Matemática para Engenharia

Profa. Grace S. Deaecto

Faculdade de Engenharia Mecânica / UNICAMP
13083-860, Campinas, SP, Brasil.
grace@fem.unicamp.br

Segundo Semestre de 2013

NOTA AO LEITOR

Estas notas de aula foram inteiramente baseadas nas seguintes referências :

- J. C. Geromel e A. G. B. Palhares, "*Análise Linear de Sistemas Dinâmicos - Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*", 2ª Edição, Edgard Blucher Ltda, 2011.
- A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. Nawab, "*Signals & Systems*", 2^{nd} Edition, *Prentice Hall*, 1997.
- S. Haykin, B. V. Veen, "*Sinais e Sistemas*", Bookman, 1999.

1. Representação de Fourier - Tempo discreto
   - Sistemas LTI
   - Resposta à função potência
   - Série de Fourier
   - Propriedades da série de Fourier
   - Transformada de Fourier
   - Propriedades da transformada de Fourier

Comentários iniciais

- Como o leitor poderá verificar no decorrer da leitura deste capítulo, vários resultados para sistemas a tempo discretos são bastante similares aos estudados anteriormente para sistemas a tempo contínuo.

- A diferença fundamental é que para sinais a tempo contínuo, a variável independente é real $(t \in \mathbb{R})$, enquanto que para sistemas a tempo discreto ela é inteira $(n \in \mathbb{Z})$.

- Mesmo com grandes similaridades nos resultados, existem diferenças importantes entre os dois domínios de tempo que serão devidamente enfatizadas neste capítulo.

Sistemas LTI

Um sinal definido para todo $n \in \mathbb{Z}$ pode ser representado como uma combinação linear de exponenciais complexas.

Esta representação é importante, não somente, porque leva a uma expressão bastante simples da saída, mas também porque permite uma caracterização no domínio da frequência dos sinais e sistemas através da análise do seu espectro.

Antes de apresentá-la, vamos revisar algumas definições e características de um sistema dinâmico. Ele é um ente matemático denotado por $\mathcal{S}\{\cdot\}$ que converte um sinal de entrada $x(n)$ em um sinal de saída $y(n)$, ou seja

$$y(n) = \mathcal{S}\{x(n)\}$$

Sistemas LTI

Um sistema dinâmico $\mathcal{S}\{\cdot\}$ definido para todo $n \in \mathbb{Z}$ é dito :

- Linear : Quando a saída para uma entrada $x(n) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i(n)$ for igual a $y(n) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i(n)$ para todo $\alpha_i \in \mathbb{R}$.
- Invariante no tempo : Quando a saída para uma entrada $x(n-i)$ for igual a $y(n-i)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.
- Causal : Quando a saída $y(n)$ depende da entrada $x(i)$ apenas para $i \leq n$. Ou seja, em qualquer instante a saída depende apenas da entrada ocorrida no passado e no presente.

Uma entrada de grande importância é o impulso unitário discreto $x(n) = \delta(n)$ definido por

$$\delta(n) := \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ 0 & , \quad n \neq 0 \end{cases}$$

Sistemas LTI

Um sinal $x(n)$ definido em $n \in \mathbb{Z}$ pode ser descrito como uma combinação linear de impulsos da seguinte maneira

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\delta(n-i)$$

Seja $\mathcal{S}\{\cdot\}$ um sistema dinâmico LTI com entrada $x(n)$, sua saída $y(n)$ é dada por

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathcal{S}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\delta(n-i)\right\} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\mathcal{S}\left\{\delta(n-i)\right\} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(n-i) \end{aligned}$$

Sistemas LTI

Em que a segunda igualdade decorre da propriedade de linearidade e a terceira da propriedade de invariância no tempo de um sistema LTI e

$$h(n) = \mathcal{S}\{\delta(n)\}$$

é a resposta ao impulso. Logo, $y(n) = x(n) * h(n)$, ou seja

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(n-i)$$

Ademais, se o sistema for causal então $h(n) = 0, \ \forall n < 0$ e, temos

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{n} x(i)h(n-i)$$

Resposta à função potência

A resposta de um sistema LTI à função potência $x(n) = \mu^n$ com $\mu \in \mathbb{C}$ é dada por

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)x(n-i) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)\mu^{(n-i)} \\ &= \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)\mu^{-i} \right\} \mu^n \end{aligned}$$

sendo

$$H(\mu) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)\mu^{-i}$$

relacionada à resposta ao impulso do sistema.

