

José Lima Luz Netto

Faculdade de Engenharia Mecânica
Universidade Estadual de Campinas
jose.limaluz@gmail.com

Relatório Final

EM919 - Trabalho de Graduação II

Implementação prática do controle multiobjetivo \mathcal{H}_2 em um
pêndulo invertido através de rede de comunicação

27 de Novembro de 2016

Universidade Estadual de Campinas
Campus Universitário Zeferino Vaz, Barão Geraldo, Campinas - SP, 13083-970

Orientadora:

Profa. Dra. Grace S. Deaecto
grace@fem.unicamp.br

Sumário

1	Introdução	1
2	Modelagem e Identificação	4
2.1	Descrição do sistema	5
2.2	Equacionamento	6
2.2.1	Motor/caixa de transmissão	6
2.2.2	Carro	7
2.2.3	Pêndulo	8
2.2.4	Equações não lineares do sistema	9
2.3	Linearização	9
2.4	Representação de estado	10
2.4.1	Caso linear	10
2.4.2	Caso não linear	11
2.5	Validação do modelo	12
2.5.1	Identificação dos parâmetros físicos	14
2.5.2	Identificação do conjunto carro-motor	15
2.5.3	Identificação do pêndulo	17
2.5.4	Comparação dos resultados	20
3	Controle Multiobjetivo Através da Rede	22
3.1	Discretização exata	25
3.2	Sistema com comutação à tempo discreto	28
3.3	Aplicação no pêndulo invertido	30
4	Perspectivas futuras	34
5	Conclusão	35

Resumo

Este projeto de pesquisa trata da síntese e implementação prática do controle com comutação em um pêndulo invertido acoplado a um carro que desliza sobre um trilho. Mais especificamente, o objetivo é fazer com que o pêndulo permaneça em equilíbrio na posição vertical para cima, a partir de uma força aplicada no carro, que por sua vez deve voltar para a origem. São definidos múltiplos critérios \mathcal{H}_2 diferentes e conflitantes, de forma que o controle com comutação deve garantir estabilidade e um desempenho melhor do que aquele fornecido por cada critério isolado. Inicialmente, este texto descreve a planta do fabricante *Quanser* e desenvolve por completo o modelo do sistema. É realizada então a análise da resposta no tempo utilizando parâmetros fornecidos pelo fabricante, na qual são observadas certas discrepâncias entre os dados medidos e simulados, que justificam a necessidade de um modelo mais preciso. Neste ponto, são aplicadas técnicas simples para identificação do sistema geral, que resultam em respostas satisfatórias graças a uma melhor estimativa dos parâmetros físicos. Com um modelo adequado, a segunda etapa é dedicada ao projeto do controle multiobjetivo com comutação via realimentação de estado. Mais precisamente, são projetados um conjunto de controladores e uma regra de comutação, de forma a assegurar estabilidade e um limitante superior mínimo para um certo índice de desempenho \mathcal{H}_2 a ser definido. Além disso, o projeto é realizado levando em conta que o controle é aplicado através de uma rede de comunicação com largura de faixa limitada.

1 Introdução

Sistemas dinâmicos com comutação são aqueles definidos por um número finito de subsistemas e uma regra de comutação, que seleciona a cada instante de tempo um deles. Esta regra pode ser arbitrária, exercendo o papel de uma perturbação externa, ou uma variável de controle que, quando adequadamente projetada, pode assegurar estabilidade e melhorar o desempenho do sistema global. Nosso interesse é estudar o segundo caso, no qual a regra é uma variável de controle a ser determinada. As referências [7], [15], [22]

e os livros [17] e [25] são importantes para iniciar o estudo do tema.

O objetivo principal deste projeto de pesquisa é a aplicação e implementação prática de resultados recentes sobre sistemas com comutação no controle da estação de trabalho IP02 da Quanser, que foi recentemente adquirida, e que consiste em um pêndulo invertido acoplado a um carro que desliza sobre um trilho, [20].

Trata-se de um sistema não-linear muito utilizado em livros didáticos de graduação e pós-graduação para ilustrar aspectos importantes sobre teoria de controle de sistemas dinâmicos. Além disso, ele apresenta características interessantes que podem ser claramente observadas, por exemplo, no dicitlo *segway*, que é um sistema de transporte muito utilizado atualmente para turismo e para esquemas de segurança no mundo todo. Devido à sua importância, o modelo do pêndulo invertido já foi utilizado em dois trabalhos de graduação do nosso grupo de pesquisa, veja [3] e [21] para o caso \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , respectivamente. Nestes trabalhos fica evidente que o controle com comutação melhora o desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ do sistema global quando comparado ao desempenho obtido através de técnicas clássicas de controle de sistemas lineares e invariantes no tempo. Entretanto, a sua implementação prática, visando enfatizar a validação de técnicas de controle com comutação, ainda não foi realizada. Neste caso, limitações físicas de sinais, tais como, valor máximo de esforço de controle e frequência máxima de comutação passam a ser uma preocupação do projetista durante a realização do projeto. Neste sentido, os resultados aqui apresentados levam em conta um limitante superior para a frequência de comutação, que não foi considerado nos trabalhos anteriores. Isto permite que o controle do pêndulo seja realizado por intermédio de uma rede de comutação com largura de faixa limitada.

