



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Relatório do Trabalho de Graduação II

Período : 01/08/2018 a 23/11/2018

**Controle com comutação \mathcal{H}_2 de uma suspensão ativa
automotiva com incertezas paramétricas**

Aluno: Xavier Le Gallic

Orientadora: Profa. Dra. Grace S. Deaecto

21 de novembro de 2018

1 Introdução

Nas últimas duas décadas a indústria automotiva tem investido de maneira intensa no desenvolvimento de sistemas de controle tendo como base dois objetivos principais, a saber, reduzir o número de acidentes através da melhoria da segurança veicular, e proporcionar maior conforto aos passageiros. Assim, dentre os principais dispositivos do veículo, a suspensão é uma das mais importantes. Segundo [1] este dispositivo desempenha três funções básicas:

- Isolar o chassi do veículo dos distúrbios provenientes do solo, de modo a prover conforto aos passageiros durante o trajeto. Neste caso, o conforto do percurso pode ser quantificado pela aceleração vertical do chassi. Uma suspensão é bem projetada ou controlada, quando proporciona o isolamento por redução das forças vibratórias transmitidas a partir do solo para o chassi do veículo.
- Manter o veículo estável em terrenos de superfícies irregulares. O desempenho do automóvel nestas condições pode ser caracterizado em termos da sua capacidade em realizar curvas, frenagens e tração. Esta capacidade é aperfeiçoada pela minimização das variações de cargas normais sobre os pneus, visto que as forças laterais e longitudinais geradas nos pneus dependem diretamente dos carregamentos normais sobre os mesmos.
- Prover boa dirigibilidade do veículo. As acelerações angulares do automóvel durante curva, frenagem e tração são medidas de dirigibilidade do veículo. O sistema de suspensão deverá garantir que estas acelerações sejam minimizadas.

Existem basicamente três configurações de suspensão, a saber, passiva, ativa e semi-ativa. Na primeira configuração, que é a mais comum nos veículos convencionais, os deslocamentos das rodas e do chassi são determinados pela superfície da via na qual o veículo transita, ou seja, neste caso o controle é realizado alterando a dinâmica do sistema pela adição de dispositivos passivos como amortecedores, massa e mola [2]. As desvantagens desta configuração é que o funcionamento é extremamente limitado a um conjunto reduzido de frequências e não pode ser modificado em tempo real [3]. A configuração ativa possibilita controlar os deslocamentos verticais das rodas pela presença de atuadores, pois utiliza sensores que identificam a superfície da via e os deslocamentos que devem ser aplicados pelo sistema para o controle da suspensão do veículo. Deste modo, os atuadores suspendem ou descendem o chassi de maneira independente para cada uma das rodas diminuindo o impacto no interior do automóvel. Assim, corrigindo os deslocamentos de acordo com as imperfeições da via, o controle isola as vibrações, melhora a dirigibilidade, aceleração e a frenagem do veículo [4], [5] e [6]. Isso porque além de permitir a dissipação de energia, como o sistema passivo, o ativo possui a capacidade de injetar energia no sistema, veja [3]. Entretanto, esta configuração é muito suscetível à falha devido à necessidade de energia externa e, além disso, apresenta um custo elevado de manutenção e implantação em virtude da complexidade do sistema [3] e [7]. A suspensão semi-ativa tem como característica comum à passiva o fato de que ambas apenas dissipam energia, a diferença é que a primeira produz uma força controlada em tempo real com o sentido oposto à velocidade entre o chassi e a roda. Sendo assim, o sistema semi-ativo age de forma passiva ajustando o fator de amortecimento ao longo do tempo para excitações que podem variar de forma lenta ou rápida o que resulta em uma lei de controle ao longo do tempo [3]. A vantagem deste amortecimento variável é o tempo de reação, que segundo [3] é da ordem de dez milissegundos, e o baixo consumo de energia [8].

Neste trabalho, nosso objetivo principal é o projeto de uma suspensão ativa de um quarto de veículo, apresentado na Figura 1, visando melhorar o conforto do passageiro e respeitando os limites físicos de projeto. Consideramos que a suspensão apresenta incertezas paramétricas politópicas que podem ser variantes no tempo e, desta forma, projetamos controladores com comutação \mathcal{H}_2 via realimentação de estado de forma a assegurar estabilidade e desempenho adequado para a suspensão, que foi modelada como um sistema LPV¹. Validamos o projeto experimentalmente através da implementação do controle na estação de trabalho *Active Suspension Plant* cuja fabricante é a empresa Quanser. Tanto no projeto quanto na validação consideramos incertezas na massa do chassi, o que ocorre naturalmente devido à variação de carga pelo transporte de passageiro ou pelo consumo do combustível. A descrição detalhada desta estação está apresentada em [9].

¹do inglês Linear Parameter Varying

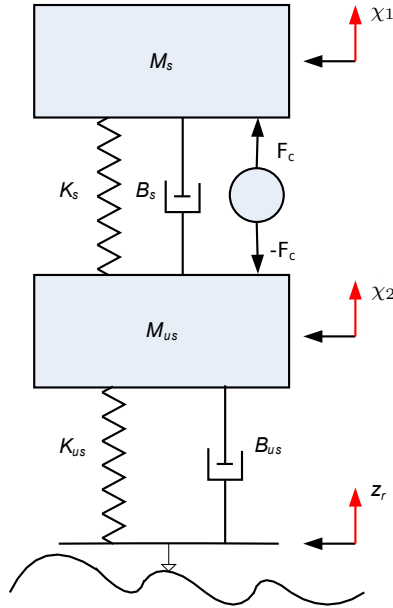


Figura 1: Modelo de um quarto de veículo, [9].

2 Conceitos fundamentais

Antes de apresentar os resultados relacionados ao controle ativo da suspensão, alguns conceitos importantes sobre sistemas dinâmicos são apresentados, veja [10].

2.1 Sistemas lineares invariantes no tempo

Considere o sistema linear invariante no tempo (LIT) representado pela seguinte realização em espaço de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Hw(t), \quad x(0) = 0 \quad (1)$$

$$z(t) = Ex(t) + Gw(t) \quad (2)$$

em que $t \geq 0$, $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estado, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é o vetor de entrada externa e $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída controlada. As matrizes (A, H, E, G) apresentam dimensões compatíveis. A função de transferência entre a entrada externa w e a saída controlada z é dada por:

$$H_{wz}(s) = E(sI - A)^{-1}H + G \quad (3)$$

O sistema é estritamente próprio se $G = 0$, caso contrário é definido como apenas próprio.

2.2 Estabilidade

O objetivo desta seção é apresentar o conceito de estabilidade segundo os critérios de Lyapunov para sistema LIT a tempo contínuo. Entretanto, antes é importante definir o conceito de ponto de equilíbrio, que será apresentado a seguir

Definição 1. (*Ponto de Equilíbrio*) O ponto $x_e \in \mathbb{R}^{n_x}$ é um ponto de equilíbrio do sistema se $x(t_e) = x_e$ então $x(t) = x_e$ para todo $t \geq t_e$.

Para o caso de um sistema LIT se a matriz A for não singular então $x_e = 0$ é o seu único ponto de equilíbrio, [11]. Além disso, como apresentado em [12] o sistema LIT é assintoticamente estável se, e somente se, a matriz A for Hurwitz estável, ou seja, possuir todos os autovalores no semi-plano esquerdo do plano complexo (parte real negativa). Entretanto, uma maneira alternativa e mais geral de se avaliar

estabilidade de um sistema é através do critério de Lyapunov. Este critério define uma função $v(x)$ que pode ser interpretada como a distância de um ponto genérico x em relação ao ponto de equilíbrio x_e ou como a energia de um sistema mecânico (ou elétrico) que, se dissipada continuamente, conduz o sistema dinâmico ao equilíbrio [11]. Qualquer $v(x)$ pode ser definida como uma função de Lyapunov desde que apresente as seguintes propriedades [12]:

Definição 2. A função de Lyapunov $v(x)$ deve garantir as seguintes propriedades

1. $v(x) > 0$ para $x \neq x_e$ e $v(x) = 0$ para $x = x_e$;
2. $v(x)$ é contínua e diferenciável em relação a todas as componentes de $x \in \mathbb{R}^{n_x}$;
3. $\dot{v}(x) \leq 0$ é decrescente para todo $x \neq x_e$.

Neste trabalho o interesse é garantir que o sistema seja assintoticamente estável. Para que isso seja possível deve-se restringir $v(x)$ à funções que sejam estritamente decrescentes, ou seja, $\dot{v}(x) < 0$. Além disso, para que a estabilidade seja global, acrescenta-se a condição de que $v(x)$ é ilimitada para $\|x\|$ ilimitado. O próximo teorema garante estabilidade assintótica global para um sistema dinâmico baseado no critério de Lyapunov [11] e [12].

Teorema 1. (Teorema de Lyapunov) Considere o sistema dinâmico a tempo contínuo (1) com entrada nula $w(t) = 0$, $\forall t \geq 0$. O sistema é assintoticamente globalmente estável, se existir uma função de Lyapunov $v(x) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}_+$, ilimitada para $\|x\|$ ilimitado e que satisfaz $\dot{v}(x) < 0$.

Para o caso de um sistema LIT uma escolha conveniente é a função quadrática de Lyapunov, dada por

$$v(x) = x'Px \quad (4)$$

em que $P > 0$, portanto, atende aos dois primeiros itens da Definição 2 e, além disso, é ilimitada para $\|x\|$ ilimitado. A derivada da função $v(x)$ é

$$\dot{v}(x) = x'(A'P + PA)x \quad (5)$$

Impondo $A'P + PA < 0$ tem-se que $\dot{v}(x) < 0$ para $x \neq 0$ e, portanto, as condições do Teorema 1 são satisfeitas garantindo que $x_e = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Na verdade, dada uma matriz simétrica $Q > 0$ se existir uma matriz $P > 0$ solução da equação de Lyapunov

$$A'P + PA = -Q \quad (6)$$

então o sistema $\dot{x} = Ax$ é globalmente assintoticamente estável. Como provado em [12] esta condição é, na verdade, necessária e suficiente para estabilidade de sistemas LIT.

2.3 Índices de desempenho

Vamos agora estudar a norma \mathcal{H}_2 que é um dos critérios de desempenho mais utilizados para analisar a qualidade de projetos em sistemas de controle [13]. Antes porém, vamos apresentar o Teorema de Parseval, que é uma ferramenta matemática muito importante pois permite estabelecer uma relação direta entre integrais de funções no domínio do tempo e no domínio da frequência, veja [13], [14].

Teorema 2. (Teorema de Parseval) Considere uma função $f(t) : t \geq 0 \rightarrow \mathbb{R}$ e a sua transformada de Laplace $F(s) : s \in \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\int_0^\infty f(t)'f(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty F(-j\omega)'F(j\omega)d\omega \quad (7)$$

2.3.1 Norma \mathcal{H}_2

A norma \mathcal{H}_2 é definida para sistemas assintoticamente estáveis, estritamente próprios, e pode ser expressa tanto no domínio do tempo como no da frequência segundo as definições a seguir :

$$\|H_{wz}(s)\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \text{Tr}(H_{wz}(-j\omega)'H_{wz}(j\omega))d\omega \right)^{1/2} \quad (8)$$

$$\|H_{wz}(s)\|_2 = \left(\int_0^\infty \text{Tr}(h_{wz}(t)'h_{wz}(t))dt \right)^{1/2} \quad (9)$$

Como discutido em [10], se o sistema não for estritamente próprio, ou seja $G \neq 0$, a integral indicada em (9) diverge. Para sistemas LIT a norma \mathcal{H}_2 pode ser calculada através de gramianos

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \{\text{Tr}(H'P_oH) : A'P_o + P_oA + E'E = 0\} \quad (10)$$

em que

$$P_o = \int_0^\infty e^{A't} E' E e^{At} dt$$

é chamado de gramiano de observabilidade ou, alternativamente, através de

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \{\text{Tr}(EP_cE') : AP_c + P_cA' + HH' = 0\} \quad (11)$$

em que

$$P_c = \int_0^\infty e^{At} HH' e^{A't} dt$$

é chamado de gramiano de controlabilidade. De forma a permitir generalização para tratar problemas mais complexos de projeto de controle, podemos também descrever o seu cálculo como a solução de um problema de otimização convexa descrito em termos de Desigualdades Matriciais Lineares² como apresentado a seguir

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \inf_{P>0} \{\text{Tr}(H'PH) : A'P + PA + E'E < 0\} \quad (12)$$

veja [13, 15] para maiores detalhes.