Resposta à função potência

Logo, a resposta a μ^n é igual a entrada a menos de uma constante $H(\mu)$, ou seja

$$y(n) = H(\mu)\mu^n$$

sendo μ^n chamada de autofunção e $H(\mu)$ autovalor associado à autofunção μ^n. Consequentemente, para

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \mu_k^n$$

teremos a seguinte saída

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k H(\mu_k) \mu_k^n$$

Resposta a exponenciais complexas

- A representação de um sinal em termos de uma combinação linear de funções do tipo μ^n com $\mu = e^{j\omega}$ é uma representação de Fourier do sinal.
- Ela é importante pois permite uma análise criteriosa de cada componente em frequência do sinal. Ademais, para cada componente, a resposta de um sistema a um sinal com representação de Fourier é simples, pois é idêntica à entrada a menos de uma constante $H(\cdot)$.
- Quando o sinal a tempo discreto é periódico, ele pode ser representado por uma série de Fourier.
- Quando o sinal a tempo discreto é aperiódico, ele pode ser representado por uma transformada de Fourier.

Série de Fourier

- Um sinal a tempo discreto é periódico se para algum $N > 0 \in \mathbb{Z}$
$$x(n) = x(n+N), \ \forall n \in \mathbb{Z}$$
- Se $N > 0$ é o menor valor inteiro que satisfaz a igualdade, ele é chamado de período fundamental.
- Do capítulo anterior, pudemos concluir que o sinal $e^{j\omega_0 t}$ possui as seguintes propriedades :
  - Quanto maior ω_0 maior é a taxa de oscilação do sinal.
  - Ele é periódico para qualquer valor de ω_0.
- Ambas as propriedades não são verificadas no caso discreto.

Série de Fourier

- De fato, note que para a frequência $\omega = \omega_0 + 2\pi$, temos

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j\omega_0 n} e^{j2\pi n} = e^{j\omega_0 n}$$

  e, portanto, os sinais de frequências $\omega_0 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ são idênticos àquele de frequência ω_0.

- Logo, basta representar o sinal nos intervalos $0 \leq \omega_0 \leq 2\pi$ ou $-\pi \leq \omega_0 \leq \pi$.

- Ademais, diferente do caso contínuo, a sua taxa de oscilação não é crescente com ω_0. De fato, a maior taxa ocorre para $\omega_0 = \pi$ e as menores taxas para frequências próximas de $\omega_0 = 0$ e $\omega_0 = 2\pi$. Em ambas as frequências, a sequência é a mesma e o sinal é constante.

Série de Fourier

- No que se refere à periodicidade, para que $e^{j\omega_0 n}$ seja periódica com período $N > 0$ devemos ter

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}$$

e, portanto, $e^{j\omega_0 N} = 1$ sendo $\omega_0 N$ um múltiplo de 2π.

- Logo, deve existir um inteiro k tal que $\omega_0 N = 2\pi k$ ou de forma equivalente

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N}$$

deve ser racional.

- Se x(n) possui período fundamental N, então sua frequência fundamental é

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{\omega_0}{k}$$

Série de Fourier

- A tabela resume as diferenças entre os sinais $e^{j\omega_0 t}$ e $e^{j\omega_0 n}$.

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
Sinais diferentes para cada ω_0	Sinais idênticos para $\omega_0 + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$
Periódico para qualquer ω_0	Periódico para $\omega_0 = 2\pi k/N$, k e $N > 0$ inteiros
Frequência fundamental ω_0	Frequência fundamental ω_0/k

Exemplo 1

- Calcule o período T para os sinais a tempo contínuo $x(t) = \cos(2\pi t/12)$, $x(t) = \cos(8\pi t/31)$ e $x(t) = \cos(t/6)$.

