\omega_0 k}\mathrm{sen}(\omega_0 k\tau) \\
&= \frac{2\tau}{T}\mathrm{sinc}(\omega_0 k\tau)
\end{aligned}$$

em que

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}$$

Exemplo 1

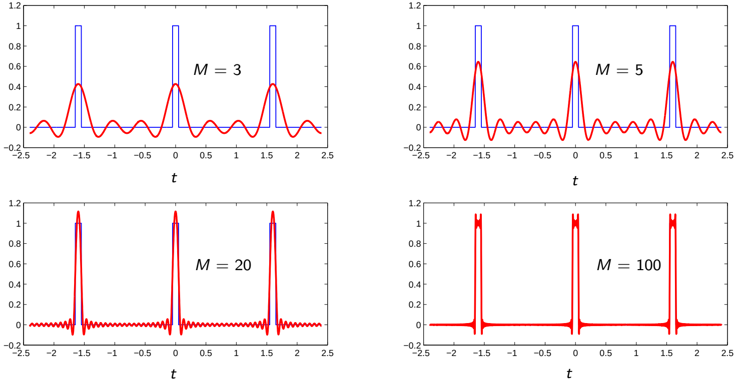
- Representação dos coeficientes $T\alpha_k$ para $\tau = 0.05$ fixo.



Como o espaçamento entre as amostras é dado por $2\pi/T$ a medida que $T \to \infty$ o espectro se aproxima de um espectro contínuo.

Exemplo 1

- Sinal $x_M(t) = \sum_{k=-M}^{M} \alpha_k e^{jk\omega_0 t}$ com $\tau = 0.05$ e $T = 32\tau$



Teorema de Parseval

A seguinte igualdade é verdadeira

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt &= \frac{1}{T}\int_T x^*(t)x(t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_T \left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k^* e^{-jk\omega_0 t}\right\} x(t)dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k^* \left\{\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt\right\} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k^* \alpha_k
\end{aligned}$$

Teorema de Parseval

- A integral
$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt$$
determina a potência média do sinal.
- Note que
$$\frac{1}{T}\int_T |\alpha_k e^{jk\omega_0 t}|^2 dt = \frac{1}{T}\int_T |\alpha_k|^2 dt = |\alpha_k|^2$$
que é a potência média da k-ésima harmônica de $x(t)$.
- Logo, o teorema de Parseval estabelece que a potência média total de um sinal periódico se iguala à soma das potências médias de todas as harmônicas.
- No caso do exemplo anterior para $T = 32\tau$ temos que $P_x = 60.4 \times 10^{-3}$.

Propriedades da série de Fourier

Definindo $\mathcal{D}(\cdot)$ como o operador usado para a obtenção dos coeficientes da série de Fourier, tal que, $\mathcal{D}(x(t)) = \alpha_k$ e $\mathcal{D}(h(t)) = \beta_k$, seguem algumas propriedades básicas.

- **Linearidade :** Para $c_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \cdots, q$ temos

$$\mathcal{D}\left(\sum_{i=1}^{q} c_i x_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{q} c_i \alpha_{ki}$$

- **Deslocamento no tempo (atraso) :**

$$\mathcal{D}\Big(x(t-\tau)\Big) = e^{-jk\omega_0\tau}\alpha_k$$

- **Deslocamento em frequência :**

$$\mathcal{D}\Big(e^{jm\omega_0 t}x(t)\Big) = \alpha_{k-m}$$

Propriedades da série de Fourier

- Convolução periódica :

$$\mathcal{D}\left(\int_T x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right) = T\alpha_k\beta_k$$

- Integral em relação ao tempo :

$$\mathcal{D}\left(\int_{-\infty}^{t} x(\xi)d\xi \right) = \frac{\alpha_k}{jk\omega_0}$$

- Derivada em relação ao tempo :

$$\mathcal{D}\left(\frac{dx(t)}{dt} \right) = jk\omega_0\alpha_k$$

Propriedades da série de Fourier

- Simetria de sinais reais : Se $x(t) = x^*(t)$ então

$$\alpha_{-k} = \alpha_k^*$$

Como implicação deste resultado, temos que

$$\underbrace{\mathrm{Re}\{\alpha_k\} = \mathrm{Re}\{\alpha_{-k}\}}_{\text{função par}} \;,\; \underbrace{\mathrm{Im}\{\alpha_k\} = -\mathrm{Im}\{\alpha_{-k}\}}_{\text{função ímpar}}$$

o que nos permite evidenciar ainda que :