A introdução do uso de redes de comunicação deixa o problema ainda mais abrangente e com maior interesse prático, uma vez que grandes áreas da engenharia estão sendo integradas a um ambiente conectado através de rede. Algumas propriedades, como por exemplo, a largura de faixa limitada são importantes em aplicações práticas de sistemas com comutação uma vez que, em plantas reais, a frequência de comutação é normalmente limitada. A referência [16] apresenta uma introdução sobre conceitos importantes de redes de comunicação aplicados a projetos de controle. Assim, este trabalho está organizado

da seguinte forma:

- Modelagem física do sistema mecânico: a modelagem será desenvolvida considerando a metodologia clássica, por meio do levantamento das equações diferenciais, que descrevem o movimento do sistema geral. Assim, obtém-se a representação de estado do sistema de forma simples e com máxima precisão.
- Identificação do sistema e validação do modelo: esta parte do texto é dedicada ao confronto entre o sistema físico real e o modelo desenvolvido na seção anterior. Esta etapa será realizada através da coleta experimental de dados e simulação do modelo matemático cujos parâmetros físicos são obtidos a partir de métodos simples de identificação.
- Controle através de rede de comunicação: nesta etapa será apresentada a teoria utilizada para aplicação do controle multiobjetivo, suas vantagens e limitações. São exibidos os resultados pertinentes à teoria de sistemas com dados amostrados. Por fim, os resultados do controle multiobjetivo são aplicados no pêndulo em estudo e comparados aos controladores clássicos da literatura desenvolvidos para sistemas lineares e invariantes no tempo.

Este trabalho de pesquisa representa uma parte importante da minha dissertação de mestrado, que será viabilizada graças ao programa PICC (*Programa de Incentivo a Capacitação Científica*) da FEM/UNICAMP. Todos os resultados aqui apresentados serão generalizados para tratar do controle cooperativo de vários pêndulos que devem compartilhar a mesma rede de comunicação. Em um mundo conectado pela internet, a realização do controle à distância contribuirá diretamente para revolução tecnológica denominada IoT (do inglês Internet of Things) que atualmente tem atraído muitos investimentos em pesquisa. Neste caso, o controle deve levar em conta a existência de um coordenador (regra de comutação), que escolherá a cada instante de tempo qual planta deve receber o sinal de controle atualizado, enquanto que as demais manterão a última informação recebida. A estratégia proposta será implementada utilizando pêndulos invertidos disponíveis na FEM/UNICAMP.

2 Modelagem e Identificação

Neste capítulo, nosso objetivo principal é a modelagem do sistema mecânico que consiste em um pêndulo invertido acoplado a um carro que desliza sobre um trilho. A Figura 1 apresenta o sistema a ser modelado. Nesta etapa, devemos obter um conjunto de equações diferenciais, que descreve o comportamento dinâmico do pêndulo, tendo como meta a simplicidade das relações matemáticas e, ao mesmo, tempo máxima precisão, de forma que os resultados sejam bastante próximos da dinâmica real.

O pêndulo invertido é um sistema instável, e o objetivo principal do controle é a implementação de uma força adequada a fim de mantê-lo na posição vertical para cima. Este esquema de controle é objeto básico de estudo e aplicação para casos reais, como no lançamento de um foguete e o controle de pontes rolantes industriais, [19]. Fomenta, assim, ainda mais o interesse sobre aplicação de técnicas mais avançadas de controle, buscando sempre a obtenção de um melhor desempenho.

O equipamento utilizado consiste em um carro atuado por um motor de corrente contínua, no qual sua montagem permite apenas a translação sobre um trilho horizontal, onde é acoplado um pêndulo com eixo de rotação perpendicular ao movimento do carro. Será utilizado o modelo IP02 do fabricante *Quanser*, mostrado na Figura 1.

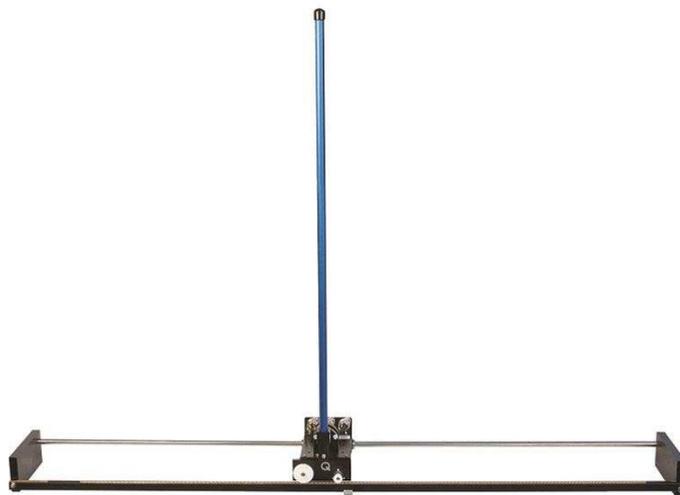


Figura 1: Pêndulo Invertido - IP02, retirado de [20]

2.1 Descrição do sistema

O modelo IP02 do fabricante Quanser é composto por um sólido carro de alumínio movido por um motor de corrente contínua de baixa indutância. A transmissão de potência entre o motor e o carro ocorre através de uma caixa de transmissão, composta por um conjunto de engrenagens em montagem planetária e pinhão-cremalheira, veja a Figura 2. A montagem planetária é do tipo onde todos os esforços normais podem ser compensados internamente, possuindo, em geral, alta eficiência mesmo se utilizada apenas como redutor [8]. O conjunto pinhão-cremalheira permite a transformação de um movimento rotativo para linear nos trilhos.

Com a energia recebida do conjunto motor / caixa de transmissão, o carro movimentará o pêndulo de haste cilíndrica através do ponto de pivoteamento proporcionando, assim, um movimento livre de até 360° . A seguir, apresentamos a modelagem matemática do sistema.