3 Suspensão ativa Quanser

3.1 Equações principais

Vamos agora analisar a suspensão ativa que vai ser controlada durante a segunda parte desse trabalho de graduação. Essa suspensão é composta de dois conjuntos: o primeiro, localizado entre o chão e o pneu, é formado por um amortecedor com coeficiente de amortecimento B_{us} , uma massa M_{us} representando o pneu e uma mola com coeficiente de rigidez K_{us} . O segundo conjunto, localizado entre o pneu e o chassi, é formado por um amortecedor com coeficiente de amortecimento B_s , uma mola com coeficiente de rigidez K_s e a massa do chassi M_s . Ambos os conjuntos podem ser observados com maiores detalhes na Figura 1 que também apresenta a força F_c que será projetada de forma a controlar a suspensão. Podemos observar nesta figura que uma análise mecânica permite relacionar os diferentes deslocamentos, dependendo do perfil da pista (chamado z_r) e das constantes $K_s, M_s, B_s, K_{us}, M_{us}$ e B_{us} , cujos valores foram extraídos de [9] e são apresentados na Tabela 2 :

variável	valor	unidade
M_{us}	1	kg
M_s	2.45	kg
K_{us}	1250	N/m
K_s	900	N/m
B_{us}	5	N s /m
B_s	7.5	N s /m

Tabela 1: Dados utilizados para as simulações

Aplicando as leis de Newton nos dois conjuntos temos

$$M_s \ddot{\chi}_1 = -gM_s + F_c - B_s(\dot{\chi}_1 - \dot{\chi}_2) - K_s(\chi_1 - \chi_2) \quad (13)$$

$$M_{us} \ddot{\chi}_2 = -gM_{us} - F_c - B_s(\dot{\chi}_2 - \dot{\chi}_1) - K_s(\chi_2 - \chi_1) + K_{us}(z_r - \chi_2) + B_{us}(\dot{z}_r - \dot{\chi}_2) \quad (14)$$

²do inglês Linear Matrix Inequalities

Isolando as derivadas segundas $\ddot{\chi}_2$ e $\ddot{\chi}_1$, obtém-se :

$$\ddot{\chi}_1 = -g + \frac{F_c - B_s(\dot{\chi}_1 - \dot{\chi}_2) - K_s(\chi_1 - \chi_2)}{M_s} \quad (15)$$

$$\ddot{\chi}_2 = -g + \frac{-F_c - B_s(\dot{\chi}_2 - \dot{\chi}_1) - K_s(\chi_2 - \chi_1) + K_{us}(z_r - \chi_2) + B_{us}(\dot{z}_r - \dot{\chi}_2)}{M_{us}} \quad (16)$$

Considerando $z_r = 0$, os pontos de equilíbrio para os quais as derivadas primeiras e segundas de χ_1 e χ_2 são nulas são dados a seguir:

$$\chi_{2eq} = -\frac{g(M_{us} + M_s)}{K_{us}} \quad (17)$$

$$\chi_{1eq} = -\frac{gM_s}{K_s} - \frac{g(M_{us} + M_s)}{K_{us}} \quad (18)$$

Através de uma mudança de variáveis $z_{us} = \chi_2 - \chi_{2eq}$ e $z_s = \chi_1 - \chi_{1eq}$, as equações (15) e (16) podem ser simplificadas obtendo-se

$$\ddot{z}_s = \frac{F_c - B_s(\dot{z}_s - \dot{z}_{us}) - K_s(z_s - z_{us})}{M_s} \quad (19)$$

$$\ddot{z}_{us} = \frac{-F_c - B_s(\dot{z}_{us} - \dot{z}_s) - K_s(z_{us} - z_s) + K_{us}(z_r - z_{us}) + B_{us}(\dot{z}_r - \dot{z}_{us})}{M_{us}} \quad (20)$$

Escolhendo as variáveis de estado como sendo $x = [z_s - z_{us} \quad \dot{z}_s \quad z_{us} - z_r \quad \dot{z}_{us}]^T$, considerando $w = \dot{z}_r$ como a entrada de perturbação e $u = F_c$ como a entrada de controle, obtemos o seguinte modelo em espaço de estado:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Hw \quad (21)$$

sendo as matrizes dadas por :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{K_s}{M_s} & -\frac{B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_s}{M_{us}} & \frac{B_s}{M_{us}} & -\frac{K_{us}}{M_{us}} & -\frac{(B_s + B_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{M_s}{M_{us}} \\ -1 \\ \frac{M_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{B_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix} \quad (22)$$

A matriz A representa a evolução espontânea das variáveis de estado, a matriz B a influência do esforço de controle e a matriz H a influência do perfil da pista (entrada externa) sobre as variáveis de estado. A saída de interesse (a grandeza que queremos estudar) é a aceleração sob a qual os passageiros do veículo estão sujeitos, ou seja, \ddot{z}_s :

$$y = Cx + Dw \quad (23)$$

sendo as matrizes :

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{K_s}{M_s} & -\frac{B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \end{bmatrix}, \quad D = \frac{1}{M_s} \quad (24)$$

A seguir vamos apresentar várias simulações que levam em conta diferentes escolhas para as matrizes (E, F) da saída controlada z definindo, assim, diferentes objetivos de desempenho, e o efeito destas escolhas sobre a resposta do sistema.

3.2 Controle \mathcal{H}_2

Uma vez que as equações do sistema foram obtidas, nosso objetivo é projetar uma lei de controle u que minimize a norma \mathcal{H}_2 do sistema apresentando a seguinte estrutura

$$F_c = u = Kx \quad (25)$$

Neste caso, o sistema em malha fechada torna-se

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BK)x + Hw \\ z = (E + FK)x \\ y = Cx + Dw \end{cases} \quad (26)$$

A norma \mathcal{H}_2 do sistema acima descrito é dada por :

$$\begin{cases} \|H_{wz}(s)\|_2^2 = \inf_{P>0} \text{Tr}(H'PH) \\ (A+BK)'P + P(A+BK) + (E+FK)'(E+FK) < 0 \end{cases} \quad (27)$$

Observa-se que o problema é não convexo devido ao produto de variáveis matriciais, como por exemplo, $K'B'P$ e $K'F'FK$. Aplicando o complemento de Schur obtém-se :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} (A+BK)'P + P(A+BK) & \bullet \\ E+FK & -I \end{bmatrix} < 0 \\ P > 0 \end{cases} \quad (28)$$

Definindo as novas variáveis $P^{-1} = S$, $Y = KS$, e multiplicando a primeira desigualdade de ambos os lados pela seguinte matriz definida positiva :

$$\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (29)$$

obtém-se

$$\begin{cases} \|H_{wz}(s)\|_2^2 = \inf_{S>0, Y, W} \text{Tr}(W) \\ \begin{bmatrix} SA' + Y'B' + AS + BY & \bullet \\ ES + FY & -I \end{bmatrix} < 0 \\ W > H'S^{-1}H \end{cases} \quad (30)$$

O que resulta finalmente no problema de otimização convexo

$$\begin{cases} \|H_{wz}(s)\|_2^2 = \inf_{S>0, Y, W} \text{Tr}(W) \\ \begin{bmatrix} SA' + Y'B' + AS + BY & \bullet \\ ES + FY & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} W & \bullet \\ H & S \end{bmatrix} > 0 \end{cases} \quad (31)$$

obtido após aplicar o complemento de Schur na segunda desigualdade de (30). Resolvendo essas LMIs, obtém-se as variáveis matriciais Y , S e W que minimizam a norma \mathcal{H}_2 do sistema. O valor de K desejado para controlar o sistema é dado por $K = YS^{-1}$.

3.3 Simulações para o projeto de controle \mathcal{H}_2

Para analisar o desempenho do projeto de um controlador \mathcal{H}_2 para a suspensão, aplicamos um sinal de onda quadrada de 0.02 [m] de amplitude e de frequência 1/3 [Hz] no perfil da estrada z_r e analisamos a resposta do sistema levando em conta as evoluções de três variáveis de estado de interesse: a aceleração no chassi do carro \ddot{z}_s que nos fornece um indicativo do nível de conforto do passageiro, $z_s - z_r$ para analisar o efeito do transitório provocado pela perturbação aplicada no chassi e o esforço de controle u para verificar que as limitações físicas do equipamento são de fato respeitadas. Neste caso o esforço de controle não pode ultrapassar o valor de 39.2 [N], permitindo assim a sua implementação prática. Também podemos observar a evolução de z_s e de z_{us} .

A Figura 2, apresenta as evoluções das trajetórias das variáveis de interesse em malha aberta. Para implementar a entrada \dot{z}_r a onda quadrada é derivada através da seguinte função de transferência :

$$\frac{s}{0.001s + 1}$$

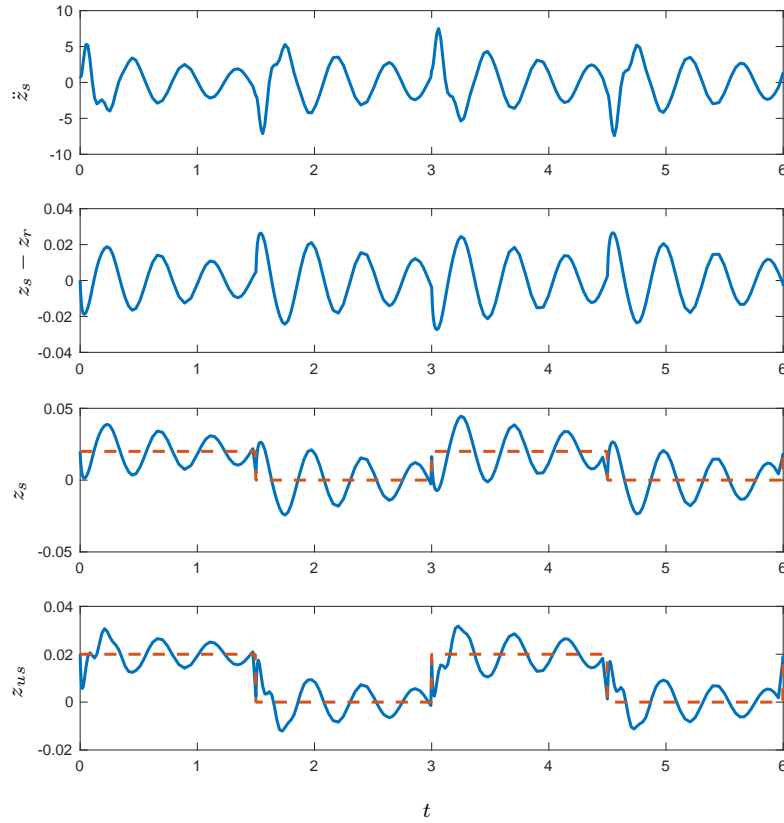


Figura 2: Evolução das variáveis estudadas em malha aberta

Observamos uma aceleração razoavelmente alta, um tempo de estabilização maior do que 1.5 [s] (aproximadamente de 7 [s] se considerarmos uma onda quadrada de frequência inferior) e oscilações de grande amplitude durante o transitório. O objetivo é projetar um controlador que minimiza a aceleração, os tempos de estabilização e as oscilações, melhorando assim o desempenho do sistema.