Resposta :

- Para o sinal $x(t) = \cos(2\pi t/12)$ temos $T = 12$.
- Para o sinal $x(t) = \cos(8\pi t/31)$ temos $T = 31/4$.
- Para o sinal $x(t) = \cos(t/6)$ temos $T = 12\pi$.

Exemplo 2

- Calcule o período N para os sinais a tempo discreto $x(n) = \cos(2\pi n/12)$, $x(n) = \cos(8\pi n/31)$ e $x(n) = \cos(n/6)$.

Resposta :

- Para o sinal $x(n) = \cos(2\pi n/12)$ temos $N = 12$.
- Para o sinal $x(n) = \cos(8\pi n/31)$ temos $N = 31$. Note que $x(n)$ é definido somente para valores inteiros da variável independente.
- Para o sinal $x(n) = \cos(n/6)$ não encontramos N inteiro e, portanto, $x(n)$ não é periódico.

Série de Fourier

Série de Fourier

Um sinal periódico a tempo discreto $x(n) = x(n+N)$ pode ser escrito como

$$x(n) = \sum_{k=<N>} \alpha_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x(n) e^{-jk\omega_0 n}$$

sempre que a série convergir, em que $\omega_0 = 2\pi/N$.

Diferente do caso contínuo, no tempo discreto, a série é finita. A notação $< N >$ representa N pontos consecutivos não importando quais sejam eles.

Série de Fourier

De fato, considerando que a primeira igualdade vale, multiplicando-a de ambos os lados por $e^{-jr\omega_0 n}$ e somando ao longo de um período, temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=<N>} x(n)e^{-jr\omega_0 n} &= \sum_{n=<N>} \sum_{k=<N>} \alpha_k e^{jk\omega_0 n} e^{-jr\omega_0 n} \\ &= \sum_{k=<N>} \alpha_k \sum_{n=<N>} e^{j(k-r)\omega_0 n} \\ &= \alpha_k N\end{aligned}$$

pois

$$\sum_{n=<N>} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} = \begin{cases} N & , \quad k-r = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

Logo, os coeficientes são calculados como

$$\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x(n)e^{-jk\omega_0 n}$$

Comentários :

- Os coeficientes espectrais $\alpha_k, \ k \in \mathbb{Z}$ medem a porção do sinal referente a cada harmônica da componente fundamental.
- Ademais, levando em conta que $e^{jk\omega_0 n} = e^{j(k+N)\omega_0 n}$ temos que $\alpha_k = \alpha_{k+N}$.
- Como no caso contínuo, para sinais periódicos reais temos $x(n) = x^*(n)$ e, portanto,

$$\alpha_k^* = \alpha_{-k}$$

- No caso discreto, a série de Fourier sempre converge e não existe o fenômeno de Gibbs. Isto ocorre pois a sequência periódica está totalmente especificada por um número finito de N parâmetros. A série somente os organiza de maneira conveniente.

Exemplo 3

- Considere o sinal

$$x(n) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi \times 3}{5} n\right)$$

e determine a sua representação em série de Fourier e os seus coeficientes.

Resposta : Temos que $N = 5$. Ademais, podemos verificar que

$$x(n) = \frac{1}{2j} e^{j3(2\pi/5)n} - \frac{1}{2j} e^{-j3(2\pi/5)n}$$

e, por inspeção encontramos

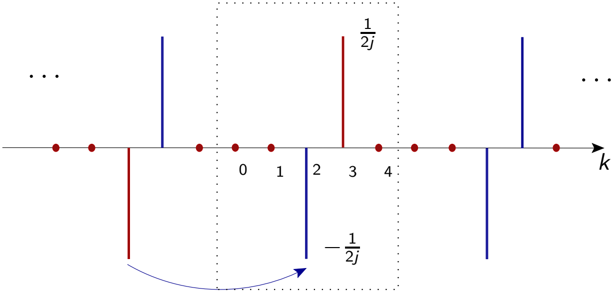
$$\alpha_3 = \frac{1}{2j} \quad \text{e} \quad \alpha_{-3} = -\frac{1}{2j}$$