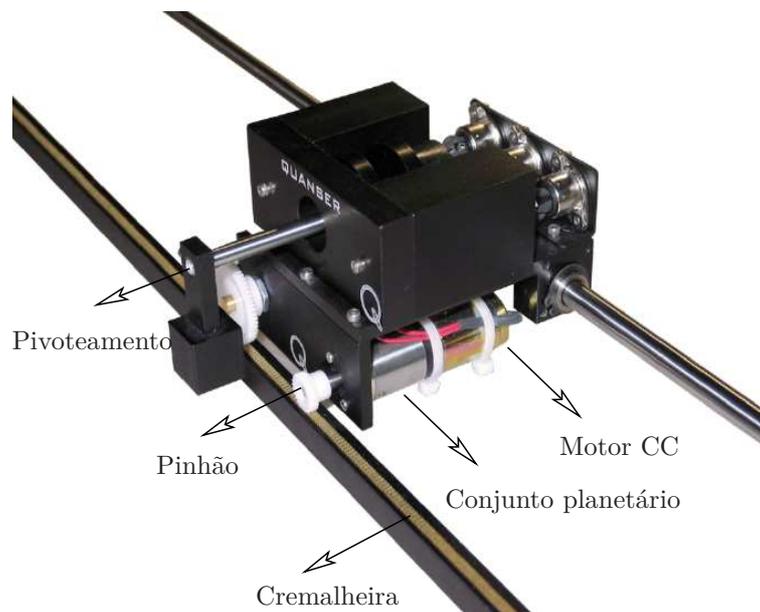


Figura 2: Sistema IP02, retirado de Quanser, User Manual 2012

2.2 Equacionamento

A metodologia utilizada para obtenção das equações de movimento tem como base as leis que regem a dinâmica de corpos sólidos, para o caso do carro, e as leis de Kirchhoff, para o motor. A Figura 3 mostra as variáveis de interesse e as constantes do sistema carro-pêndulo, com suas respectivas referências adotadas no modelo.

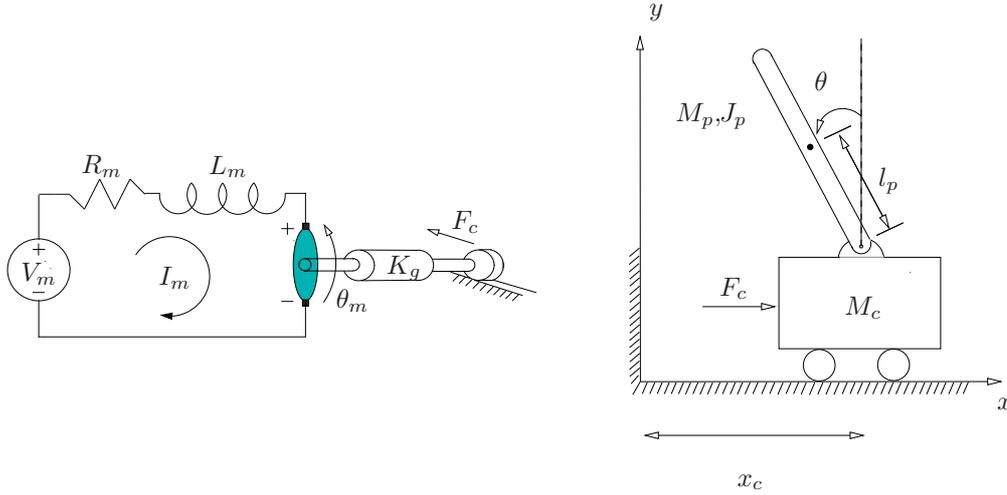


Figura 3: Diagrama do conjunto carro-pêndulo

2.2.1 Motor/caixa de transmissão

Do lado esquerdo da Figura 3, apresentamos o diagrama do motor com momento de inércia J_m , em que V_m é a tensão de entrada, I_m é a corrente, R_m a resistência de armadura, L_m a indutância do motor e k_m a constante de força contra-eletromotriz. Aplicando a Lei de Kirchhoff no circuito da Figura 3, obtemos

$$V_m - R_m I_m(t) - L_m \dot{I}_m(t) - k_m \dot{\theta}_m = 0 \quad (1)$$

em que θ_m é o ângulo de rotação do motor e $k_m \dot{\theta}_m$ é a força contra-eletromotriz. Considerando que a indutância do motor é desprezível, ou seja $L_m \approx 0$, tem-se que a corrente elétrica é dada por:

$$I_m = \frac{V_m - k_m \dot{\theta}_m}{R_m} \quad (2)$$

Por outro lado, temos que o torque gerado pelo motor, que será transferido à carga, é proporcional à corrente I_m da seguinte forma:

$$\tau_m = \eta_m k_t I_m \quad (3)$$

em que η_m é a eficiência do motor e k_t é a constante de proporcionalidade corrente-torque. Após alterado pela caixa de transmissão, com constante de redução k_g e eficiência η_g , o torque é responsável por aplicar a força

$$F_c = \frac{\eta_g k_g \tau_m}{r_{pm}} \quad (4)$$

no carro de massa M_c , como pode ser visto no lado direito da figura. As equações (1)-(4) descrevem a dinâmica do sistema motor/caixa de transmissão. Estas equações, em conjunto com a transformação de movimento no mecanismo pinhão-cremalheira, dado por

$$\dot{\theta}_m = \frac{k_g \dot{x}_c}{r_{pm}} \quad (5)$$

permitem a obtenção da força aplicada no carro em função da entrada de tensão V_m e da velocidade \dot{x}_c , do tipo:

$$F_c = \frac{\eta_g k_g k_t \eta_m}{r_{pm} R_m} \left(V_m(t) - \frac{k_m k_g}{r_{pm}} \dot{x}_c(t) \right) \quad (6)$$

É digno de nota que F_c é um parâmetro importante no estudo do sistema da Figura 1, pois é o elemento que relaciona a dinâmica do conjunto carro/pêndulo com o movimento do motor.