3.3.1 Otimizando o deslocamento relativo $z_s - z_r$

Levando em conta os resultados obtidos anteriormente, nosso objetivo é obter um controlador K que minimiza o tempo de estabilização do sistema. Neste sentido, adotamos as seguintes matrizes para a saída de desempenho:

$$E = [1 \ 0 \ 1 \ 0], F = 0 \quad (32)$$

obtendo como solução do problema (31), um desempenho de $\|H_{wz}(s)\|_2 = 0.0608$ e o ganho matricial apresentado a seguir:

$$K = [-573210 \ -170 \ -571390 \ 70]$$

As figuras seguintes apresentam as respostas obtidas.

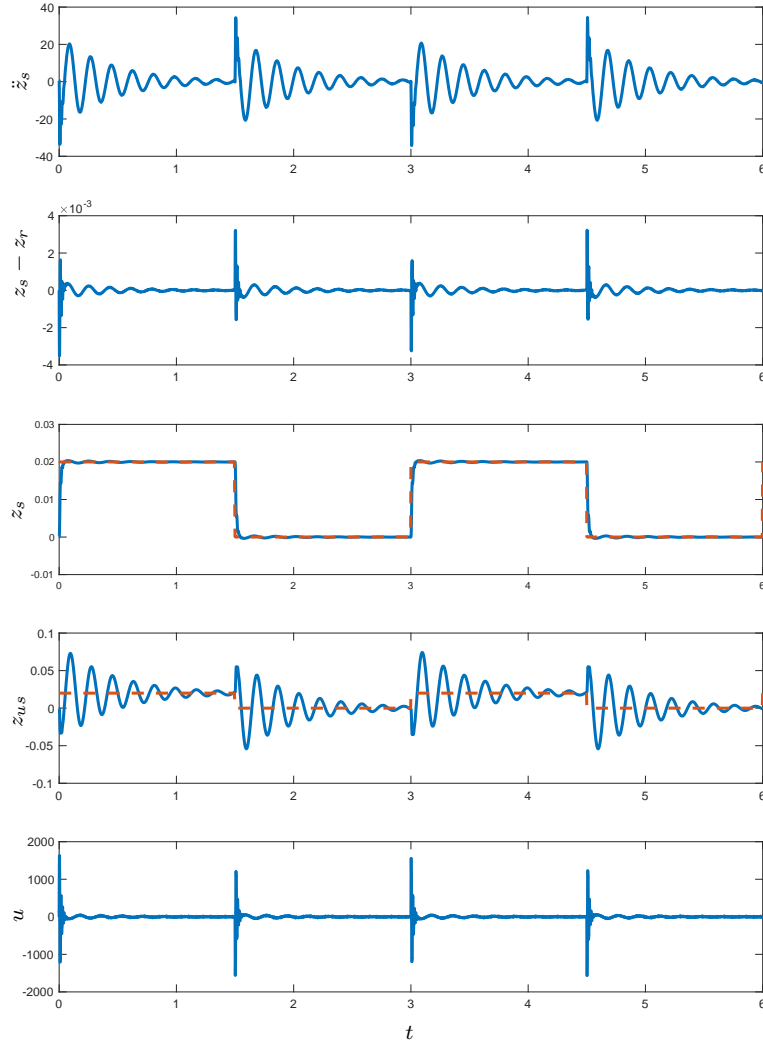


Figura 3: Evolução das variáveis estudadas para o controlador otimizando o deslocamento relativo

Podemos observar que embora os tempos de estabilização foram consideravelmente reduzidos, a aceleração ficou excessivamente elevada, da ordem de $35[m/s^2]$, o que é impraticável uma vez que este valor indica um desconforto excessivo ao passageiro. Além disso, esta estratégia não pode ser implementada uma vez que o esforço de controle ultrapassou o valor limite permitido. Logo, um novo projeto deve ser realizado levando em conta (como sempre na área de controle) um compromisso entre o conforto dentro do carro, e o tempo de estabilização.

3.3.2 Compromisso entre os diferentes objetivos

Como mencionado na subseção anterior, o controlador deve levar em conta um compromisso entre diferentes objetivos de interesse, respeitando as restrições físicas do equipamento. Desta forma, consideramos a saída controlada z com as seguintes matrizes

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.001 \end{bmatrix} \quad (33)$$

as quais foram utilizadas no algoritmo de cálculo da norma \mathcal{H}_2 resultando em um desempenho de $\|H_{wz}(s)\|_2 = 0.3108$ e no seguinte ganho de realimentação de estado :

$$K = [-445.4609 \quad -53.0620 \quad -472.5021 \quad -9.4952]$$

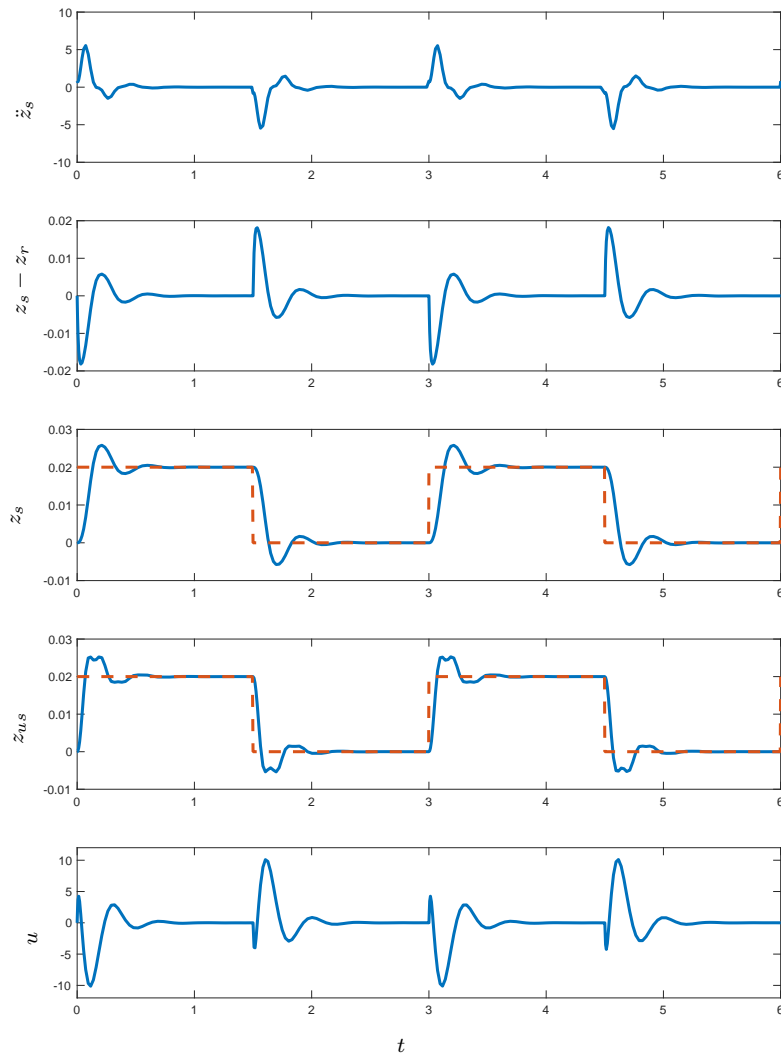


Figura 4: Evolução das variáveis estudadas para o controlador satisfatório

Podemos observar que, de fato, a aceleração ficou dentro de valores aceitáveis. A resposta apresentou um tempo de estabilização de 0.6 [s] e sem oscilações, indicando um regime transitório bastante adequado. Além disso, o esforço de controle obtido teve seu valor de pico bem abaixo do limite especificado no projeto. Assim, com esse controlador forneceu resultados bastante satisfatórios.

4 Sistemas com comutação

Até o presente momento nossa abordagem limitou-se aos sistemas SLIT (Sistemas Lineares Invariantes no Tempo). Nesta seção, nosso objetivo é mais abrangente pois trataremos o caso em que os sistemas apresentam incertezas que não podem ser medidas e/ou estimadas. Para este caso a ideia é determinar um controle com comutação que, segundo a literatura atual, representa uma excelente estratégia para tratar esta classe de problemas, [13], [16]. A seguir apresentamos um breve estudo sobre os aspectos mais importante de sistemas com comutação.

4.1 Introdução aos sistemas com comutação

Segundo a referência [17], um sistema linear contínuo com comutação é descrito da seguinte forma :

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) \quad x(0) = x_0 \quad (34)$$

definido para todo $t \geq 0$, no qual $x(t)$ é o vetor de estado, $\sigma(t)$ é a regra de comutação e x_0 é a condição inicial.

Neste caso, considera-se um conjunto matrizes constantes, as quais são conhecidas : $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ e sem nenhuma hipótese sobre a sua estabilidade. A regra de comutação $\sigma(t)$ seleciona a cada instante de tempo qual subsistema deve ser ativado dentre os N disponíveis. Assim, para todo $t \geq 0$ existe um único $i \in \{1, \dots, N\}$ tal que $A_{\sigma(t)} = A_i$.

Portanto, o objetivo é projetar uma função $\sigma(x) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ a fim de garantir que a origem $x = 0$ do sistema (34) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Isso equivale a saber qual matriz A_i utilizar a cada momento de maneira a assegurar a estabilidade do sistema global.

Para o objetivo proposto, utilizaremos uma subclasse específica das matrizes de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}$ definida como :

$$\pi_{ij} \geq 0 \text{ se } i \neq j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^N \pi_{ji} = 0 \quad \text{para } (i, j) \in \{1, 2, \dots, N\}^2 \quad (35)$$

O lema a seguir apresenta as condições de estabilidade para o sistema (34).

Lemma 1. ([17]) *Se existirem uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}$ e um conjunto de matrizes $\{P_1, \dots, P_N\}$ definidas positivas satisfazendo as seguintes desigualdades de Lyapunov-Metzler :*

$$A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j < 0, \quad i \in \{1, \dots, N\} \quad (36)$$

então a função de comutação dependente do estado :

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \{1, \dots, N\}} x^T P_i x \quad (37)$$

faz com que a origem $x = 0$ do sistema (34) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

A prova deste lema está disponível em [17]. Como apresentado nesta referência, podemos assegurar um custo garantido de desempenho, resolvendo-se o seguinte problema de otimização

$$\min_{i \in \{1, \dots, N\}} x_0^T P_i x_0 \quad (38)$$

sujeito a

$$A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j + Q_i < 0, \quad i \in \{1, \dots, N\} \quad (39)$$

sendo Q_i matrizes semi definidas positivas dadas.

4.2 Exemplo ilustrativo

Considere o sistema (34), definido pelas seguintes matrizes dinâmicas

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}; \quad (40)$$

Resolvemos as condições do Lema 1 com $Q_i = I$ para $i \in \{1, \dots, N\}$, mas considerando o problema de otimização

$$\inf_{P_i > 0, \rho > 0} \rho \quad (41)$$

sujeito às condições (39) e com as desigualdades adicionais

$$\rho I > P_i, \quad i \in \{1, \dots, N\} \quad (42)$$

Note que esta função objetivo é, na verdade, um limitante superior de (38) uma vez que $x_0'P_i x_0 < \rho x_0'x_0$. Realizamos uma busca exaustiva com relação aos parâmetros da matriz de Metzler

$$\Pi = \begin{bmatrix} -p & q \\ p & -q \end{bmatrix} \quad (43)$$

considerando o intervalo $p \in [60, 80]$ e $q \in [100, 120]$. A solução ótima obtida foi de $\rho^* = 1.0745$ correspondente a $(p^*, q^*) = (70.7, 120)$ e as matrizes

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.0304 & 0 \\ 0 & 1.0741 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1.0745 & 0 \\ 0 & 0.9992 \end{bmatrix} \quad (44)$$

que foram usadas para a implementação da regra de comutação. A Figura 5 apresenta a variação de ρ em função de p e q .