Exemplo 3

Devido à propriedade de periodicidade temos que

$$\alpha_3 = \alpha_{3-5} = \alpha_{-2} \quad e \quad \alpha_{-3} = \alpha_{-3+5} = \alpha_2$$

A figura a seguir mostra os coeficientes da série.



Exemplo 4

- Considere o sinal

$$x(n) = 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + \cos\left(\frac{4\pi n}{N} + \frac{\pi}{2}\right)$$

e determine a sua representação em série de Fourier.
Resposta : Expandindo $x(n)$ em termos de exponenciais complexas, obtemos

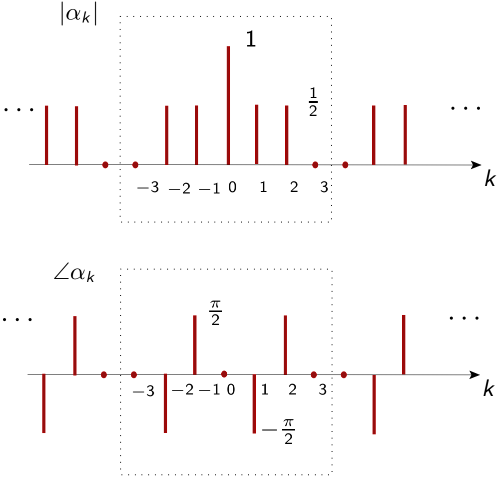
$$x(n) = 1 + \frac{1}{2j}\left[e^{j(2\pi/N)n} - e^{-j(2\pi/N)n}\right] + \frac{j}{2}\left[e^{j2(2\pi/N)n} - e^{-j2(2\pi/N)n}\right]$$

e, portanto, os coeficientes são

$$\begin{array}{rcl} \alpha_0 & = & 1 \\ \alpha_1 & = & \frac{1}{2j} \\ \alpha_{-1} & = & -\frac{1}{2j} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \alpha_2 & = & \frac{j}{2} \\ \alpha_{-2} & = & -\frac{j}{2} \end{array}$$

Exemplo 4

A figura a seguir apresenta os coeficientes da série para $N = 7$.



Teorema de Parseval

A seguinte igualdade é verdadeira

$$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}|x(n)|^2 = \sum_{k=<N>}|\alpha_k|^2$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}|x(n)|^2 &= \frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x(n)^* x(n) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\left\{\sum_{k=<N>}\alpha_k^* e^{-jk\omega_0 n}\right\}x(n) \\
&= \sum_{k=<N>}\alpha_k^*\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x(n)e^{-jk\omega_0 n}\right\} \\
&= \sum_{k=<N>}\alpha_k^*\alpha_k
\end{aligned}$$

Propriedades da série de Fourier

Definindo $\mathcal{R}(\cdot)$ como o operador usado para a obtenção dos coeficientes da série de Fourier, tal que, $\mathcal{R}(x(n)) = \alpha_k$ e $\mathcal{R}(h(n)) = \beta_k$, seguem algumas propriedades básicas.

- Linearidade : Para $c_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \cdots, q$ temos

$$\mathcal{R}\left(\sum_{i=1}^{q} c_i x_i(n)\right) = \sum_{i=1}^{q} c_i \alpha_{ki}$$

