ES401 Matemática para Engenharia

Primeira Lista de Exercícios

1. Para os números complexos z dados abaixo, determine seu conjugado z^*, seu módulo $|z|$, seu argumento (ou fase) ϕ em radianos e sua respectiva representação polar:

   a) $z = 1 + j$, $z = \sqrt{2} - j$ e $z = -3 + 4j$

   b) $z = (1 - j)(3 + j)$ e $z = \frac{(1+j)^3}{(-1+j)}$

   c) $z = \cos(\pi/3) - j\text{sen}(\pi/4)$

   d) $z = \sum_{k=0}^{3} \left(\frac{1+j}{2}\right)^k$

   e) $z = \sum_{k=0}^{39} \left(\frac{1+j}{2}\right)^k$

   f) $z = \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{-1+j}{2}\right)^k$

   g) $z = \sum_{k=0}^{39} k \left(\frac{-1+j}{2}\right)^k$

2. Escreva os seguintes números na forma $a + bi$

   a) $(1 + j)^{124}$, b) $(1 - j)^{245}$

3. Resolva as seguintes equações

   a) $z^5 + 9 = 0$, b) $z^4 + (1 - j)z^2 + 2(1 - j) = 0$

4. Calcule os limites

   a) $\displaystyle\lim_{z \to j} \frac{jz^2 + 3}{z + j}$, b) $\displaystyle\lim_{x+jy \to 2j} \frac{x - 2yj}{y^2}$

5. Dado $0 \leq \theta < \pi$, verifique se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ de tal forma que

$$e^{j\theta} = \frac{1 + j\alpha}{1 - j\alpha}$$

   Determine α para $\theta = \pi/2$ e $\theta = 2\pi/3$.

6. Considere a função $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{(-1+j)kt}$.

   a) Determine todos os valores de $t \in \mathbb{R}$ para os quais, a soma indicada converge

   b) Esboce a parte imaginária e a parte real de $f(t)$ para os valores de $t \in \mathbb{R}$ determinados no item anterior

   c) Determine $f(1)$

7. Decomponha $f(z)$ em frações parciais e calcule $f'(z)$.

a) $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2+4z+3}$

b) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+2z+5}$

c) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+2)(z+2)}$

8. Determine a série de Taylor das seguintes funções e, para cada caso, diga qual o raio de convergência da série.

a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-3z+2}$ em $z_0 = 0$ e $z_0 = 1.5$

b) $f(z) = \dfrac{3}{(1-z^2)}$ em $z_0 = 0$ e $z_0 = 2$

c) $f(z) = \dfrac{z}{(1+2z)^2}$ em $z_0 = 0$ e $z_0 = 1.5$

9. Escreva a série de Laurent da função $f(z)$ no ponto z_0 e no domínio indicado

a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$ em $z_0 = 0$ e no domínio $0 < |z - z_0| < 1$

b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$ em $z_0 = 0$ e no domínio $|z - z_0| > 1$

c) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-3z+2}$ em $z_0 = 0$ e no domínio $1 < |z - z_0| < 2$

d) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-3z+2}$ em $z_0 = 1$ e no domínio $|z - z_0| > 1$

10. Considere a função de variável complexa $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e a curva fechada C com sentido de percurso anti-horário. Determine, em cada caso indicado, pelo método dos resíduos, o valor da integral

$$\oint_C f(z)dz$$

a) $f(z) = \frac{(z+1)}{(z-2)}$ e $C = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-3| = 2\}$

b) $f(z) = \frac{(z+1)}{(z-2)^2(z-4)}$ e $C = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-3| = 2\}$

c) $f(z) = \frac{(z+1)^2}{(z-2)^2(z-4)}$ e $C = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-1| = 2\}$

d) $f(z) = \frac{(z-1)^2}{z^2(z+1)}$ e $C = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 2\}$

e) $f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z}$ e $C = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$

f) $f(z) = \frac{1+e^{-z}}{z}$ e $C = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$

g) $f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z^2}$ e $C = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$

11. Considerando o círculo $|z| = 3$ no sentido positivo, determine para

$$f(z_0) = \int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - z_0} \quad , \quad |z_0| \neq 3$$

a) $f(2)$, b) $f(i)$, c) $f(5)$