ES728 - Controle Avançado de Sistemas

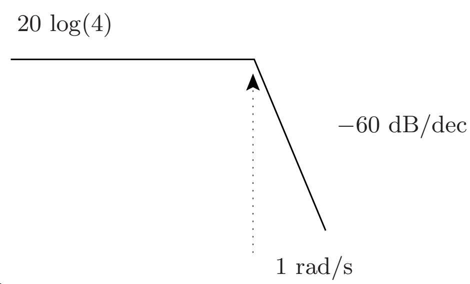
Terceira Lista de Exercícios

1. Usando o Teorema de Parseval, determine o valor da integral

$$I = \int_0^\infty f(t)^2 dt$$

para $f(t) = e^{-2t}$.

2. A Figura 2 apresenta o diagrama de Bode de módulo de um sistema de fase mínima $\hat{z} = H_{wz}(s)\hat{w}$ com polos reais



a) Determine a sua norma $\mathcal{H}_2$.

b) Determine a sua norma $\mathcal{H}_\infty$.

3. Considere o sistema a tempo discreto com resposta ao impulso

$$h_{wz}(k) = k(0.5)^k$$

a) Determine a sua norma $\mathcal{H}_2$ pela definição.

b) Determine a sua norma $\mathcal{H}_2$ através de gramianos.

4. Mostre que a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Hw(k),\ x(0) = 0 \\ z(k) &= Ex(k) + Jw(k) \end{aligned} \tag{1}$$

pode ser calculada alternativamente através do gramiano de controlabilidade

$$\|H_{wz}(z)\|_2^2 = \{\mathrm{Tr}(EP_cE' + JJ') \ : \ AP_cA' - P_c + HH' = 0\}$$

ou através das seguintes LMIs

$$\|H_{wz}(z)\|_2^2 = \{\inf_{P>0} \mathrm{Tr}(EPE' + JJ') \ : \ APA' - P + HH' < 0\}$$

5. Considere as seguintes funções de transferência assintoticamente estáveis

a) $H_{wz}(s) = \dfrac{(s+2)}{(s^2+2s+5)(s+1)}$

b) $H_{wz}(s) = \dfrac{(s-2)}{(s^2+2s+5)(s+1)}$

c) $H_{wz}(s) = \dfrac{(s-2)^2}{(s^2+2s+5)(s+1)}$

d) $H_{wz}(z) = \dfrac{(z-2)(z+0.3)(z-1)}{(z-0.9)(z+0.5)(z-0.7)}$

Determine a norma $\mathcal{H}_2$ de cada função de transferência usando gramianos e a rotina numérica do LMIsolver

6. Considere as seguintes funções de transferência assintoticamente estáveis

a) $H_{wz}(s) = \dfrac{(s+2)}{(s^2+2s+5)(s+1)}$

b) $H_{wz}(s) = \dfrac{(s-2)}{(s^2+2s+5)(s+1)}$

c) $H_{wz}(s) = 1 + \dfrac{(s-2)^2}{(s^2+2s+5)(s+1)}$

d) $H_{wz}(z) = \dfrac{(z-2)(z+0.3)(z-1)}{(z-0.9)(z+0.5)(z-0.7)}$

Determine a norma $\mathcal{H}_\infty$ de cada função de transferência usando gramianos e a rotina numérica do LMIsolver.

7. Para $P = P' > 0$ e $R = R' > 0$. Utilizando o Complemento de Schur, obtenha na forma de LMI uma expressão equivalente a

a) $A'P + PA + PRP < 0$

b) $A'PA - P + PRP < 0$

c) $A'P + PA - P + (PH-E)'R^{-1}(PH-E) < 0$

8. Considerando matrizes simétricas $X > 0$, $Y > 0$ e $Z > 0$ e matrizes genéricas W e K transforme a desigualdade

$$(X^{-1}+Y^{-1})^{-1} > Z^{-1} + W'W + K'YK$$

em uma LMI nas variáveis de decisão X, Y, Z, W e $L = YK$. Dica: Considere que a seguinte identidade é satisfeita

$$(J+RT)^{-1} = J^{-1}\left(J - R(I+TJ^{-1}R)^{-1}T\right)J^{-1}$$

em que J é uma matriz não singular e J, R e T possuem dimensões compatíveis.

9. Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Hw, \;\; x(0) = 0 \\ z &= Ex + Fu + Jw \end{aligned} \tag{2}$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \ B = H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ E = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ F = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ J = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine o ganho do controlador $u = -Kx$ que minimiza a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema em malha fechada.

b) Para qual escolha de V e ρ utilizados no lugar das raízes simétrico obteríamos o mesmo resultado do item anterior via solução do problema linear quadrático.

a) Determine o ganho do controlador $u = -Kx$ que minimiza a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada.