# ES401 Matemática para Engenharia

*Segunda Lista de Exercícios*

1. Para os sinais a tempo contínuo dados abaixo e definidos para todo $t \in \mathbb{R}$, verifique quais são periódicos e determine seus respectivos períodos:

   a) $f(t) = e^{j(2\pi/3)t}$

   b) $f(t) = e^{(-1+j2\pi/3)t}$

   c) $f(t) = e^{jt} + 2e^{jt/3}$

   d) $f(t) = \sum_{k=0}^{10} e^{j(\pi/2)kt}$

2. Para os sinais a tempo discreto dados abaixo e definidos para todo $k \in \mathbb{Z}$, verifique quais são periódicos e determine seus respectivos períodos:

   a) $f(n) = e^{j(2\pi/3)n}$

   b) $f(n) = e^{(-1+j2\pi/3)n}$

   c) $f(n) = e^{j\pi n} + 2e^{j\pi n/3}$

   d) $f(n) = \cos(\pi n/2) + 2\cos(5\pi n/2)$

3. Considere a série de Fourier para sinais a tempo contínuo. Prove :

   a) As propriedades de linearidade, deslocamento no tempo, deslocamento em frequência, convolução periódica e derivada.

4. Considere a série de Fourier para sinais a tempo discreto. Prove :

   a) As propriedades de linearidade, deslocamento no tempo, deslocamento em frequência e convolução periódica.

5. Considere um sinal a tempo contínuo, periódico, com período $T = 4$. Seu primeiro período é definido na forma
$$f(t) = \begin{cases} -t & , \quad -2 < t < 0 \\ t & , \quad 0 < t < 2 \end{cases}$$
   Determine os coeficientes da série de Fourier.

6. Considere um sinal a tempo contínuo, periódico, com período $T > 0$ dado. Seu primeiro período é definido na forma
$$f(t) = \begin{cases} t & , \quad |t| \leq \tau/2 \\ 0 & , \quad \tau/2 < |t| < T/2 \end{cases}$$
   com $0 < \tau \leq T$. Determine :

   a) a série de Fourier correspondente a $T = 2$ e $\tau = 1$.

   b) os gráficos de módulo e de fase dos coeficientes da série de Fourier obtida no item a).

7. Considere um sinal a tempo discreto, periódico, com período $L$ dado. Seu primeiro período é definido na forma
$$f(n) = \begin{cases} 1 & , \quad |n| \leq 7 \\ 0 & , \quad 8 \leq |n| \leq 10 \end{cases}$$
Determine :
   a) seu desenvolvimento em série de Fourier discreta.
   b) os gráficos de módulo e de fase dos coeficientes da série de Fourier obtida no item a).

8. Considere a transformada de Fourier para sinais a tempo contínuo. Prove :
   a) As propriedades de linearidade, deslocamento no tempo, deslocamento em frequência, convolução e derivada.

9. Considere a transformada de Fourier para sinais a tempo discreto. Prove :
   a) As propriedades de linearidade, deslocamento no tempo, deslocamento em frequência e convolução.

10. Um sistema dinâmico, linear e invariante no tempo tem como resposta ao impulso unitário a função
$$h(t) = (e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$$
Determine :
   a) para a entrada $g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k)$, os coeficientes da série de Fourier da saída.
   b) para a entrada $g(t) = u(t) - u(t-1)$, a série de Fourier da saída considerando que o pulso de entrada é repetido com periodicidade $T = 10$.
   c) para a entrada $g(t) = u(t) - u(t-1)$, a série de Fourier da saída considerando que o pulso de entrada é repetido com periodicidade $T = 2$.
   d) os gráficos das saídas correspondentes aos itens b) e c) para $0 \leq t \leq 10$. Compare e verifique qual deles fornece a melhor aproximação para a saída correspondente ao pulso dado.

11. Determine através do Teorema de Parseval, a energia total dos seguintes sinais a tempo contínuo, definidos para todo $t \in \mathbb{R}$ :
   a) $f(t) = e^{-t}u(t)$
   b) $f(t) = -e^{t}u(-t)$
   c) $f(t) = e^{-|t|}$

12. Considere $g(t)$ um sinal periódico com período $T > 0$ definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostre que sua transformada de Fourier é dada por
$$\hat{g}(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{T}k)$$
onde $\alpha_i$ são os coeficientes de sua série de Fourier. Aplique este resultado para determinar as transformadas de Fourier dos seguintes sinais periódicos :

a) $g(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT)$.
b) $g(t) = \text{sen}(t)$.
c) $g(t) = \cos(t)$.
d) $g(t) = \text{sen}(2t + \pi/4)$.

13. Calcule a transformada de Fourier dos seguintes sinais

a) $x(n) = (1/2)^n u(n-4)$
b) $x(n) = a^{|n|}$ , $|a| < 1$
c) $x(n) = \begin{cases} 1/2(1 + \cos(\pi n/N)) & , \quad |n| \le N \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}$
d) $x(n) = \delta(6 - 3n)$

14. Calcule a transformada de Fourier dos seguintes sinais

a) $x(t) = \text{sen}(\pi t) e^{-2t} u(t)$
b) $x(t) = e^{-3|t-2|}$
c) $x(t) = \begin{cases} 0 & , \quad |t| > 1 \\ (t+1)/2 & , \quad -1 < t < 1 \end{cases}$

15. Considere um sistema LTI causal com resposta em frequência

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}$$

Para uma certa entrada $x(t)$ a resposta do sistema é

$$y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

Determine $x(t)$.

16. Um sistema LTI com resposta ao impulso $h_1(n) = (1/3)^n u(n)$ é conectado em paralelo a outro sistema LTI causal com resposta ao impulso $h_2(n)$. O resultado da interconexão fornece a resposta em frequência

$$H(e^{j\omega}) = \frac{-12 + 5e^{-j\omega}}{12 - 7e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}$$

Determine $h_2(n)$.