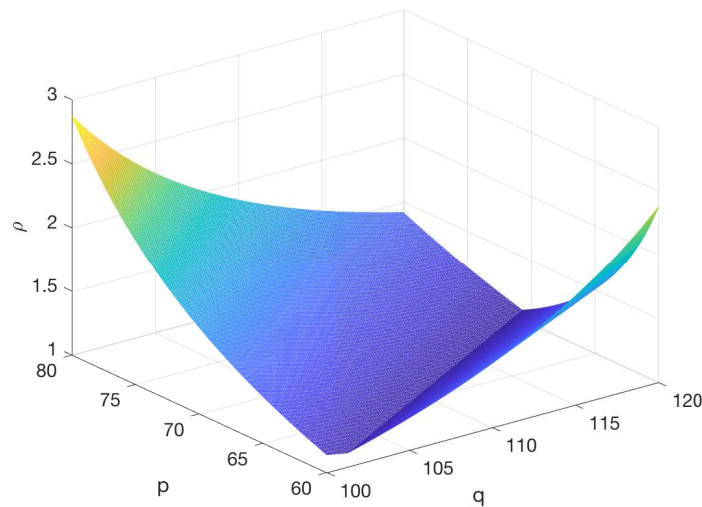


Figura 5: Variação de ρ em função de p e q

A Figura 6 apresenta o plano de fase de x_1 e x_2 , para diferentes condições iniciais, utilizando as matrizes P_1 e P_2 e a regra de comutação obtidas através da resolução do Lema 1.

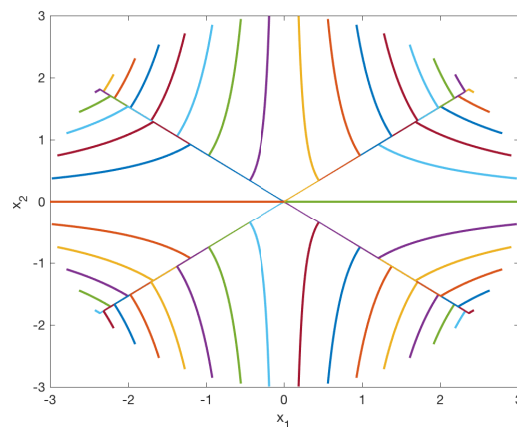


Figura 6: Plano de fase (x_1, x_2) para diferentes condições iniciais

Independente das condições iniciais as trajetórias convergem assintoticamente para a origem $(0,0)$.

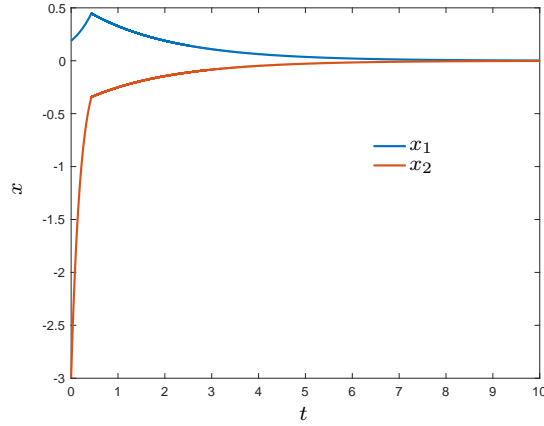


Figura 7: Evolução de x_1 e x_2 ao longo do tempo

A Figura 7 apresenta a evolução temporal de x_1 e x_2 para a condição inicial $(x_1(0), x_2(0)) = (0.19, -3.00)$ onde podemos observar que embora as matrizes A_1 e A_2 sejam instáveis a regra de comutação conduziu eficientemente as trajetórias do sistema para a origem.

5 Controle com comutação de um sistema LPV

5.1 Introdução

Nesta seção, nosso objetivo é tratar de sistemas que possuem como particularidade importante incertezas que são variantes no tempo. Para este caso os resultados obtidos para matrizes constantes podem ser mostrar ineficientes. Portanto, o novo objetivo é controlar o sistema considerando tais variações, o que pode ser tratado via controle LPV cujos conceitos teóricos estão apresentados em [18] e serão reproduzidos aqui por conveniência. Considere o seguinte sistema linear com parâmetros variantes no tempo

$$\dot{x}(t) = A_{\lambda(t)}x(t) + B_{\lambda(t)}u \quad x(0) = x_0 \quad (45)$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estado, e $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle. A cada instante de tempo, as matrizes $A_{\lambda(t)}$ e $B_{\lambda(t)}$ são combinações convexas de dois conjuntos de matrizes constantes $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ e $\{B_1, B_2, \dots, B_N\}$, a saber:

$$(A_{\lambda(t)}, B_{\lambda(t)}) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(t)(A_j, B_j) \quad (46)$$

com o vetor $[\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)]' \in \Lambda$ em que Λ é o simplex unitário definido como segue :

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1 \right\} \quad (47)$$

Considerando a lei de controle $u = K_{\lambda(t)}x(t)$ o objetivo é determinar o ganho $K_{\lambda(t)}$ para que o sistema em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (A_{\lambda(t)} + B_{\lambda(t)}K_{\lambda(t)})x(t) \quad (48)$$

seja globalmente assintoticamente estável. O lema a seguir retirado de [19] apresenta uma lei de controle estabilizante para o problema.

Lemma 2. *Se existirem uma matriz positiva definida $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $S_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e matrizes $Y_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ tais que :*

$$A_j X + B_j Y_j + X A_j' + Y_j' B_j' + S_j - S_i < 0, \quad (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2 \quad (49)$$

Então o ganho $K_{\lambda(t)} = Y_{\lambda(t)}X^{-1}$ faz que o sistema em malha fechada seja globalmente assintoticamente estável.

Note que utilizando este lema, para se obter o ganho de controle é necessário conhecer o vetor $[\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)]'$ em todo o instante de tempo, o que diminui consideravelmente o raio de aplicabilidade desse método.

Assim, uma proposta para contornar este problema é projetar uma lei de controle com comutação da forma $u(t) = K_{\sigma(x(t))}x(t)$, como já realizado na literatura [20], [18] e [21]. O sistema a ser tratado é a Suspensão ativa Quanser que apresenta a seguinte representação de estado :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{\lambda(t)}x + B_{\lambda(t)}u + Hw \\ z = E_{\lambda(t)}x + F_{\lambda(t)}u \\ u = K_{\sigma(x)}x \end{cases} \quad (50)$$

em que $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ é uma entrada do tipo impulsiva $w(t) = \delta(t)e_k$, sendo e_k a k -ésima coluna da matriz identidade. O objetivo é determinar N ganhos de realimentação de estado $\{K_1, \dots, K_N\}$ e a lei de comutação $\sigma(x) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \{1, \dots, N\}$ de forma a assegurar estabilidade e minimizar um limitante superior do índice de desempenho \mathcal{H}_2

$$J_2(K_1, \dots, K_N, \sigma) = \max_{\lambda(t) \in \Lambda} \sum_{k=1}^{n_w} \|z_k(t)\|_2^2 \quad (51)$$

em que $z_k(t)$ é reposta do sistema a um impulso aplicado no k -ésimo canal. O artigo [18] apresenta o seguinte resultado para tratar o problema proposto :

Lemma 3. *Se existirem um conjunto de matrizes simétricas definidas positivas X_i , um conjunto de matrizes Y_i e escalares positivos γ_i satisfazendo :*

$$\begin{bmatrix} A_j X_i + X_i A_j' + B_j Y_i + Y_i' B_j' - \gamma_i X_i & \bullet & \bullet \\ E_i X_i + F_i Y_i & -I & \bullet \\ \gamma_i X_i & 0 & -\gamma_i X_j \end{bmatrix} < 0, \quad (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2 \quad (52)$$

então os ganhos $K_i = Y_i X_i^{-1}$ e a função de comutação :

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \{1, \dots, N\}} x' X_i^{-1} x \quad (53)$$

fazem o ponto de equilíbrio $x = 0$ globalmente assintoticamente estável, e asseguram o seguinte custo garantido

$$J_2(K_1, K_2, \dots, K_N, \sigma) < \min_{i \in \{1, \dots, N\}} \text{Tr}(H' X_i^{-1} H), \quad (54)$$

de desempenho.

A prova deste lema está disponível em [18]. Podemos notar que a desigualdade matricial (52) não é uma LMI devido ao produto entre as diferentes variáveis γ_i e X_i . Assim para obter os resultados desejados devemos realizar busca exaustiva com relação aos valores de γ_i e resolver um conjunto de LMIs de forma a obter as matrizes $\{K_1, \dots, K_N\}$ e o custo garantido associado.

5.2 Controle LPV da suspensão Quanser

No caso da suspensão Quanser vamos considerar incertezas na massa do chassi cujo valor pode variar do valor nominal fornecido pelo fabricante. Esta consideração simula a situação realista de variação de massa devido ao transporte de passageiro ou devido ao consumo de combustível. Note entretanto, que no modelo dinâmico da suspensão apresentado em (22), a massa do chassi sempre aparece no denominador e, portanto, consideramos como parâmetro incerto a variação linear entre $1/M_{s1}$ e $1/M_{s2}$ em que $M_{s1} = 2.45$ [kg] e $M_{s2} = 1.455$ [kg]. Isto equivale a dizer que a variação da massa M_s em relação aos parâmetros incertos $\lambda(t) \in \Lambda$ segue o seguinte comportamento não linear

$$M_s(\lambda(t)) = \frac{M_{s1} M_{s2}}{\lambda_1(t) M_{s2} + \lambda_2(t) M_{s1}} \quad (55)$$

que foi obtido a partir da igualdade

$$\frac{1}{M_s(\lambda(t))} = \lambda_1(t) \frac{1}{M_{s1}} + \lambda_2(t) \frac{1}{M_{s2}} \quad (56)$$

A Figura 8 apresenta a variação da massa $M_s(\lambda)$ em função de $\lambda_1(t)$ para o caso linear em azul e para (55) em vermelho.

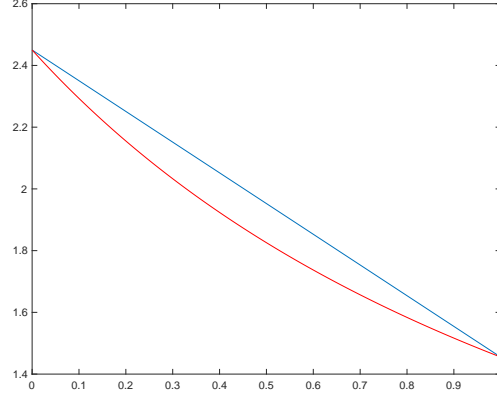


Figura 8: Evolução da massa do chassi se a evolução fosse linear (azul) e da massa do chassi equivalente (vermelho) ao longo do tempo

Note que a diferença entre o caso linear e o não linear é consideravelmente pequena. Definindo as seguintes matrizes para a saída controlada

$$E_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.001 \end{bmatrix}; E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.002 \end{bmatrix};$$

e resolvendo as condições do Lema 3 para $\gamma_1 = \gamma_2$, através do programa disponível no apêndice, obtivemos um custo garantido \mathcal{H}_2 de $J_2(\cdot) < 0.2352$ para $(\gamma_1^*, \gamma_2^*) = (0.001, 0.001)$ e as seguintes matrizes de ganho

$$K_1 = [-2637 \quad -150.9 \quad -2944 \quad -22], \quad K_2 = [79.6 \quad -32.2 \quad -157.1 \quad -3.73]$$

e matrizes definidas positivas

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.7288 & 0.0144 & 0.7854 & 0.0022 \\ 0.0144 & 0.0008 & 0.0143 & 0.0002 \\ 0.7854 & 0.0143 & 0.8903 & 0.0023 \\ 0.0022 & 0.0002 & 0.0023 & 0.0001 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.1657 & 0.0034 & 0.1706 & 0.0002 \\ 0.0034 & 0.0006 & 0.0025 & 0.0001 \\ 0.1706 & 0.0025 & 0.2374 & 0.0004 \\ 0.0002 & 0.0001 & 0.0004 & 0.0001 \end{bmatrix};$$

importantes para a implementação da regra de comutação. Considerando uma incerteza do tipo dente de serra $\phi(t)$ apresentada na Figura 9 em que

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} 0.5 - 0.5\phi(t) \\ -0.5 + 0.5\phi(t) \end{bmatrix}$$

e implementando o controle com comutação projetado, obtivemos as trajetórias apresentadas na Figura 10 e a regra de comutação apresentada na Figura 11.