2.2.2 Carro

Como pode ser observado no lado direito da Figura 3, o carro movimentará um pêndulo de massa M_p e está imerso em um meio responsável por um atrito viscoso de constantes B_c e B_p no carro e no pêndulo, respectivamente. Os referenciais adotados

estão apresentados na figura. Aplicando o princípio de D'Alembert, a equação dinâmica do carro na horizontal é dada por:

$$M_c \ddot{x}_c + F_a + T_x + B_c \dot{x}_c = F_c \quad (7)$$

na qual T_x é a força causada pela haste do pêndulo. A força inercial da armadura F_a ocorre devido à ação de rotação do motor com torque de inércia $\tau_m = J_m \ddot{\theta}_m = J_m (k_g \ddot{x}_c / r_{pm})$, sendo expressa na forma:

$$F_a = \frac{\eta_g k_g \tau_m}{r_{pm}} = \frac{\eta_g k_g^2 J_m \ddot{x}_c}{r_{pm}^2} \quad (8)$$

Utilizando (6) e (8), obtemos que a equação do carro (7) torna-se

$$\mathcal{M}_{eq} \ddot{x}_c + \mathcal{B}_{eq} \dot{x}_c + T_x = \mathcal{A}_{eq} V_m \quad (9)$$

em que a massa equivalente assume a forma:

$$\mathcal{M}_{eq} = M_c + \frac{\eta_g k_g^2 J_m}{r_{pm}^2} \quad (10)$$

o coeficiente de atrito viscoso equivalente:

$$\mathcal{B}_{eq} = B_c + \frac{\eta_g \eta_m k_g^2 k_t k_m}{r_{pm}^2 R_m} \quad (11)$$

e, finalmente, o ganho de atuação:

$$\mathcal{A}_{eq} = \frac{\eta_g \eta_m k_g k_t}{r_{pm} R_m} \quad (12)$$

2.2.3 Pêndulo

O pêndulo possui momento de inércia J_p em relação ao seu centro de gravidade, que está localizado a uma distância l_p do ponto de pivoteamento. O movimento de translação é da forma

$$M_p \frac{d^2}{dt^2} (x_c - l_p \text{sen}(\theta)) - T_x = 0 \quad (13)$$

Adicionalmente, o movimento de rotação é descrito por:

$$(\tilde{J}_p + M_p l_p^2) \ddot{\theta} - M_p l_p \cos(\theta) \ddot{x}_c - M_p g l_p \sin(\theta) + B_p \dot{\theta} = 0 \quad (14)$$

A seguir, vamos acoplar as equações obtidas até então para encontrar aquelas que descrevem o conjunto carro/pêndulo.

2.2.4 Equações não lineares do sistema

Eliminando-se a força T_x a partir das equações (9) e (13), verificamos que as equações diferenciais não lineares, que descrevem o comportamento do carro $x_c(t)$ e o deslocamento angular do pêndulo $\theta(t)$ para todo $t \geq 0$, podem ser resumidas à:

$$(M_p + \mathcal{M}_{eq}) \ddot{x}_c + \mathcal{B}_{eq} \dot{x}_c - M_p l_p \cos(\theta) \ddot{\theta} + M_p l_p \sin(\theta) \dot{\theta}^2 = \mathcal{A}_{eq} V_m \quad (15)$$

$$(M_p l_p^2 + J_p) \ddot{\theta} + B_p \dot{\theta} - M_p l_p \cos(\theta) \ddot{x}_c - M_p l_p g \sin(\theta) = 0 \quad (16)$$

Desse modo, as equações (15)-(16) representam completamente o sistema dinâmico de interesse, o pêndulo IP02 Quanser.

As próximas etapas tratam da manipulação e análise de suas características.

2.3 Linearização

A linearização é tópico importante para o projeto do controlador, tanto no cálculo propriamente dito, quanto na análise da abrangência de um equacionamento mais simplista. Além disso, como ficará claro em seguida, o modelo linear é utilizado para identificação dos parâmetros físicos, visto que estes valores podem diferir daqueles fornecidos pelo fabricante devido ao desgaste dos trilhos, perdas de eficiência, entre outros. Desenvolvendo as equações (15)-(16) em série de Taylor até a primeira ordem e considerando a origem $(x_0, \theta_0) = (0, 0)$ como ponto de operação, tem-se:

$$(M_p + \mathcal{M}_{eq}) \ddot{x}_c + \mathcal{B}_{eq} \dot{x}_c - M_p l_p \ddot{\theta} = \mathcal{A}_{eq} V_m \quad (17)$$

$$(M_p l_p^2 + J_p) \ddot{\theta} + B_p \dot{\theta} - M_p g l_p \theta - M_p l_p \ddot{x}_c = 0 \quad (18)$$

As Equações (17)-(18) representam a dinâmica do sistema pêndulo invertido linearizado em relação à origem.

2.4 Representação de estado

A partir das Equações (15)-(16) e (17)-(18), que descrevem a dinâmica do sistema oriundas das subseções anteriores, é possível encontrar a representação em espaço de estado do conjunto. Elas são definidas conforme abaixo:

$$P : \begin{cases} \dot{x} = A x + B u \\ y = C x + D u \end{cases}$$

Onde x é o vetor de estado e u é a entrada de controle. No caso do pêndulo, temos que $x = [x_c \ \theta \ \dot{x}_c \ \dot{\theta}]' \in \mathbb{R}^4$ em que x_i representa a i -ésima componente do vetor x e $u = V_m$.