- Deslocamento no tempo (atraso) :

$$\mathcal{R}\Big(x(n-i)\Big) = e^{-jk\omega_0 i}\alpha_k$$

- Deslocamento em frequência :

$$\mathcal{R}\Big(e^{jm\omega_0 n}x(n)\Big) = \alpha_{k-m}$$

Propriedades da série de Fourier

- Convolução periódica :

$$\mathcal{R}\Big(\sum_{r=<N>} x(r)h(n-r)\Big) = N\alpha_k\beta_k$$

- Simetria de sinais reais : Se $x(n) = x^*(n)$ então

$$\alpha_{-k} = \alpha_k^*$$

Como implicação deste resultado, temos que

$$\underbrace{\mathrm{Re}\{\alpha_k\} = \mathrm{Re}\{\alpha_{-k}\}}_{\text{função par}} \; , \; \underbrace{\mathrm{Im}\{\alpha_k\} = -\mathrm{Im}\{\alpha_{-k}\}}_{\text{função ímpar}}$$

o que nos permite evidenciar ainda que :

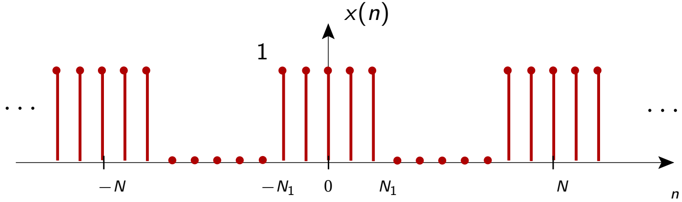
$x(t)$	α_k
real e par	par e real
real e ímpar	ímpar e imaginário puro

Exemplo 5

- Considere um sinal retangular a tempo discreto definido por

$$x(n) = \begin{cases} 1 & , \quad |n| \leq N_1 \\ 0 & , \quad N_1 \leq |n| \leq N/2 \end{cases}$$

encontre os coeficientes da série de Fourier e através deles, recupere o sinal $x(n)$.



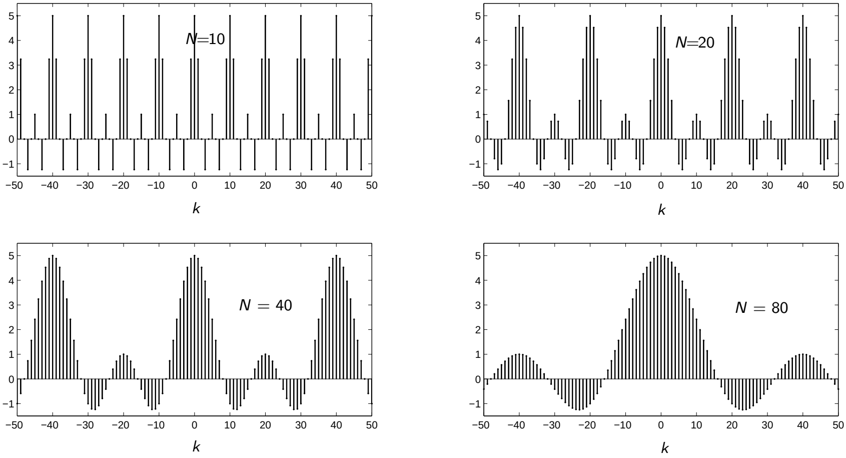
Exemplo 5

Para obter os coeficientes da série de Fourier temos

$$
\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\omega_0 n} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\omega_0(m-N_1)} \\
&= \frac{1}{N} e^{jk\omega_0 N_1}\left(\frac{1 - e^{-jk\omega_0(2N_1+1)}}{1 - e^{-jk\omega_0}}\right) \\
&= \frac{1}{N}\frac{2j}{2j}\frac{e^{-jk\omega_0/2}}{e^{-jk\omega_0/2}}\left(\frac{e^{jk\omega_0(2N_1+1)/2} - e^{-jk\omega_0(2N_1+1)/2}}{e^{jk\omega_0/2} - e^{-jk\omega_0/2}}\right) \\
&= \frac{1}{N}\frac{\mathrm{sen}(k\omega_0(2N_1+1)/2)}{\mathrm{sen}(k\omega_0/2)} \\
&= \frac{(2N_1+1)}{N}\frac{\mathrm{sinc}(k\omega_0(2N_1+1)/2)}{\mathrm{sinc}(k\omega_0/2)}
\end{aligned}
$$