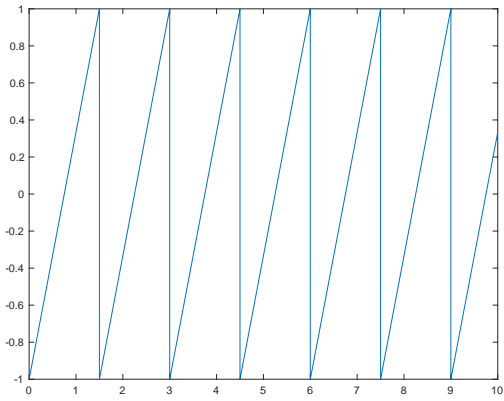


Figura 9: Evolução da variável $\phi(t)$ ao longo do tempo

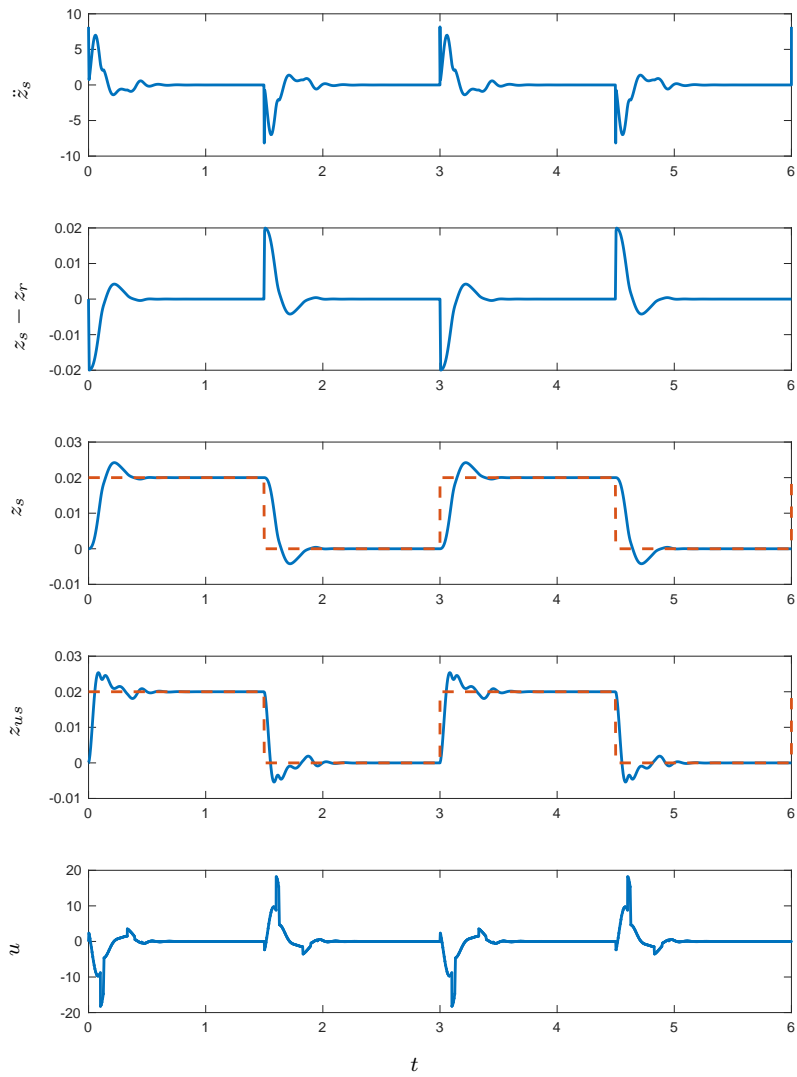


Figura 10: Evolução das variáveis estudadas para o controlador com comutação

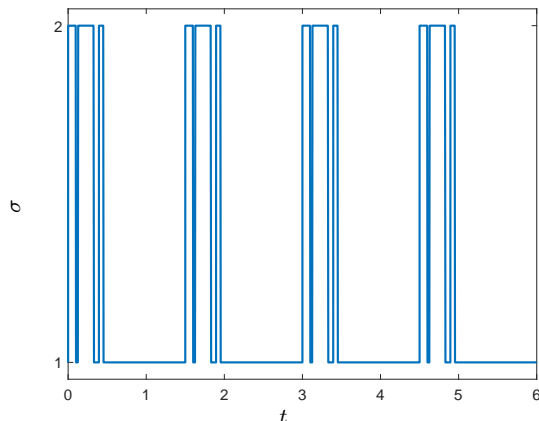


Figura 11: Regra de comutação

Podemos observar que os resultados são bastante satisfatórios uma vez que mesmo na presença de incertezas, o tempo de estabilização foi de 0.5 [s] o que é inferior àquele obtido na Figura 4, que representa a resposta de um sistema LIT sem incertezas. Resolvemos também as condições propostas no Lema 3 realizando uma busca exaustiva nos parâmetros γ_1 e γ_2 e obtivemos para $(\gamma_1^*, \gamma_2^*) = (1.1583, 0.001)$ o mesmo valor de custo garantido.

Para fins de comparação, determinamos a lei de controle $u = Kx$ através do seguinte problema de otimização convexo

$$\inf_{X>0, Y, W} \text{Tr}(W) \quad (57)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A_j X + B_j Y + X A_j' + Y' B_j' & \bullet \\ E_j X + F_j Y & -I \end{bmatrix} < 0, \quad j \in \{1, \dots, N\} \quad (58)$$

$$\begin{bmatrix} W & \bullet \\ H & X \end{bmatrix} < 0 \quad (59)$$

que é comumente utilizado na literatura quando o parâmetro incerto não pode ser medido ou estimado, veja [19]. Resolvendo este problema, obtivemos um custo garantido de $J_2(\cdot) < 0.9121$ o que é aproximadamente quatro vezes maior do que o valor obtido pelo Lema 3, indicando a qualidade do projeto realizado. A literatura apresenta outras propostas baseadas em uma lei de controle com comutação para tratar sistemas com incertezas paramétricas politópicas como por exemplo [21] e [20]. Ambas as referências levam em conta o caso robusto, mas não consideram a variação no tempo da incerteza, ou seja, não tratam o caso LPV. A seção seguinte apresenta os resultados experimentais realizados na suspensão da Quanser.

6 Resultados experimentais obtidos na suspensão Quanser

Nesta seção, implementamos as técnicas de controle estudadas nas seções anteriores na suspensão automotiva da Quanser, cuja foto está apresentada na Figura 12. A tabela a seguir apresenta os parâmetros do sistema real segundo os dados fornecidos pelo manual da fabricante:

variável	valor	unidade
M_{us}	1	kg
M_s	2.45	kg
K_{us}	2500	N/m
K_s	980	N/m
B_{us}	5	N s /m
B_s	7.5	N s /m

Tabela 2: Dados utilizados para o controle no sistema real

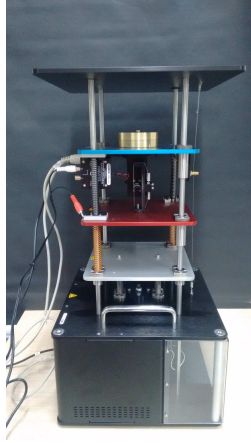


Figura 12: Suspensão Quanser utilizada no experimento

Note que estes dados levam em conta que entre a suspensão e o pneu existem duas molas de 490 [N/m] e entre o pneu e a pista duas molas de 1250 [N/m]. Para estes novos parâmetros, projetamos um controle via realimentação de estado \mathcal{H}_2 considerando a saída controlada fornecida pelo par (E, F) definido na Subseção 3.3.2 para $M_s = 2.45$ [kg], sem considerar qualquer variação na massa, obtendo um desempenho de $\|H_{wz}\|_2 = 0.2853$ e o seguinte ganho de realimentação de estado

$$K = [-420.1554 \quad -47.3299 \quad -389.4612 \quad -5.9014] \quad (60)$$

Posteriormente, considerando que a massa é incerta e pode variar no tempo, ou seja, para $M_s(\lambda(t))$ dada em (55), projetamos um controle com comutação \mathcal{H}_2 para a saída de desempenho definida pelos pares (E_1, F_1) e (E_2, F_2) , cujos valores numéricos estão disponíveis na Subseção 5.2. Resolvendo as condições do Lema 3 para $(\gamma_1^*, \gamma_2^*) = (6.9388, 0.001)$ obtivemos um custo garantido de $J_2(\cdot) < 0.2119$, as matrizes de ganho

$$K_1 = [-2880.7 \quad -146.7 \quad -2974.7 \quad -15.9], \quad K_2 = [10.8542 \quad -31.1671 \quad -126.6127 \quad -3.3089]$$

e matrizes definidas positivas

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.63950 & 0.01163 & 0.66900 & 0.00145 \\ 0.01163 & 0.00057 & 0.01100 & 0.00010 \\ 0.66900 & 0.01100 & 0.74177 & 0.00145 \\ 0.00145 & 0.00010 & 0.00145 & 0.00002 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.15152 & 0.00244 & 0.15824 & 0.00017 \\ 0.00244 & 0.00042 & 0.00156 & 0.00006 \\ 0.15824 & 0.00156 & 0.21326 & 0.00019 \\ 0.00017 & 0.00006 & 0.00019 & 0.00002 \end{bmatrix};$$

usadas para implementar a função de comutação. Para fins de comparação resolvemos o problema (57) sujeito às LMIs (58)-(59) obtendo um custo garantido de $J_2(\cdot) < 0.7757$ que, como anteriormente, é aproximadamente quatro vezes maior do que o desempenho fornecido pela lei de controle com comutação. A seguir apresentamos as medidas experimentais obtidas como resultado dos controladores projetados acima.

6.1 Lei de controle $u = Kx$

Projetamos a lei de controle $u = Kx$ especificamente para $M_s = 2.45$ [kg], mas implementamos para três valores de massa diferentes $M_s \in \{1.45, 1.95, 2.45\}$ [kg]. A Figura 13 apresenta em vermelho os dados simulados e em azul os dados medidos. O perfil da pista $z_r(t)$ está apresentado em linhas tracejadas. Como pode ser observado, o controlador teve um funcionamento bastante adequado para as três massas analisadas.

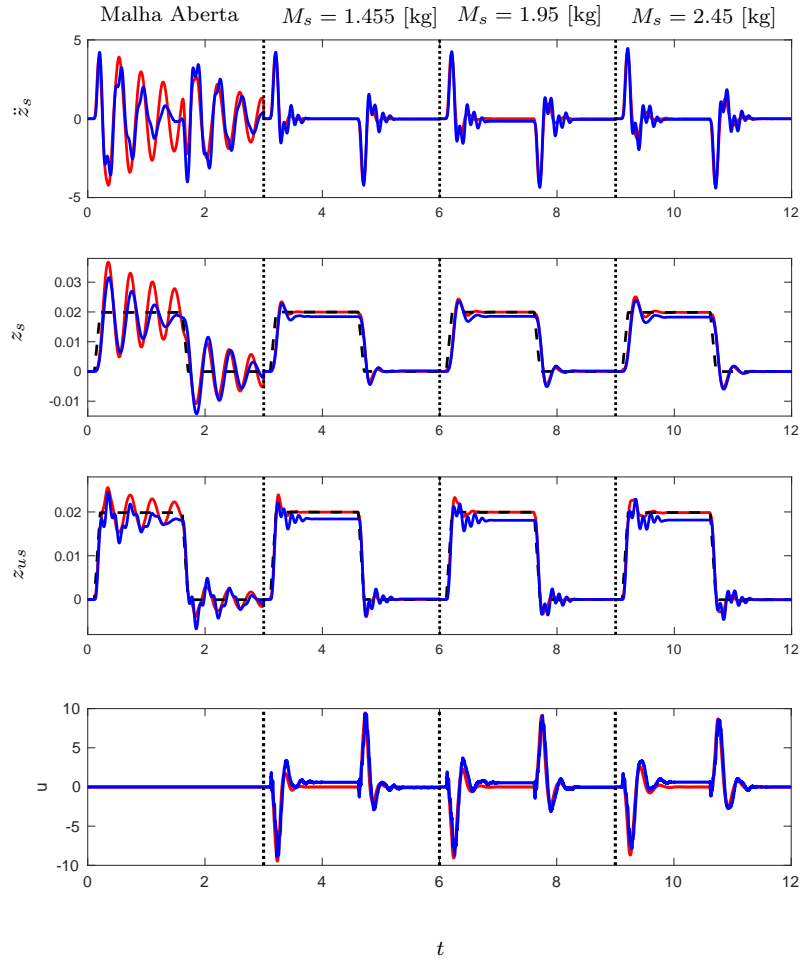


Figura 13: Dados experimentais para o sistema com a lei de controle $u = Kx$

6.2 Lei de controle $u = K_{\sigma}x$

A mesma situação anterior foi considerada, mas levando em conta o controlador com comutação $u = K_{\sigma}x$. A Figura 14 apresenta os dados simulados e medidos com o mesmo padrão de cores já utilizados. A regra de comutação utilizada experimentalmente está apresentada na Figura 15. Novamente, como no caso anterior o controlador mostrou-se bastante eficiente. Note, entretanto, que foi implementado para um caso muito mais simples do que aquele considerado no seu projeto, em que a massa não varia em função do tempo. Infelizmente, não foi possível realizar os testes considerando a variação temporal da massa devido à dificuldades de acrescentar ou retirar corpos de prova durante a operação. Para mostrar a eficiência da técnica projetada, seria importante encontrar um artifício que possa ser testado experimentalmente, para levar em conta a variação brusca ou não da massa do chassi.