2.4.1 Caso linear

Feitas as considerações iniciais, basta substituir as variáveis de estado nas equações dinâmicas e obter as matrizes A e B . Após certo algebrismo, tem-se:

$$A = \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_T \\ 0 & M_p^2 l_p^2 g & -\mathcal{B}_{eq} (M_p l_p^2 + J_p) & -B_p M_p l_p \\ 0 & M_p l_p g (\mathcal{M}_{eq} + M_p) & -\mathcal{B}_{eq} M_p l_p & -B_p (\mathcal{M}_{eq} + M_p) \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$B = \frac{\mathcal{A}_{eq}}{J_T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_p l_p^2 + J_p \\ M_p l_p \end{bmatrix} \quad (20)$$

com $J_T = \mathcal{M}_{eq} (M_p l_p^2 + J_p) + J_p M_p$. As matrizes C e D representam a saída do sistema mecânico que, no modelo Quaser IP02, é medido por *encoders* nas variáveis de posição.

Logo, C e D tornam-se:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

2.4.2 Caso não linear

Em contrapartida, no caso não linear, as matrizes A e B são dependentes das variáveis de estado x_i , $i = 1, \dots, 4$. Desse modo, para encontrá-las, podemos reescrever as equações (15)-(16) na forma matricial, obtendo:

$$\Phi \dot{x} + \Gamma x + \Omega = \Psi u \quad (22)$$

Sendo

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_p + \mathcal{M}_{eq} & -M_p l_p \cos(x_2) \\ 0 & 0 & -M_p l_p \cos(x_2) & J_p + M_p l_p^2 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathcal{B}_{eq} & M_p l_p \sin(x_2) x_4 \\ 0 & 0 & 0 & B_p \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M_p l_p g \sin(x_2) \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{A}_{eq} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Isolando a variável \dot{x} , obtêm-se:

$$\dot{x} = -\Phi^{-1} \Gamma x + \Phi^{-1} \Psi u - \Phi^{-1} \Omega \quad (25)$$

que explicita $A = -\Phi^{-1}\Gamma$, $B = \Phi^{-1}\Psi$ e $E = -\Phi^{-1}\Omega$. Portanto, os resultados são mostrados abaixo:

$$A = \frac{1}{J_{Tn}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_{Tn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{Tn} \\ 0 & 0 & -\mathcal{B}_{eq}(M_p l_p^2 + J_p) & -B_p M_p l_p \cos(x_2) - M_p l_p x_4 \sin(x_2) (M_p l_p^2 + J_p) \\ 0 & 0 & -\mathcal{B}_{eq} M_p l_p \cos(x_2) & -B_p (\mathcal{M}_{eq} + M_p) - M_p^2 l_p^2 \cos(x_2) \sin(x_2) x_4 \end{bmatrix} \quad (26)$$

e

$$B = \frac{\mathcal{A}_{eq}}{J_{Tn}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_p l_p^2 + J_p \\ M_p l_p \cos(x_2) \end{bmatrix}, E = \frac{1}{J_{Tn}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_p^2 l_p^2 g \sin(x_2) \cos(x_2) \\ M_p l_p g \sin(x_2) (M_p + \mathcal{M}_{eq}) \end{bmatrix} \quad (27)$$

onde $J_{Tn} = -M_p^2 l_p^2 (\cos(x_2))^2 + (M_p + \mathcal{M}_{eq})(M_p l_p^2 + J_p)$. As matrizes A e B , juntamente com E , concluem a modelagem do sistema pêndulo invertido em modelo de estado não linear.

2.5 Validação do modelo

A validação pode ser realizada através da comparação entre a resposta medida do sistema físico e a simulada, utilizando o modelo matemático. A Tabela 1 mostra os parâmetros fornecidos pelo fabricante *Quanser*, bem como suas respectivas unidades. Para viabilizar esta etapa, deslocamos o conjunto carro/pêndulo para um novo ponto de

Variável	Valor	Unidade
M_p	0.209	[kg]
l_p	0.3302	[m]
B_p	0.0024	[N.m.s/rad]
J_p	0.00788	[kg.m ²]
\mathcal{A}_{eq}	1.0717	[N/V]
\mathcal{M}_{eq}	1.0731	[kg]
\mathcal{B}_{eq}	5.4	[N.s/m ²]

Tabela 1: Valores teóricos fornecidos pelo fabricante.

operação $(x_c, \alpha) = (0, \theta + \pi)$ que, diferente do anterior, representa um ponto de equilíbrio

estável. Nesta situação, o pêndulo está localizado na posição de equilíbrio vertical para baixo. Note que, naturalmente, as equações não-lineares

$$(M_p + \mathcal{M}_{eq}) \ddot{x}_c + \mathcal{B}_{eq} \dot{x}_c + M_p l_p \cos(\alpha) \ddot{\alpha} - M_p l_p \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2 = \mathcal{A}_{eq} V_m \quad (28)$$

$$(M_p l_p^2 + J_p) \ddot{\alpha} + B_p \dot{\alpha} + M_p l_p \cos(\alpha) \ddot{x}_c + M_p l_p g \sin(\alpha) = 0 \quad (29)$$

e sua versão linearizada em torno do novo ponto de equilíbrio $(x_0, \alpha_0) = (0, 0)$

$$(M_p + \mathcal{M}_{eq}) \ddot{x}_c + \mathcal{B}_{eq} \dot{x}_c + M_p l_p \ddot{\alpha} = \mathcal{A}_{eq} V_m \quad (30)$$

