ES728 - Controle Avançado de Sistemas

Primeira Lista de Exercícios

1. Mostre que a equação característica de uma matriz $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ é dada por
$$s^2 - \mathrm{Tr}(X)s + \det(X) = 0$$

2. Prove que matrizes similares $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\tilde{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ em que $\tilde{X} = \Gamma^{-1}\tilde{X}\Gamma$ com $\det(\Gamma) \neq 0$ possuem os mesmos autovalores.

3. Para qualquer matriz $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, prove que
$$\mathrm{Tr}(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(X) \quad \text{e} \quad \det(X) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(X)$$
em que $\lambda_i(X),\ i = 1\cdots,n$ representa o i-ésimo autovalor de X.

4. Calcule os autovalores e os autovetores das seguintes matrizes:
a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
e verifique o resultado utilizando o comando "`eig`" do Matlab.

5. Verifique a positividade das matrizes
a) $Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 1.5 & 3 \end{bmatrix}$ c) $Q = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & -5 \\ 0 & -5 & -11 \end{bmatrix}$

6. Considere a equação de Van der Pool dada por
$$\ddot{z} - \mu(1 - z^2)\dot{z} + z = 0$$
em que $0 < \mu < 2$.
   (a) Determine sua representação em espaço de estado para $\xi_1 = z$ e $\xi_2 = \dot{z}$.
   (b) Determine seus pontos de equilíbrio e classifique-os.
   (c) Esboce as trajetórias do plano de fase nas proximidades dos pontos de equilíbrio.

7. Considere a equação de Duffing dada por
$$\ddot{z} + \delta\dot{z} - z(1 - z^2/c^2) = 0$$
com $c \neq 0$ e $\delta > 0$.
   (a) Determine sua representação em espaço de estado para $\xi_1 = z$ e $\xi_2 = \dot{z}$.
   (b) Determine seus pontos de equilíbrio e classifique-os.
   (c) Para $\delta = 2$, esboce as trajetórias do plano de fase nas proximidades dos pontos de equilíbrio.

8. Considere o sistema ecológico de Lotka-Volterra que modela o comportamento dinâmico de populações de presas $h(t)$ e predadores $\ell(t)$ compartilhando um habitat.

$$\dot{h}(t) = h(t)(r_h + c_{h\ell}\ell(t)), \quad h(0) = h_0 \tag{1}$$

$$\dot{\ell}(t) = \ell(t)(r_\ell + c_{\ell h}h(t)), \quad \ell(0) = \ell_0 \tag{2}$$

Considere as constantes $r_h = 0.7$, $r_\ell = -0.2$, $c_{h\ell} = -0.03$ e $c_{\ell h} = 0.05$

a) Encontre os pontos de equilíbrio e classifique-os.

b) Esboce o plano de fase ao redor dos pontos de equilíbrio.

9. Considere os seguintes sistemas não-lineares de segunda ordem

a) $\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= -2\xi_1 + \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_1(\xi_1^2 - 3\xi_1 + 4) - \xi_2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -\xi_1 + \dfrac{1}{16}\xi_1^5 - \xi_2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -2 - \xi_1 + 1/(1-\xi_1)^3 \end{cases}$

Para cada um deles determine os pontos de equilíbrio e classifique-os. Esboce o plano de fase nas proximidades de cada ponto de equilíbrio.

10. Considere o sistema não-linear

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \xi_1 - \xi_1^3 + \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= 3\xi_1 - \xi_2 \end{cases}$$

(a) Encontre todos os pontos de equilíbrio do sistema.

(b) Linearize o sistema em torno de cada ponto, considere $x = \xi - \xi_e$.

(c) Para cada sistema linearizado do item anterior, encontre a solução da equação de Lyapunov P para $Q = I$ e conclua sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio.

(d) Esboce o plano de fase nas proximidades do ponto de equilíbrio estável.

(e) Discretize cada um dos sistemas linearizados para $T = 1$ [s] e encontre a solução da equação de Lyapunov P para $Q = I$ do sistema a tempo discreto obtido.

(f) Apresente as trajetórias dos sistemas a tempo contínuo e discreto nas proximidades do ponto de equilíbrio estável para $\xi(0) = [3 \;\; 7]'$.

11. Seja um sistema de ordem 3 com representação de estados dada na forma canônica controlável.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}, \quad x(0) = x_0, \tag{3}$$

Demonstre que o numerador da função de transferência depende apenas da matriz C.