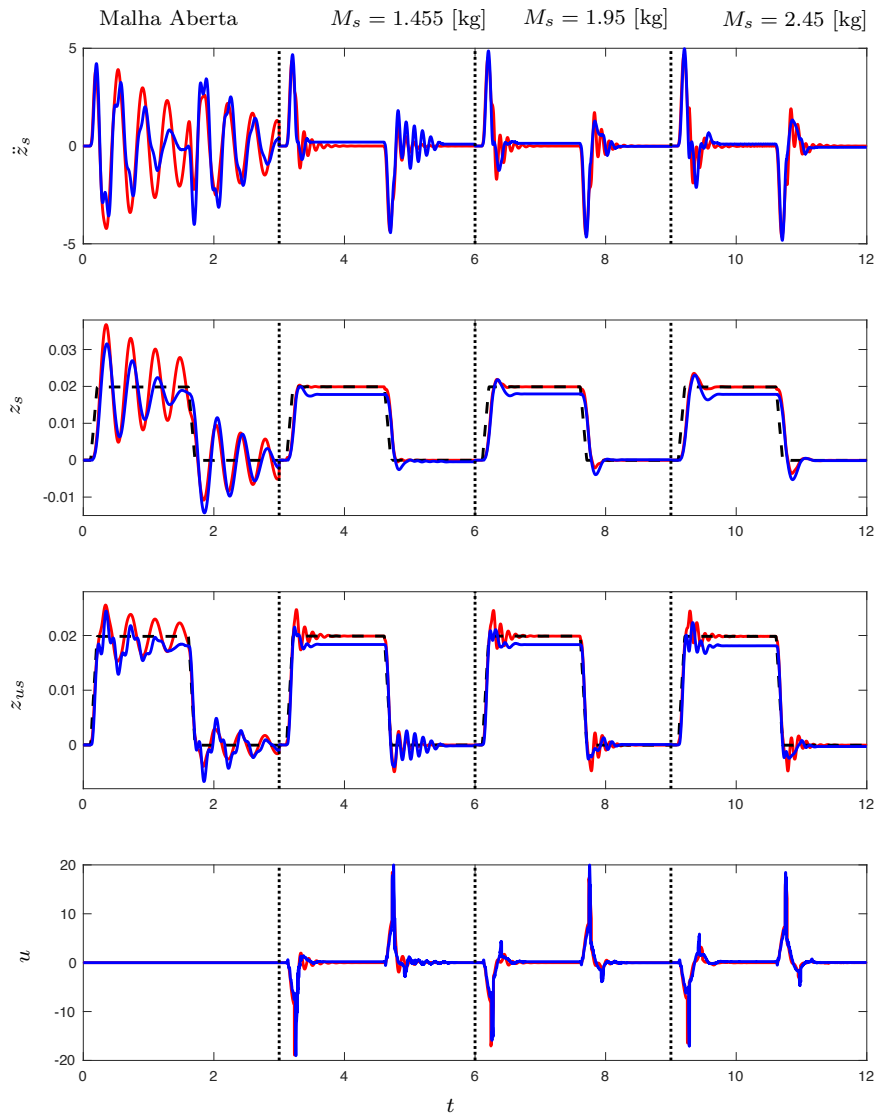


Figura 14: Dados experimentais para o sistema com a lei de controle $u = K_\sigma x$

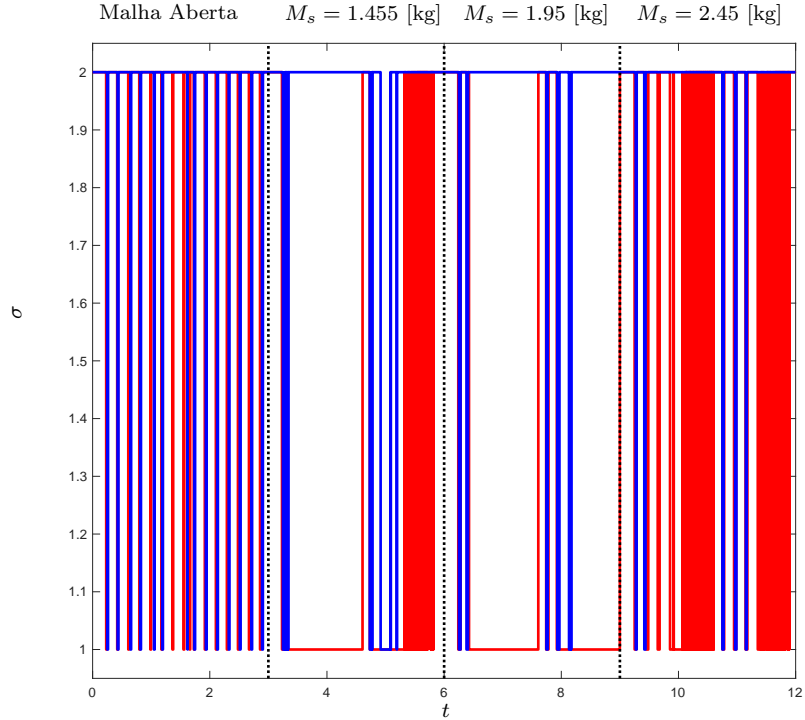


Figura 15: Lei de comutação para o sistema com a lei de controle $u = K_\sigma x$

Para ambos os projetos, podemos verificar uma pequena diferença de amplitude nas posições z_s e z_{us} em relação aos valores teóricos obtidos. Esta diferença deve-se à existência do atrito de Coulomb, que não foi levado em consideração no modelo matemático do sistema.

7 Conclusão

Durante esse projeto foi realizado o controle ativo de uma suspensão automotiva representando 1/4 de automóvel. O equipamento utilizado refere-se a uma estação de trabalho da empresa Quanser. Primeiramente, foi feito um estudo sobre conceitos básicos de sistemas dinâmicos. Mais especificamente, foram apresentados o critério de Lyapunov para o estudo de estabilidade e a definição da norma \mathcal{H}_2 para análise de desempenho de sistemas LIT. Posteriormente, o modelo em espaço de estado da suspensão foi obtido. A partir de uma análise do seu comportamento em malha aberta foram identificadas as variáveis de interesse a serem levadas em conta no processo de otimização, a saber, a aceleração do chassi e o tempo de estabilização. Para o caso invariante no tempo, uma regra de controle \mathcal{H}_2 foi implementada fornecendo resultados satisfatórios. De forma a levar em conta a variação no tempo da massa do chassi, representando consumo de combustível ou transporte de passageiro, uma lei de controle com comutação foi projetada e simulada para mudanças bruscas da massa. Ambas as estruturas de controle foram implementadas experimentalmente na estação de trabalho da empresa Quanser considerando três valores de massas diferentes, mesmo que um dos controladores não tenha sido projetado para levar em conta esta situação. Mesmo assim, para ambas as estruturas de controle, os resultados foram bastante satisfatórios. É importante ressaltar que a lei de controle com comutação foi testada para um caso muito mais simples do que aquele para o qual foi projetada. Infelizmente um teste mais adequado não pôde ser realizado devido às dificuldades logísticas do equipamento.

Referências

- [1] D. Bastow, G. Howard, and J. P. Whitehead. *Car Suspension and Handling*. SAE international Warrendale, 2004.

- [2] A. S. de Aquino. Controle de vibração de um sistema sob desbalanceamento rotativo utilizando atuador de liga com memória de forma. *Universidade Federal da Paraíba, Tese de Doutorado* 2011.
- [3] K. F. Oliveira. Controlo semi-ativo da suspensão de um veículo automóvel. *Escola Superior de Tecnologia e Gestão. Instituto Politécnico de Bragança, Dissertação de Mestrado* 2015.
- [4] D. Fischer and R. Isermann. Mechatronic semi-active and active vehicle suspensions. *Control Engineering Practice*, 12(11):1353–1367, 2004.
- [5] G. Georgiou, G. Verros, and S. Natsiavas. Multi-objective optimization of quarter-car models with a passive or semi-active suspension system. *Vehicle System Dynamics*, 45(1):77–92, 2007.
- [6] J. Lu and M. DePoyster. Multiobjective optimal suspension control to achieve integrated ride and handling performance. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(6):807–821, 2002.
- [7] C. M. Neto. Proposta de construção de um amortecedor de vibração ajustável, TVA, utilizando fluido magnetorreológico. *Universidade Estadual Paulista, FE-Campus de Ilha Solteira, Dissertação de Mestrado* 2008.
- [8] H. Sleiman. *Systèmes de suspension semi-active à base de fluide magnétorhéologique pour l'automobile*. Thèse de Doctorat, Arts et Métiers ParisTech, 2010.
- [9] A. Apkarian. *Laboratory Guide Active Suspension Experiment*, volume 9. 2013.
- [10] J.C. Geromel and R.H. Korogui. Controle linear de sistemas dinâmicos: Teoria Ensaio Práticos e Exercícios, Editora Edgard Blücher Ltda, 2011.
- [11] J-J. E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*, volume 199. Prentice Hall Englewood Cliffs, N.J., 1991.
- [12] H. K. Khalil and J.W. Grizzle. *Nonlinear Systems*, volume 3. Prentice Hall Upper Saddle River, N.J., 2002.
- [13] J. C. Geromel, P. Colaneri, and P. Bolzern. Dynamic output feedback control of switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(3):720–733, 2008.
- [14] A. Oppenheim and C. Weinstein. A bound on the output of a circular convolution with application to digital filtering. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 17(2):120–124, 1969.
- [15] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15. SIAM, 1994.
- [16] S. M. Savaresi, E. Silani, S. Bittanti, and N. Porciani. On performance evaluation methods and control strategies for semi-active suspension systems. In *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2264–2269, 2003.
- [17] J. C. Geromel and P. Colaneri. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(5):1915–1930, 2006.
- [18] G. S. Deaecto, J. C. Geromel, and J. Daafouz. Switched state-feedback control for continuous time-varying polytopic systems. *International Journal of Control*, 84(9):1500–1508, 2011.
- [19] J. C. Geromel and R. H. Korogui. Analysis and synthesis of robust control systems using linear parameter dependent lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(12):1984–1989, 2006.
- [20] R. Cardim, M. C. M. Teixeira, E. Assunção, J. M. S. Ribeiro, M. R. Covacic, and R. Gaino. Robust switched control based on strictly positive real systems and variable structure control techniques. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 30(8-10):1244–1268, 2016.
- [21] D. R. de Oliveira, M. C. M. Teixeira, E. Assunção, W. A. de Souza, M. R. Moreira, and J. H. P. Silva. Projeto de controle robusto \mathcal{H}_∞ chaveado: Implementação prática em um sistema de suspensão ativa. *Anais do Congresso Brasileiro de Automática*, 2194–2201, 2014.