$$(M_p l_p^2 + J_p) \ddot{\alpha} + B_p \dot{\alpha} + M_p l_p g \alpha + M_p l_p \ddot{x}_c = 0 \quad (31)$$

são idênticas às anteriores, a menos de algumas trocas de sinal. Logo, submetemos o sistema físico e o seu modelo a uma tensão $V_m(t)$ quadrada com frequência de 4 [rad/s] e amplitude de 2.5 [V]. Realizamos a validação para ambos os modelos (linear e não-linear), entretanto, para esta entrada em particular, não houve diferença significativa entre as respostas de ambos. A Figura 4 mostra os sinais encontrados utilizando o modelo linear em preto e os sinais medidos do sistema físico em azul. Podemos notar que o modelo capturou adequadamente as características do sistema físico, mas apresentou diferença principalmente no deslocamento do carro, em termos de amplitude, e no deslocamento do pêndulo, em termos de fase. Estas diferenças podem ser explicadas pelas incertezas relacionadas aos parâmetros como coeficientes de atrito viscoso B_p e B_c , ou como valores de eficiência do motor η_m , que dependem do ambiente, das condições de realização do ensaio, bem como do desgaste dos equipamentos. Além das variáveis, nota-se que o efeito do cabo de transmissão do sinal dos *encoders* e a não-planicidade do eixo de corrida do carro contribuíram para o efeito visto. Assim, para assegurar que o modelo obtido seja uma descrição convincente da realidade e para eliminar as incertezas relacionadas aos parâmetros mencionados, é importante realizar a identificação do mesmo. A próxima etapa compreende a metodologia adotada para identificação, sua aplicação e uma discussão sobre a abrangência dos resultados obtidos.

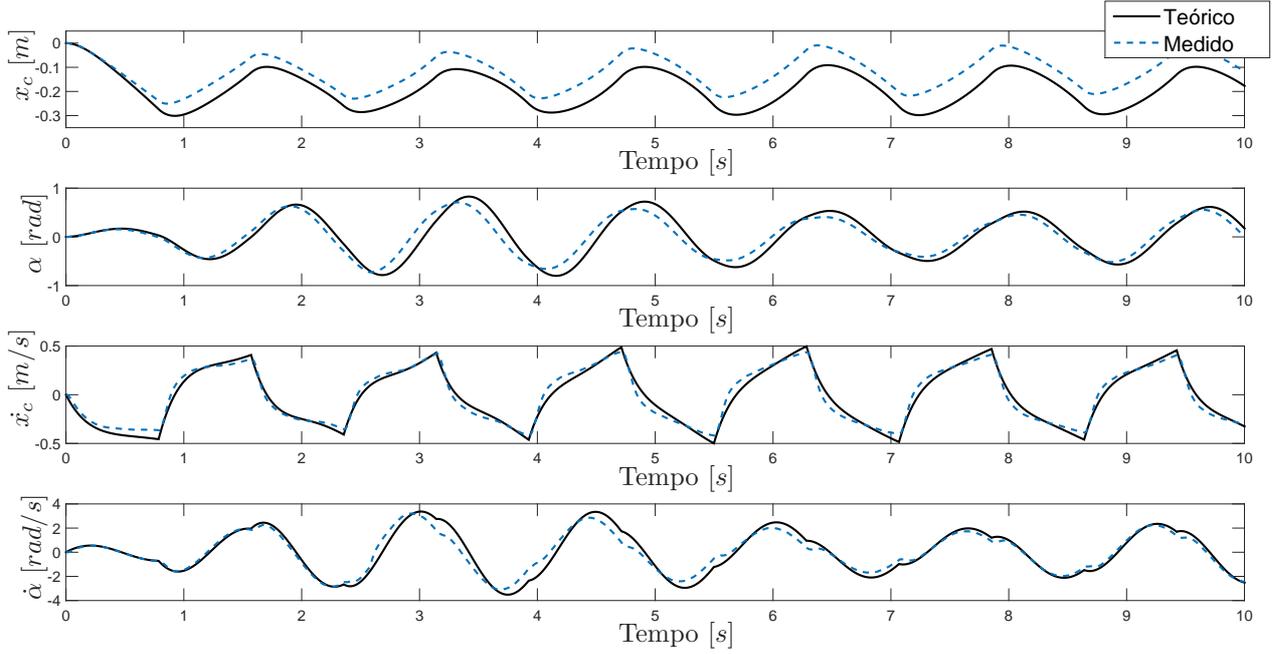


Figura 4: Resposta do sistema para entrada de onda quadrada

2.5.1 Identificação dos parâmetros físicos

Na seção anterior, realizamos a modelagem do sistema mecânico pêndulo invertido acoplado a um carro. As disparidades encontradas na comparação entre a simulação com os parâmetros fornecidos pelo fabricante e o sistema físico da *Quanser* indicam a necessidade de se aperfeiçoar o modelo de forma a obter regras de controle mais precisas. Logo, o estudo e a aplicação de técnicas de identificação é de suma relevância para a determinação de um modelo matemático adequado que descreve com precisão a dinâmica do sistema.

Neste momento, nosso objetivo é identificar os parâmetros relacionados aos coeficientes de atrito viscoso B_p , B_c e as eficiências η_m e η_g do motor e da caixa de transmissão, respectivamente. O foco nestes parâmetros vem da sua forte dependência a fatores externos, como desgaste do trilho e o ambiente experimental, enquanto que as demais grandezas M_c , M_p , e l_p podem ser facilmente medidas. Os ensaios realizados durante a identificação nos permitirão, também, identificar não linearidades que não foram levadas em conta durante a modelagem.