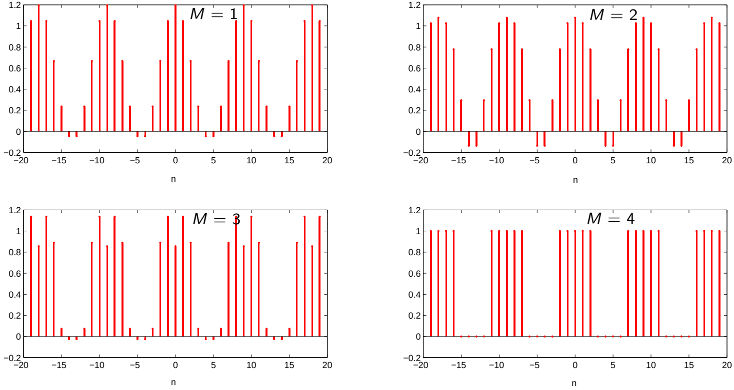
Exemplo 5

- Representação dos coeficientes $N\alpha_k$ para $N_1 = 2$.



Exemplo 5

- Sinal $x(n) = \sum_{k=-M}^{M} \alpha_k e^{jk\omega_0 n}$ com $N_1 = 2$ e $N = 9$.

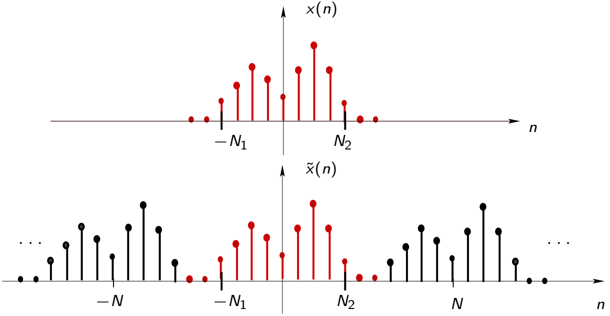


Transformada de Fourier

- Como no capítulo anterior, a transformada de Fourier para sinais a tempo discreto pode ser obtida a partir da série de Fourier do sinal, cujo espectro é formado por linhas igualmente espaçadas com espaçamento igual à frequência fundamental do sinal, ou seja, ω_0.
- Mais especificamente, vamos aproximar um sinal aperiódico por um periódico quando o período N tende ao infinito. Neste caso, temos que a frequência fundamental $\omega_0 = 2\pi/N$ tende a zero e, portanto, obtemos um espectro contínuo.
- Como veremos, a ideia é idêntica àquela adotada no capítulo anterior.

Transformada de Fourier

De fato, considere um sinal aperiódico $x(n)$ com duração finita. Podemos construir um sinal periódico $\tilde{x}(n)$, idêntico a $x(n)$ para $-N_1 < n < N_2$, como mostrado na figura.



Escolhendo $N \to \infty$ obtemos que $x(n) = \tilde{x}(n), \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Transformada de Fourier

Representando $\tilde{x}(n)$ em série de Fourier, temos

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=<N>} \alpha_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}(n) e^{-jk\omega_0 n}$$

Fazendo $N \to \infty$, no intervalo $-N_1 < n < N_2$, $\tilde{x}(n) = x(n)$ e

$$\alpha_k = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x(n) e^{-jk\omega_0 n} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jk\omega_0 n}$$

onde foi considerado o fato que $x(n) = 0$ fora do intervalo $-N_1 < n < N_2$. Ademais, podemos definir

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

Transformada de Fourier

Com a definição anterior, temos

$$\alpha_k = \frac{X(e^{jk\omega_0})}{N}$$

e, portanto

$$x(n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=<N>} \frac{X(e^{jk\omega_0})}{N} e^{jk\omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega_0\to 0} \sum_{k=<2\pi/\omega_0>} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}\omega_0$$

Cada termo do somatório é a área do retângulo de altura $X(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}$ e largura ω_0. Como $\omega_0 \to 0$, o somatório torna-se uma integral.