A Códigos

A.1 Cálculo norma \mathcal{H}_ϵ

Cálculo de diferentes controladores através da norma \mathcal{H}_ϵ , e esboço da evolução das diferentes variáveis estudadas.

```
1 clear all
2 close all
3 clc
4 global A B H C D K
5
6 Ms=2.45;
7 Mus=1;
8 Ks=900;
9 Kus=1250;
10 Bs=7.5;
11 Bus=5;
12 A=[0 1 0 -1;-Ks/Ms -Bs/Ms 0 Bs/Ms;0 0 0 1;Ks/Mus Bs/Mus -Kus/Mus -(Bs+Bus)/Mus];
13 B=[0;1/Ms;0;-1/Mus];
14 H=[0;0;-1;Bus/Mus];
15
16 C= [-Ks/Ms -Bs/Ms 0 Bs/Ms]; %a saída é a aceleração do chassi
17 D= 1/Ms;
18
19 %% Minimiza o deslocamento relativo
20
21 % E=[1 0 1 0];
22 % F=0;
23
24 %
25 % %% Minimiza os dois (compromisso)
26 % Ficou bom
27 E=[1 0 1 0;0 0 0 0];
28 F=[0;1e-3];
29
30
31
32
33 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
34 nx = size(A,1);
35 nu = size(B,2);
36 nw = size(H,2);
37 nz = size(E,1);
38
39 % Descreve a LMI a ser projetada
40 setlmis([])
41
42 % declaração de variáveis
43 %=====
44 S = lmivar(1,[nx 1]);
45 W = lmivar(1,[nw 1]);
46 Y = lmivar(2,[nu nx]);
47 %=====
48
49 ct = 0;
50
51 ct = ct+1;
52 lmiterm([ct 1 1 S],A,1,'s'); %termo em AS+SA'
53 lmiterm([ct 1 1 Y],B,1,'s'); %termo em BY+Y'B'
54 lmiterm([ct 2 1 S],E,1);
55 lmiterm([ct 2 1 Y],F,1);
56 lmiterm([ct 2 2 0],-1);
57
58 ct = ct+1;
59 lmiterm([-ct 1 1 W],1,1);
60 lmiterm([-ct 2 1 0],H);
61 lmiterm([-ct 2 2 S],1,1);
62
63 lmisys = getlmis;
64
65 % Declaração função objetivo
66 options = [1e-4,2000,0,200,0];
```

```

67
68
69 status = 0;
70
71 np=decnbr(lmisys);
72
73
74
75 c = zeros(np,1);
76 for i=1:np
77 Wi = defcx(lmisys,i,W);
78 c(i) = trace(Wi);
79 end
80
81 [copt,xopt] = mincx(lmisys,c,options);
82
83 if (isempty(copt))
84 Ws = [];
85 status = -1;
86 return
87 end
88
89 Ws = dec2mat(lmisys,xopt,W);
90 Ys = dec2mat(lmisys,xopt,Y);
91 Ss = dec2mat(lmisys,xopt,S);
92
93 NormaH2 = trace(Ws) % Norma ao quadrado
94
95 K=Ys*inv(Ss);
96 %K=[0 0 0 0];%malha aberta
97
98 sim('sim_suspensao',[0 6])
99
100 posValue = [100 100 [900 1200]];
101 figure(1)
102 set(figure(1),'Position',posValue);
103
104 figure(1)
105 subplot(5,1,1)
106 plot(ddotzs(:,1),ddotzs(:,2),'LineWidth',2)
107 subplot(5,1,2)
108 plot(zsr(:,1),zsr(:,2),'LineWidth',2)
109 subplot(5,1,3)
110 plot(zs(:,1),zs(:,3),zs(:,1),zs(:,2),'--','LineWidth',2)
111 subplot(5,1,4)
112 plot(zus(:,1),zus(:,3),zus(:,1),zus(:,2),'--','LineWidth',2)
113 subplot(5,1,5)
114 plot(u(:,1),u(:,2),'LineWidth',2)
115 return

```

A.2 Sistemas com comutações

Cálculo das matrizes estabilizando um sistema instável escolhido, e esboço da evolução das diferentes variáveis de estado.

```

1 close all
2 clear all
3 clc
4 global A Po
5
6 A{1}=[-2 0;0 2];
7 A{2}=[2 0;0 -5];
8
9 Q{1} = eye(size(A{1},1));
10 Q{2} = eye(size(A{1},1));
11
12 rhoo=inf;
13 ps = [60:0.1:80];
14 qs = [100:0.1:120];
15
16 for i = 1:length(ps)
17 for j = 1:length(qs)

```



```

18 Xa = [-ps(i) qs(j);ps(i) -qs(j)];
19 [Pr, rhor]=Comutestav(A, Xa,Q);
20 ct(i, j) = rhor;
21 if(rhor<rhoo)
22 rhoo=rhor;
23 Xao=Xa;
24 Po=Pr;
25 end
26 end
27 end
28 mesh(qs, ps, ct)
29
30 %%
31 th = -pi:2*pi/50:pi;
32
33 for i=1:length(th)
34 x0 = [3*cos(th(i));3*sin(th(i))];
35 sim('sist_chav',[0 10])
36
37 plot(x(:,2),x(:,3),'Linewidth',2)
38 hold on
39 end
40
41 x0 = [3*cos(th(14));3*sin(th(14))];
42 sim('sist_chav',[0 10])
43 plot(x(:,1),x(:,2:end),'Linewidth',2)
44
45
46 function [Ps, rhos] = Comutestav(A,Xa,Q)
47 N=size(A,2);
48 nx=size(A{1},1);
49
50
51 %% Iniciar LMI
52
53 setlmis([])
54
55 %% Variaveis do problema
56
57 for i = 1:N
58 P{i}=lmivar(1,[nx,1]);
59 end
60
61 rho=lmivar(1,[1,0]);
62
63 %% Restricoes LMIs
64
65 for i=1:N
66 lmi = newlmi;
67 lmiterm([-lmi,1,1,P{i}],1,1);
68
69 lmi = newlmi;
70 lmiterm([lmi,1,1,P{i}],A{i}',1,'s');
71 for j=1:N
72 lmiterm([lmi,1,1,P{j}],Xa(j,i),1);
73 end
74 lmiterm([lmi,1,1,0],Q{i});
75
76 lmi = newlmi;
77 lmiterm([lmi,1,1,P{i}],1,1);
78 lmiterm([lmi,1,1,rho],-1,1);
79 end
80
81 lmi = newlmi;
82 lmiterm([-lmi,1,1,rho],1,1);
83 % lmiterm([-lmi,1,1,0],-e,1);
84
85
86 lmisys=getlmis;
87 %% Resolvendo as LMIs
88
89
90 options = [1e-6,2000,1e9,200,1];

```

```

91 np = decnbr(lmisys);
92 c = zeros(np,1);
93 c(decinfo(lmisys,rho)) = 1;
94
95 [caux,xopt] = mincx(lmisys,c,options);
96
97 if isempty(caux)
98 Ps = NaN;
99 rhos = NaN;
100 disp('Infeasible');
101 return
102 else
103 rhos = dec2mat(lmisys,xopt,rho);
104 for i = 1:N
105 Ps{i} = dec2mat(lmisys,xopt,P{i});
106 end
107 disp('Feasible');
108 end

```

A.3 Controle robusto

Controle robusto da suspensão apresentando incertezas para o peso do chassi.

```

1 clear all
2 close all
3 clc
4 global A B H C D E F Po Ko
5
6 Ms1 = 2.45;
7 Ms2 = 1.455;
8
9 Mus=1;
10 Ks=900;
11 Kus = 1250;
12 Bs=7.5;
13 Bus=5;
14
15
16 % Variação Ms
17 A{1}=[0 1 0 -1;-Ks/Ms1 -Bs/Ms1 0 Bs/Ms1;0 0 0 1;Ks/Mus Bs/Mus -Kus/Mus -(Bs+Bus)/Mus];
18 A{2}=[0 1 0 -1;-Ks/Ms2 -Bs/Ms2 0 Bs/Ms2;0 0 0 1;Ks/Mus Bs/Mus -Kus/Mus -(Bs+Bus)/Mus];
19
20 B{1} = [0;1/Ms1;0;-1/Mus];
21 B{2} = [0;1/Ms2;0;-1/Mus];
22
23 H = [0;0;-1;Bus/Mus];
24
25 C{1}=[ -Ks/Ms1 -Bs/Ms1 0 Bs/Ms1];
26 C{2}=[ -Ks/Ms2 -Bs/Ms2 0 Bs/Ms2];
27 D{1}= 1/Ms1;
28 D{2}= 1/Ms2;
29
30
31 E{1} = [4 0 4 0;0 0 0 0];
32 F{1} = [0;1e-3];
33
34 E{2} = [1 0 1 0;0 0 0 0];
35 F{2} = [0;2e-3];
36
37 Jgma=inf;
38
39 opt = 2; % 1 - para chaveamento e gammas iguais
40 % 2 - para chaveamento e gammas diferentes
41 % 3 - para o caso sem chaveamento
42
43
44 switch opt
45 case 1
46 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Para os gammas iguais
47 gammav=linspace(1e-3,2,20);;
48 for p=1:length(gammav)
49 J0 = inf;

```

```

50 gamma = gammav(p)
51
52 [X, Y, J]=LPV_Suspensao(A,B,H,E,F,gamma);
53 ct(p) = J;
54 if (J<Jgma)
55 Jgma=J;
56 Xo = X;
57 Yo = Y;
58 gmo = gamma;
59 end
60 end
61 plot(gammav, ct)
62
63 N = size(A,2);
64 for i = 1:N
65 Po{i} = inv(Xo{i});
66 Ko{i} = Yo{i}*Po{i};
67 end
68
69
70
71 sim('sim_suspensao_lpv',[0 6])
72
73
74 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
75 case 2
76 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Para os gammas diferentes
77 gmav1 = linspace(1e-3,2,20);
78 gmav2 = linspace(1e-3,2,20);
79
80 for i=1:length(gmav1)
81 for j=1:length(gmav2)
82 gm = [gmav1(i);gmav2(j)]
83
84 J0 = inf;
85 [X, Y, J]=LPV_Suspensao_Gms(A,B,H,E,F, gm);
86 ct(i, j) = J;
87 if (J<Jgma)
88 Jgma=J;
89 Xo = X;
90 Yo = Y;
91 gmo = gm;
92 end
93 end
94 end
95 mesh(gmav2, gmav1, ct)
96
97 N = size(A,2);
98 for i = 1:N
99 Po{i} = inv(Xo{i});
100 Ko{i} = Yo{i}*Po{i};
101 end
102
103
104 sim('sim_suspensao_lpv',[0 6])
105
106
107
108 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
109 case 3
110 % Caso LPV sem chaveamento
111 [Xo, Yo, Jo] = LPV_Suspensao_SemChav(A,B,H,E,F);
112 Po{1} = inv(Xo);
113 Ko{1} = Yo*Po{1};
114 Jo
115 sim('sim_suspensao_lpv',[0 6])
116
117 end
118
119
120 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
121 function [Xo, Yo, Jo] = LPV_Suspensao(A,B,H,E,F,gamma)
122 N = size(A,2);