2.5.2 Identificação do conjunto carro-motor

Nota-se das equações (30)-(31) que é possível fazer a análise em separado do conjunto carro-motor e pêndulo. Podemos, neste caso, desacoplar o pêndulo do carro, eliminando os parâmetros $\alpha(t)$ e M_p em (30), obtendo apenas o movimento de translação pura do carro, que assumirá o formato

$$\mathcal{M}_{eq} \ddot{x}_c + \mathcal{B}_{eq} \dot{x}_c = \mathcal{A}_{eq} V_m \quad (32)$$

No sistema físico da *Quanser* esta adaptação pode ser feita simplesmente através da remoção do pêndulo da haste de apoio.

Definindo $\dot{x}_c = v_c$ obtemos uma equação diferencial linear de primeira ordem, que pode ser escrita na forma padrão:

$$\tau \dot{v}_c + v_c = \kappa_0 V_m \quad (33)$$

com:

$$\kappa_0 = \frac{\mathcal{A}_{eq}}{\mathcal{B}_{eq}}, \quad \tau = \frac{\mathcal{M}_{eq}}{\mathcal{B}_{eq}} \quad (34)$$

A resposta deste sistema a uma entrada degrau com ν_0 de amplitude $V_m(t) = \nu_0, \forall t \geq 0$, é dada por:

$$v_c(t) = \kappa_0 \nu_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (35)$$

o que permite a fácil identificação dos parâmetros de constante de tempo τ e do ganho κ_0 . De fato, o procedimento para identificar os parâmetros passa por duas etapas bastante simples:

- Fazendo $t \rightarrow \infty$ é fácil verificar que $\kappa_0 \nu_0$ é o valor em regime permanente de $v_c(t)$;
- Para $t = \tau$ temos que $v_c(\tau) = \kappa_0 \nu_0 (1 - e^{-1})$ e, portanto, τ é o instante em que a resposta $v_c(t)$ atinge 63% do seu valor de regime.

Note, entretanto, que realizando apenas este ensaio para a determinação de κ_0 e τ não é possível encontrar separadamente os três parâmetros de interesse \mathcal{A}_{eq} , \mathcal{M}_{eq} e

\mathcal{B}_{eq} . Esta dificuldade pode ser contornada com o auxílio de um ensaio extra, de mesmo formato. A ideia é acoplar uma massa conhecida ao carro M_k , de forma que a equação dinâmica resultante seja idêntica a (33), mas com a nova constante de tempo

$$\tau' = \frac{\mathcal{M}_{eq} + M_k}{\mathcal{B}_{eq}} \quad (36)$$

que, juntamente com (34), nos permite determinar

$$\mathcal{B}_{eq} = \frac{M_k}{\tau' - \tau}, \quad \mathcal{M}_{eq} = \mathcal{B}_{eq}\tau, \quad \mathcal{A}_{eq} = \mathcal{B}_{eq}\kappa_0 \quad (37)$$

É interessante o fato de que esta simples repetição da metodologia, porém agora com uma alteração no sistema físico, permita que encontremos as três grandezas de interesse. Além disso, podemos notar que o ganho estacionário no segundo ensaio deve ser idêntico ao do primeiro $\kappa'_0 = \kappa_0$, o que representa um ponto de conferência para a validação do método.

Uma vez que a metodologia está definida, os dois ensaios foram realizados em bancada experimental com o sistema do fabricante *Quanser* e utilizando uma massa $M_k = 0.25 [kg]$. A identificação foi realizada para uma tensão de entrada de 4 [V]. Os resultados estão apresentados na Tabela 2. A identificação realizada mostra, como esperado, que

Ensaio	$\tau [s]$	κ_0	$\frac{rad}{V.m.s}$
Primeiro	0.1765	0.1791	
Segundo	0.2111	0.1748	

Tabela 2: Parâmetros identificados

$\kappa_0 \approx \kappa'_0$ com uma discrepância pequena pouco maior que 2%. Podemos, finalmente, determinar o valor dos parâmetros da equação (32) como seguem $\mathcal{A}_{eq} = 1.2923 [N/V]$, $\mathcal{B}_{eq} = 7.2174 [N.s/m^2]$ e $\mathcal{M}_{eq} = 1.2739 [kg]$.

Para fins de validar o modelo identificado, quatro entradas do tipo degrau foram aplicadas. A Figura 5 apresenta, no lado esquerdo, a velocidade para a entrada degrau unitário e, no lado direito, a velocidade para um degrau de 3 [V]. O comportamento para

as entradas de 2 e 4 [V] foram omitidos, pois são similares à resposta para a entrada de 3 [V].