12. Obtenha as funções de transferência solicitadas

a) $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; D = 1 \tag{4}$$

b) $F(s) = (C - DK)(sI - (A - BK))^{-1}B + D$, em que

$$K = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

13. Considere as seguintes solução da equação de Lyapunov

$$A_1' P_1 A_1 - P_1 + I = 0 \ \text{ e } \ A_2' P_2 + P_2 A_2 + I = 0$$

para os sistemas a tempo discreto e contínuo, respectivamente:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & 2.5 & 0.5 \\ 2.5 & 4.0 & 1.5 \\ 0.5 & 1.5 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 2.5 & 2.5 & 0.5 \\ 2.5 & 5.0 & 1.5 \\ 0.5 & 1.5 & 2.0 \end{bmatrix}$$

Conclua sobre a estabilidade de cada um dos sistemas.

14. Para o sistema não-linear

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= 2\xi_1 - \xi_1\xi_2 + 4u_N \\ \dot{\xi}_2 &= 2\xi_1\xi_2 + \xi_2 + 2u_N^2 \end{cases}$$

com u sendo uma entrada de controle:

(a) Determine ξ_{1e} e u_e de forma a estudar a estabilidade no ponto $\xi_{2e} = 1$.

(b) Linearize o sistema em relação aos pontos de equilíbrio encontrados no item anterior. Considere $x = \xi - \xi_e$ e $u = u_N - u_e$.

15. O modelo não-linear a seguir, refere-se a um sistema de suspensão magnética que consiste de uma bola de massa m, de material magnético, suspensa por um eletroímã cuja corrente i é controlada via realimentação a partir da medida óptica y da posição da bola. As variáveis de estado do sistema são $\xi_1 = y$, $\xi_2 = \dot{y}$, $\xi_3 = i$ e $u_N = v$ é a tensão aplicada no eletroímã. A indutância do eletroímã depende da posição da bola e pode ser modelada como

$$L(\xi_1) = L_1 + \frac{L_0}{1 + \xi_1/a}$$

com L_0, L_1 e a sendo escalares positivos. O modelo do sistema é dado por:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= g - \dfrac{g}{m}\xi_2 - \frac{L_0 a \xi_3^2}{2m(a+\xi_1)^2} \\ \dot{\xi}_3 &= \dfrac{1}{L(\xi_1)}\left(-R\xi_3 + \dfrac{L_0 a \xi_2 \xi_3}{(a+\xi_1)^2}\right) + u \end{cases}$$

Considere os seguintes valores numéricos $m = 0.1$ [kg], $k = 0.001$ [N/m/s], $g = 9.8$ [m/s^2], $a = 0.05$ [m], $L_0 = 0.01$ [H], $L_1 = 0.02$ [H] e $R = 0.1\ \Omega$.

(a) Encontre os valores $\xi_{3e} = i_e$ e $u_e = v_e$ que permitem equilibrar a bola em $\xi_{1e} = y_e = r > 0$.

(b) Obtenha a representação de estado do sistema linearizado em torno do ponto de operação desejado.

(c) Mostre que o ponto de equilíbrio obtido, considerando $u = u_e$ é instável.

16. Considere o sistema

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} x, \;\; x(0) = 0$$

   a) Determine $(sI - A)^{-1}$.

   a) A partir do resultado anterior, encontre e^{At} e obtenha a solução do sistema para $x_0 = [-1 \;\; 1]'$.

17. Considere a seguinte função

$$F(t) = \int_0^t G(t, \tau) d\tau$$

   Mostre que

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_0^t \frac{\partial G(t, \tau)}{\partial t} d\tau + G(t, t)$$

18. Use o resultado do exercício anterior para verificar que

$$x(t) = \Phi(t, 0)x(0) + \int_0^t \Phi(t, \tau) B u(\tau) d\tau$$

   é solução da equação dinâmica

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

19. Usando a transformada de Laplace mostre que para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seguinte igualdade é verificada:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A}{s^3} + \cdots$$

20. Mostre que para $\Gamma^{-1} A \Gamma = \Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sendo Λ uma matriz diagonal contendo os autovalores da matriz A, temos

$$e^{At} = \Gamma e^{\Lambda t} \Gamma^{-1}$$

21. Mostre que

$$\int_0^T e^{A\tau} d\tau = A^{-1} \left(e^{AT} - I \right)$$

   sempre que $\det(A) \neq 0$.

22. Utilizando o resultado anterior, mostre que se a matriz A for Hurwitz estável então $A_d = e^{AT}$ é Schur estável, qualquer que seja o período de amostragem $T > 0$.

23. Obtenha a representação em espaço de estado nas formas canônicas controlável e observável dos seguintes sistemas:

   a) $G(s) = \dfrac{s^2 + 5s + 3}{s(s^2 + 5s + 6)}$ b) $G(s) = \dfrac{s^2 + s}{s^2 + s + 10}$

24. Considere a equação diferencial

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0, \;\; y(0) = 1, \;\; \dot{y}(0) = 0$$

Determine:

(a) A solução y e a saída $\dot{y} + 2y$.

(b) A sua representação em espaço de estado.

(c) Uma representação em espaço de estado equivalente para condições iniciais nulas.