$x(t)$	α_k
real e par	par e real
real e ímpar	ímpar e imaginário puro

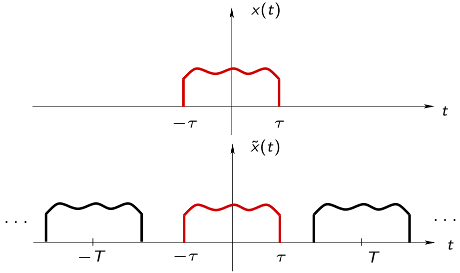
Transformada de Fourier

- Como acabamos de estudar, podemos representar um sinal periódico por uma série de Fourier. Neste caso, seu espectro é formado por linhas igualmente espaçadas e, cujo espaçamento é igual à frequência fundamental do sinal, ou seja, ω_0.

- Um sinal aperiódico pode ser interpretado como o limite de um sinal periódico quando o período tende ao infinito. Neste caso, temos que a frequência fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$ tende a zero e, portanto, obtemos um espectro contínuo.

Transformada de Fourier

De fato, considere um sinal aperiódico $x(t)$ com duração finita. Podemos construir um sinal periódico $\tilde{x}(t)$, idêntico a $x(t)$ para $|t| \leq \tau$, como mostrado na figura.



Escolhendo $T \to \infty$ obtemos que $x(t) = \tilde{x}(t), \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Transformada de Fourier

Representando $\tilde{x}(t)$ em série de Fourier, temos

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Fazendo $T \to \infty$, no intervalo $|t| < T/2$, $\tilde{x}(t) = x(t)$ e, portanto

$$\alpha_k = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Ademais, podemos definir

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Transformada de Fourier

Com a definição anterior, temos

$$\alpha_k = \frac{X(jk\omega_0)}{T}$$

e, portanto

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{X(jk\omega_0)}{T} e^{jk\omega_0 t} = \lim_{\omega_0\to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

Note que cada termo do somatório é a área do retângulo de altura $X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$ e largura ω_0. Desta forma, quando $\omega_0 \to 0$ obtemos :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

conhecida como transformada de Fourier inversa.

Transformada de Fourier

Transformada de Fourier

Um sinal a tempo contínuo $x(t)$ pode ser escrito como

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

chamada de transformada de Fourier inversa em que

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

é denominada transformada de Fourier do sinal $x(t)$.

Convergência da transformada de Fourier

Embora, para a obtenção do par transformada, utilizamos a hipótese de que $x(t)$ possui duração finita, várias classes de sinais de duração infinita possuem transformada de Fourier. Desejamos saber as condições para as quais

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

é uma representação válida para $x(t)$, em que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e(t)|^2 dt = 0$$

para $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Como no caso da série de Fourier, para que isto ocorra, os sinais $x(t)$ e $\hat{x}(t)$ não são necessariamente idênticos, mas podem diferir nos pontos de descontinuidade.

Convergência da transformada de Fourier

As condições a seguir garantem a convergência da transformada e, como no caso das séries, também são chamadas de condições de Dirichlet :

- Condição 1 : O sinal $x(t)$ deve ser absolutamente integrável
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$
- Condição 2 : O sinal $x(t)$ possui um número finito de descontinuidades em intervalos finitos. Ademais, cada descontinuidade deve ser finita.
- Condição 3 : O sinal $x(t)$ deve possuir derivada limitada em intervalos finitos onde ela é contínua.

Se $x(t)$ descontínua em $t = \tau$, temos
$$x(\tau) = \frac{x(\tau^-) + x(\tau^+)}{2}$$

Representação de Fourier para sinais periódicos

As condições anteriores são apenas suficientes. Note, por exemplo, que um sinal periódico, geralmente, não atende a primeira condição. Entretanto, ele possui transformada de Fourier.

Considere que a transformada de Fourier de um sinal é dada por

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Utilizando a transformada de Fourier inversa, temos

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega \\ &= e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$

Representação de Fourier para sinais periódicos

Desta forma, a transformada de Fourier de um sinal periódico é

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\alpha_k\delta(\omega - k\omega_0)$$

De fato,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\alpha_k\delta(\omega - k\omega_0)e^{j\omega t}d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

que é a representação do sinal $x(t)$ em série de Fourier. No caso do sinal retangular periódico, temos $\alpha_k = (2\tau/T)\mathrm{sinc}(\omega_0 k\tau)$ e, portanto

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\tau\omega_0\mathrm{sinc}(\omega_0\tau k)\delta(\omega - k\omega_0)$$

Teorema de Parseval

A seguinte igualdade é verdadeira

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right\} x(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right\} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega
\end{aligned}$$

$S_{xx} = |X(j\omega)|^2$ é chamado de densidade espectral de energia.

Propriedades da transformada de Fourier

Definindo $\mathcal{F}(\cdot)$ como sendo o operador transformada de Fourier, estão listadas a seguir algumas propriedades básicas.

- **Linearidade :** Para $c_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \cdots, q$ temos

$$\mathcal{F}\left(\sum_{i=1}^{q} c_i x_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{q} c_i X(j\omega)$$

- **Deslocamento no tempo (atraso) :**

$$\mathcal{F}\Big(x(t-\tau)\Big) = e^{-j\omega\tau} X(j\omega)$$

- **Deslocamento em frequência :**

$$\mathcal{F}\Big(e^{-at} x(t)\Big) = X(j(\omega + a))$$

Propriedades da transformada de Fourier

- Convolução :

$$\mathcal{F}\Big(x(t) * h(t)\Big) = X(j\omega)H(j\omega)$$

- Integral em relação ao tempo :

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} x(\xi)d\xi\right) = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

- Derivada em relação ao tempo :

$$\mathcal{F}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = j\omega X(j\omega)$$

Propriedades da transformada de Fourier

- Simetria de sinais reais : Se $x(t) = x^*(t)$ então

$$X(-j\omega) = X^*(j\omega)$$

Como implicação deste resultado, temos que

$$\underbrace{\mathrm{Re}\{X(j\omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-j\omega)\}}_{\text{função par}} \;,\; \underbrace{\mathrm{Im}\{X(j\omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\}}_{\text{função ímpar}}$$

o que nos permite evidenciar ainda que :

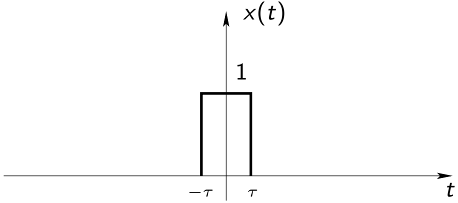
$x(t)$	$X(j\omega)$
real e par	par e real
real e ímpar	ímpar e imaginário puro

Exemplo 2

- Considere o sinal retangular definido como

$$x(t) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| < \tau \\ 0 & , \quad |t| > \tau \end{cases}$$

encontre a transformada de Fourier e recupere o sinal $x(t)$.

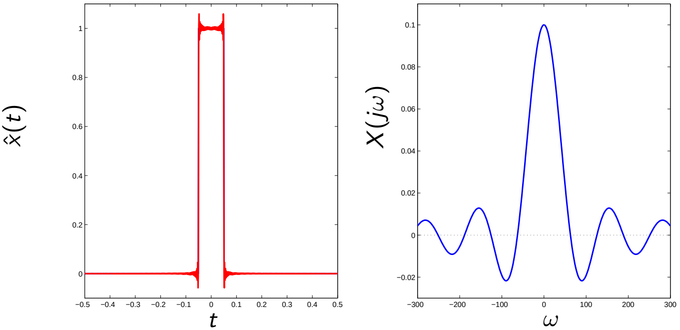


Resposta : A sua transformada de Fourier é dada por

$$X(j\omega) = \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt = 2\tau \mathrm{sinc}(\omega\tau)$$

Exemplo 2

- Transformada de Fourier e sinal $\hat{x}(t)$ para $\tau = 0.05$



O sinal no tempo foi obtido através do seguinte limite

$$\hat{x}(t) = \lim_{W\to\infty} \frac{\tau}{\pi} \int_{-W}^{W} \mathrm{sinc}(\omega\tau) e^{j\omega t} d\omega$$

Exemplo 3

- Considere o sinal

$$x(t) = e^{-2t}u(t)$$

calcule sua transformada e a represente em termos de módulo e fase.

Resposta : Sua transformada de Fourier é

$$X(j\omega) = \int_0^\infty e^{-(2+j\omega)t}dt = \frac{1}{2+j\omega}$$

Para representá-la em função de ω, expressamos $X(j\omega)$ em termos da sua magnitude e fase

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}} \ , \ \angle X(j\omega) = -\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Exemplo 3

- Magnitude e fase de $X(j\omega)$