- Ademais, uma vez que o somatório ocorre para N intervalos consecutivos de tamanho $\omega_0 = 2\pi/N$, o intervalo total de integração será sempre 2π. Assim, para $N \to \infty$, $\tilde{x}(n) = x(n)$ e temos

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

conhecida como transformada de Fourier inversa para sinais a tempo discreto.

- Um ponto importante a ser ressaltado é que, diferente do caso contínuo, $X(e^{j\omega})$ é periódica e possui período igual a 2π.

Transformada de Fourier

Transformada de Fourier

Um sinal a tempo discreto $x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ pode ser escrito como

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

chamada de transformada de Fourier inversa em que

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

é denominada transformada de Fourier do sinal $x(n)$.

Convergência da Transformada de Fourier

Desejamos saber as condições para as quais $\tilde{x}(n)$ é uma representação válida para $x(n)$. Ou seja, quais as condições para as quais a soma infinita de $X(e^{j\omega})$ converge ?

- Condição : O sinal $x(n)$ deve possuir energia finita

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

Sobre a transformada de Fourier inversa não há hipóteses de convergência uma vez que o intervalo de integração é finito. Geralmente, o fenômeno de Gibbs não é observado.

Representação de Fourier para sinais periódicos

Como no caso contínuo, podemos calcular a transformada de Fourier para sinais periódicos a tempo discreto se a interpretarmos como um trem de impulsos no domínio da frequência.

No caso contínuo, concluímos que a transformada de Fourier, de um sinal periódico $x(t)$ é dada por

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\alpha_k \delta(\omega - 2\pi k/T)$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio, para o caso discreto, temos

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\alpha_k \delta(\omega - 2\pi k/N)$$

Representação de Fourier para sinais periódicos

De fato, temos

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\alpha_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\omega n} d\omega \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \int_{2\pi} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\omega n} d\omega \\
&= \sum_{k=<N>} \alpha_k e^{j(2\pi k/N)n}
\end{aligned}
$$

que é exatamente a representação do sinal $x(n)$ em série de Fourier. Os limites do somatório na última igualdade vem do fato de que o intervalo de integração na igualdade anterior é igual a 2π o que impõe $k =< N >$.

Teorema de Parseval

A seguinte igualdade, que representa a energia de um sinal é verdadeira

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X^*(e^{j\omega}) e^{-j\omega n} d\omega \right\} x(n) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X^*(e^{j\omega}) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \right\} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega
\end{aligned}$$

$S_{xx} = |X(e^{j\omega})|^2$ é chamado de densidade espectral de energia.

Propriedades da transformada de Fourier

Definindo $\mathcal{F}(\cdot)$ como sendo o operador transformada de Fourier, estão listadas a seguir algumas propriedades básicas, que o leitor pode notar, muitas delas são similares aquelas do caso contínuo.

- Linearidade : Para $c_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \cdots, q$ temos

$$\mathcal{F}\left(\sum_{i=1}^{q} c_i x_i(n)\right) = \sum_{i=1}^{q} c_i X(e^{j\omega})$$

- Deslocamento no tempo (atraso) :

$$\mathcal{F}\Big(x(n-i)\Big) = e^{-j\omega i} X(e^{j\omega})$$

- Deslocamento em frequência :

$$\mathcal{F}\Big(e^{-\omega_0 n} x(t)\Big) = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

Propriedades da transformada de Fourier

- Convolução :

$$\mathcal{F}\Big(x(n) * h(n)\Big) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- Simetria de sinais reais : Se $x(n) = x^*(n)$ então

$$X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$$

Como implicação deste resultado, temos que

$$\underbrace{\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\} = \mathrm{Re}\{X(e^{-j\omega})\}}_{\text{função par}} \; , \; \underbrace{\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\} = -\mathrm{Im}\{X(e^{-j\omega})\}}_{\text{função ímpar}}$$

o que nos permite evidenciar ainda que :