```

```

123 nx = size(A{1},1);
124 nu = size(B{1},2);
125 nw = size(H,2);
126 nz = size(E{1},1);
127
128 % Descreve a LMI a ser projetada
129 setlmis([])
130
131
132 % Declaração de variáveis
133 for i = 1:N
134 X{i} = lmivar(1,[nx 1]);
135 Y{i} = lmivar(2,[nu nx]);
136 W{i} = lmivar(1,[nw 1]);
137 end
138
139
140 for i=1:N
141 for j=1:N
142 ct = newlmi;
143 lmiterm([ct 1 1 X{i}],A{j},1,'s'); %termo em AS+SA'
144 lmiterm([ct 1 1 Y{i}],B{j},1,'s'); %termo em BY+Y'B'
145 lmiterm([ct 1 1 X{i}],-gamma,1); %termo em -gammaXi'
146 lmiterm([ct 1 2 X{i}],1,E{i}'); %termo XiEi'
147 lmiterm([ct 1 2 -Y{i}],1,F{i}'); %termo em Yi'Fi
148 lmiterm([ct 1 3 X{i}],gamma,1); %termo em gammaXi
149 lmiterm([ct 2 2 0],-1); %termo -I
150 lmiterm([ct 3 3 X{j}],-gamma,1); %termo em -gammaXj
151 end
152
153 ct = newlmi;
154 lmiterm([-ct 1 1 W{i}],1,1); %termo Wi
155 lmiterm([-ct 2 1 0],H); %termo em H
156 lmiterm([-ct 2 2 X{i}],1,1); %termo em Xi
157 end
158
159 lmisys = getlmis;
160
161 % Declaração função objetivo
162 options = [1e-4,2000,1e9,200,1];
163 %=====
164
165 np = decnbr(lmisys);
166 Jo = inf;
167 for j = 1:N
168 c = zeros(np,1);
169
170 for i=1:np
171 Wi = defcx(lmisys,i,W{j});
172 c(i) = trace(Wi);
173 end
174
175 [copt,xopt] = mincx(lmisys,c,options);
176
177 if (isempty(copt))
178 X = NaN;
179 Y = NaN;
180 Jo = NaN;
181 return
182 end
183
184 if copt <= Jo
185 Jo = copt;
186 for i = 1:N
187 Yo{i} = dec2mat(lmisys,xopt,Y{i});
188 Xo{i} = dec2mat(lmisys,xopt,X{i});
189 end
190 end
191 end
192 end
193 %%%%%%%%%%%%%%%
194 function [Xo,Yo,Jo] = LPV_Suspensao_Gms(A,B,H,E,F,gm)
195 N = size(A,2);

```

```

196 nx = size(A{1},1);
197 nu = size(B{1},2);
198 nw = size(H,2);
199 nz = size(E{1},1);
200
201 % Descreve a LMI a ser projetada
202 setlmis([])
203
204
205 % Declaração de variáveis
206 for i = 1:N
207 X{i} = lmivar(1,[nx 1]);
208 Y{i} = lmivar(2,[nu nx]);
209 W{i} = lmivar(1,[nw 1]);
210 end
211
212
213 for i=1:N
214 for j=1:N
215 ct = newlmi;
216 lmiterm([ct 1 1 X{i}],A{j},1,'s'); %termo em AS+SA'
217 lmiterm([ct 1 1 Y{i}],B{j},1,'s'); %termo em BY+Y'B'
218 lmiterm([ct 1 1 X{i}],-gm(i),1); %termo em -gammaXi'
219 lmiterm([ct 1 2 X{i}],1,E{i}'); %termo XiEi'
220 lmiterm([ct 1 2 -Y{i}],1,F{i}'); %termo em Yi'Fi
221 lmiterm([ct 1 3 X{i}],gm(i),1); %termo em gammaXi
222 lmiterm([ct 2 2 0],-1); %termo -I
223 lmiterm([ct 3 3 X{j}],-gm(i),1); %termo em -gammaXj
224 end
225
226 ct = newlmi;
227 lmiterm([-ct 1 1 W{i}],1,1); %termo Wi
228 lmiterm([-ct 2 1 0],H); %termo em H
229 lmiterm([-ct 2 2 X{i}],1,1); %termo em Xi
230 end
231
232 lmisys = getlmis;
233
234 % Declaração função objetivo
235 options = [1e-4,2000,1e9,200,1];
236 %=====
237
238 np = decnbr(lmisys);
239 Jo = inf;
240 for j = 1:N
241 c = zeros(np,1);
242
243 for i=1:np
244 Wi = defcx(lmisys,i,W{j});
245 c(i) = trace(Wi);
246 end
247
248 [copt,xopt] = mincx(lmisys,c,options);
249
250 if (isempty(copt))
251 X = NaN;
252 Y = NaN;
253 Jo = NaN;
254 return
255 end
256
257 if copt <= Jo
258 Jo = copt;
259 for i = 1:N
260 Yo{i} = dec2mat(lmisys,xopt,Y{i});
261 Xo{i} = dec2mat(lmisys,xopt,X{i});
262 end
263 end
264 end
265 end
266 %%%%%%%%%%%
267
268 function [Xo,Yo,Jo] = LPV_Suspensao_SemChav(A,B,H,E,F)

```

```

269 N = size(A,2);
270 nx = size(A{1},1);
271 nu = size(B{1},2);
272 nw = size(H,2);
273 nz = size(E{1},1);
274
275 % Descreve a LMI a ser projetada
276 setlmis([])
277
278
279 % Declaração de variáveis
280 X = lmivar(1,[nx 1]);
281 Y = lmivar(2,[nu nx]);
282 W = lmivar(1,[nw 1]);
283
284 for j=1:N
285 ct = newlmi;
286 lmiterm([ct 1 1 X],A{j},1,'s'); %termo em AS+SA'
287 lmiterm([ct 1 1 Y],B{j},1,'s'); %termo em BY+Y'B'
288 lmiterm([ct 2 1 X],E{j},1); %termo XiCi'
289 lmiterm([ct 2 1 Y],F{j},1); %termo em Yi'D
290 lmiterm([ct 2 2 0],-1); %termo -I
291 end
292
293 ct = newlmi;
294 lmiterm([-ct 1 1 X],1,1); %termo Wi
295
296 ct = newlmi;
297 lmiterm([-ct 1 1 W],1,1); %termo Wi
298 lmiterm([-ct 2 1 0],H); %termo em H
299 lmiterm([-ct 2 2 X],1,1); %termo em Xi
300
301 lmisys = getlmis;
302
303 % Declaração função objetivo
304 options = [1e-4,2000,1e9,200,1];
305 %=====
306
307 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
308 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
309 np = decnbr(lmisys);
310 Jo = inf;
311 c = zeros(np,1);
312
313 for i=1:np
314 Wi = defex(lmisys,i,W);
315 c(i) = trace(Wi);
316 end
317
318 [copt,xopt] = mincx(lmisys,c,options);
319
320 if (isempty(copt))
321 X = NaN;
322 Y = NaN;
323 Jo = NaN;
324 return
325 end
326
327 Jo = copt;
328 Yo = dec2mat(lmisys,xopt,Y);
329 Xo = dec2mat(lmisys,xopt,X);
330 end
331
332
333 function xdata = simulacao_susp_lpv(u)
334 global A B H C D E F Po Ko
335 w = u(1);
336 phi = u(2);
337 x = u(3:end);
338
339 N = size(A,2);
340 nx = size(A{1},1);
341

```

```

342 lb1 = [0.5-0.5*phi];
343
344 lb2 = 1-lb1;
345
346 for i=1:size(Po,2)
347 v(i) = x'*Po{i}*x;
348 end
349 [~,idx] = min(v);
350
351 Alb = lb1*A{1}+lb2*A{2};
352 Blb = lb1*B{1}+lb2*B{2};
353 Clb = lb1*C{1}+lb2*C{2};
354 Dlb = lb1*D{1}+lb2*D{2};
355
356 u = Ko{idx}*x;
357
358
359 xdot = Alb*x+Blb*u+H*w;
360 y = Clb*x+Dlb*w;
361 z = E{idx}*x+F{idx}*u;
362
363 xdata = [idx;u;y;z'*z;xdot];
364 end
365
366
367
368 function xdata = simulacao_lpv(u)
369 global A B C D Po Ko
370 phi = u(1);
371
372 x = u(2:end);
373 N = size(A,2);
374 nx = size(A{1},1);
375
376 lb1 = [0.5-0.5*phi];
377
378 lb2 = 1-lb1;
379
380
381
382 for i=1:N
383 v(i) = x'*Po{i}*x;
384 end
385 [~,idx] = min(v);
386
387 Alb = lb1*A{1}+lb2*A{2};
388 Blb = lb1*B{1}+lb2*B{2};
389
390 u = Ko{idx}*x;
391
392 xdot = Alb*x+Blb*u;
393 xdata = [idx;u;xdot];
394 end

```

B Simulink

B.1 Sistema não chaveado

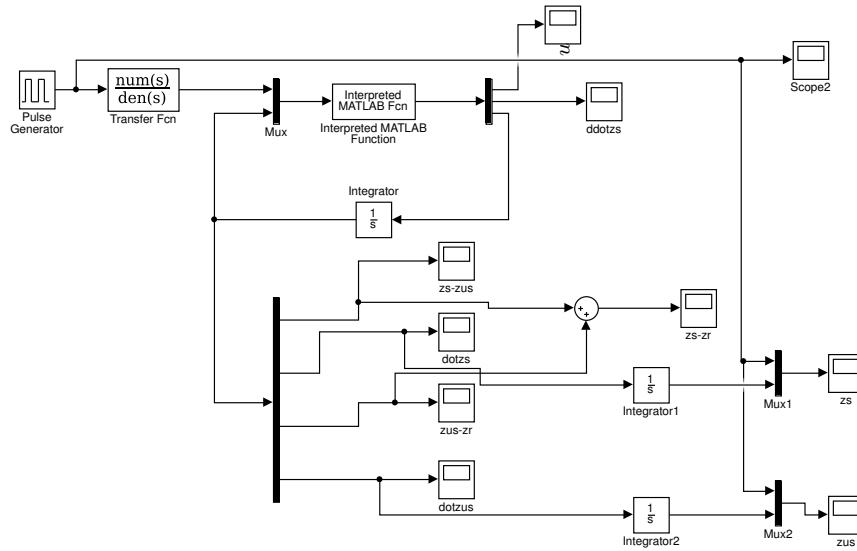


Figura 16: Sistema simulink para modelar a suspensão

A simulação da suspensão é feita através desse documento e da função ”*simulacao*” (encontrada no A.1).

B.2 Sistema chaveado

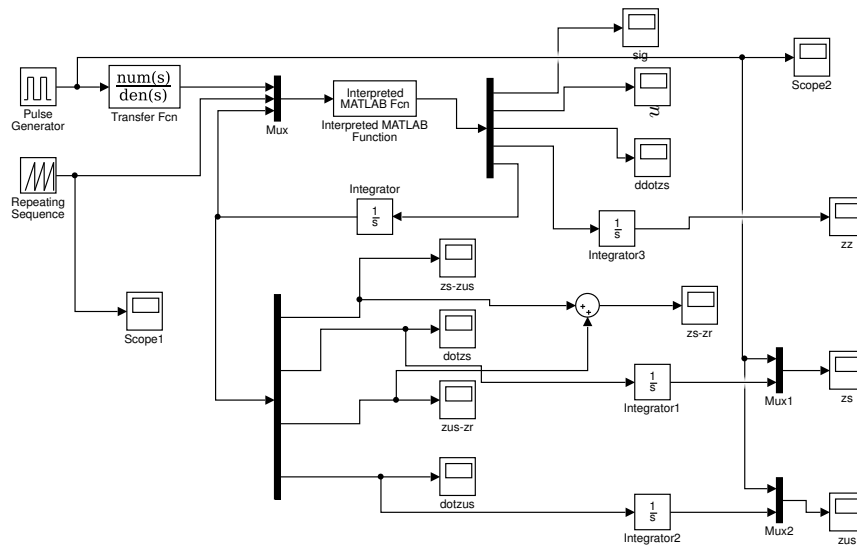


Figura 17: Sistema simulink para modelisar a suspensão e o controle robusto

Para esse documento simulink, é utilizada a função "*simulacao_susp_lpv*" (encontrada no A.3).