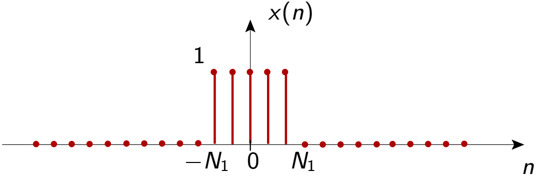
$x(n)$	$X(e^{j\omega})$
real e par	par e real
real e ímpar	ímpar e imaginário puro

Exemplo 6

- Considere o sinal de retangular definido como

$$x(n) = \begin{cases} 1 & , \quad |n| \leq N_1 \\ 0 & , \quad |n| > N_1 \end{cases}$$

encontre a transformada de Fourier e recupere o sinal $x(n)$.

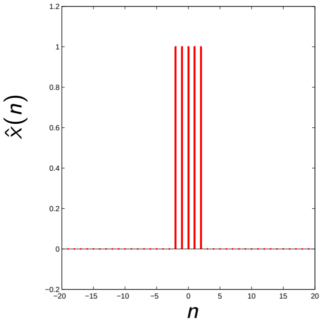


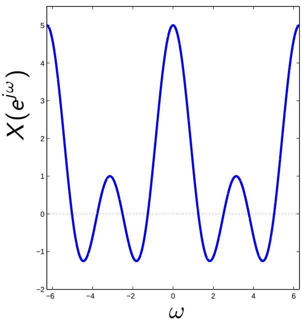
Resposta : A sua transformada de Fourier é dada por

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \frac{\mathrm{sen}(\omega(N_1+1/2))}{\mathrm{sen}(\omega/2)} = (2N_1+1)\frac{\mathrm{sinc}(\omega(N_1+1/2))}{\mathrm{sinc}(\omega/2)}$$

Exemplo 6

- Transformada de Fourier e sinal $\hat{x}(n)$ para $N_1 = 2$





O sinal no tempo foi obtido da seguinte maneira

$$\hat{x}(n) = \frac{(2N_1 + 1)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sinc}(\omega(N_1 + 1/2))}{\text{sinc}(\omega/2)} e^{j\omega n} d\omega$$

Implementação numérica da transformada

- Vimos que a transformada de Fourier para sinais a tempo discreto aperiódicos é continúa na frequência.
- Para analisá-la através de um computador ou processador digital é importante amostrá-la, uma vez que ambos possuem capacidade de armazenamento limitado.
- Desta forma, amostrando $X(e^{j\omega})$ para $\omega = k\omega_0 = k2\pi/N$ o sinal a tempo discreto torna-se

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \\ &\approx \frac{1}{2\pi}\sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}\omega_0 \\ &\approx \frac{1}{N}\sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n} \end{aligned}$$

que é uma série de Fourier de período N.

Implementação numérica da transformada

- Note que o sinal $x(n)$ pode ser recuperado, se N for escolhido maior ou igual ao tamanho do sinal.
- Por exemplo, considere que $x(n)$ possua tamanho L, ou seja, $x(n) \neq 0$ para $n = 0, \cdots, L-1$ e $x(n) = 0$ para os demais instantes. Neste caso, se $N \geq L$ então $x(n)$ será igual à sua série $\tilde{x}(n)$ para $n = 0, \cdots, N-1$.
- Se $N < L$ ocorrerá distorção do sinal e, portanto, $x(n)$ não poderá ser recuperado.
- Ademais, quanto maior o valor de N, menor é o espaçamento entre as amostras de $X(e^{jk\omega_0})$ e melhor é a representação do espectro.

Comentários

- Sobre os resultados referentes à representação de Fourier a tempo contínuo e a tempo discreto podemos obter as seguintes conclusões :
  - Sinais contínuos no tempo possuem espectros aperiódicos.
  - Sinais discretos no tempo possuem espectros periódicos com período 2π.
  - Sinais periódicos no tempo possuem espectros discretos.
  - Sinais aperiódicos no tempo possuem espectros contínuos.