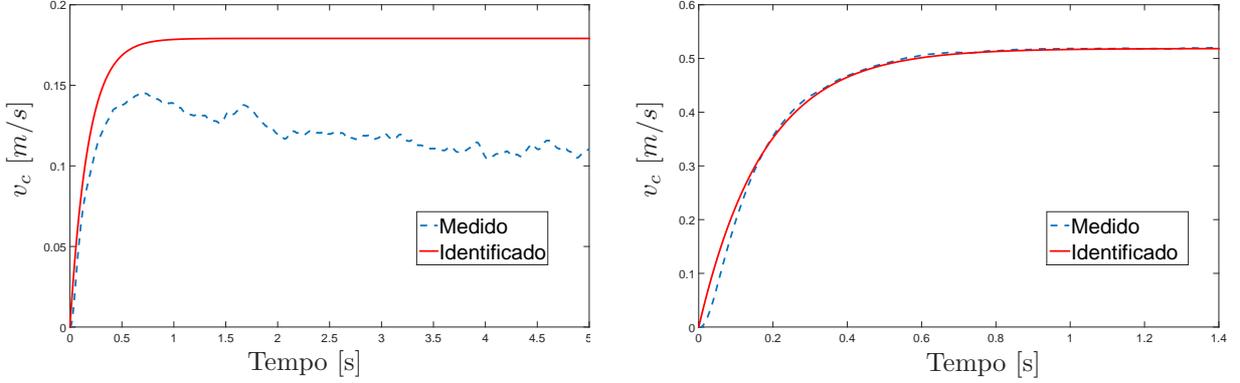


Figura 5: Resposta do conjunto carro-motor

Observa-se a grande discrepância entre os valores medidos e aqueles obtidos através do modelo identificado no gráfico do lado esquerdo. O fenômeno ocorre pois, para uma entrada degrau de 1 [V], a inércia do cabo de ligação do *encoder* não pode ser desprezada e atua como uma forte perturbação externa que tende a retardar o movimento do carro. Além disso, sabe-se que a velocidade em regime permanente é proporcional à intensidade do degrau aplicado e, para 1 [V], o módulo da velocidade é suficientemente baixo e torna o atrito de Coulomb bastante significativo. Este mesmo efeito pode ser notado e comprovado no gráfico do lado direito da figura. Para $v_c < 0.3$ [m/s], há uma disparidade entre a curva identificada e a curva medida pelas razões já mencionadas. Acima deste patamar, o modelo recupera fielmente o comportamento do sistema físico.

2.5.3 Identificação do pêndulo

Para identificar os parâmetros da equação (31) trava-se o movimento do carro e considera-se somente a oscilação do pêndulo. Neste caso \ddot{x}_c é eliminada da equação (31), que pode ser escrita como

$$\ddot{\alpha} + 2\xi\omega_n\dot{\alpha} + \omega_n^2\alpha = 0 \quad (38)$$

em que:

$$2\xi\omega_n = \frac{B_p}{(M_p l_p^2 + J_p)}, \quad \omega_n^2 = \frac{M_p l_p g}{(M_p l_p^2 + J_p)} \quad (39)$$

Verifica-se que, a partir da determinação da frequência natural não-amortecida ω_n e do fator de amortecimento ξ , é possível obter os parâmetros B_p e J_p desejados. Os desenvolvimentos que seguem foram baseados em [13]. De fato, considerando que o pêndulo parte do repouso com condição inicial $\alpha(0) = \alpha_0$ e, aplicando a Transformada de Laplace em (38) obtemos

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}(s) &= \frac{\alpha_0 (s + 2\xi\omega_n)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \alpha_0 \left(\frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \left(\frac{\xi\omega_n}{\omega_d} \right) \frac{\omega_d}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right)\end{aligned}$$

em que $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$ é a frequência natural amortecida. A transformada inversa de Laplace, por sua vez, nos permite encontrar a resposta no tempo do sistema da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \frac{\alpha_0 e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_d} (\omega_d \cos(\omega_d t) + \xi\omega_n \text{sen}(\omega_d t)) \\ &= \frac{\alpha_0 e^{-\xi\omega_n t}}{\text{sen}(\phi)} \text{sen}(\omega_d t + \phi)\end{aligned}\tag{40}$$

em que:

$$\text{tg}(\phi) = \frac{\omega_d}{\xi\omega_n} = \sqrt{\xi^{-2} - 1}\tag{41}$$

para $0 < \xi < 1$. É importante notar que, a partir da equação (40), a derivada de $\alpha(t)$ no tempo nos permite observar que os pontos de máximo e mínimo da função satisfazem a regra $\text{tg}(\omega_d t + \phi) = \text{tg}(\phi)$, ou seja:

$$\omega_d t_i = i\pi, \quad i = 0, 1, 2, \dots\tag{42}$$

Logo, como $\omega_d(t_{i+1} - t_i) = \pi$, temos que para os m pontos de máximo e mínimo obtidos da medida do deslocamento, o valor médio fornece a relação:

$$\omega_d = \frac{(m-1)\pi}{\sum_{i=1}^{m-1} (t_{i+1} - t_i)}\tag{43}$$

Com a aplicação dos mesmos instantes de tempo na equação (40), obtemos:

$$\alpha(t_i) = \alpha_0 e^{-\xi \omega_n t_i} (-1)^i, i = 0, 1, 2, \dots \quad (44)$$

que faz com que os pontos de máximo e mínimo satisfaçam a relação:

$$\frac{|\alpha(t_{i+1})|}{|\alpha(t_i)|} = e^{-\xi \omega_n (t_{i+1} - t_i)} = e^{-\frac{\pi}{\text{tg}(\phi)}} \quad (45)$$

Por fim, de maneira equivalente, após algumas manipulações algébricas, chegamos à igualdade

$$\text{tg}(\phi) = \frac{(m-1)\pi}{\sum_{i=1}^{m-1} (\ln(|\alpha(t_i)|) - \ln(|\alpha(t_{i+1})|))} \quad (46)$$

Observe que, após determinar ω_d a partir de (43), a utilização da equação (46), juntamente com (41) nos permite obter o valor do fator de amortecimento ξ e, consequentemente, da frequência natural não-amortecida ω_n , concluindo o procedimento adotado.

No sistema físico, fixou-se o carro de maneira que este não influenciasse nas leituras de $\alpha(t)$ e deslocou-se pêndulo até a condição inicial $\alpha_0 = 0.2562$ [rad]. Utilizando os valores de máximo e mínimo de $\alpha(t)$, determinamos ξ , ω_n e, consequentemente, os parâmetros B_p e J_p desejados. Repetimos este ensaio para a condição inicial $\alpha_0 = 0.3912$ rad, sendo que a média dos valores obtidos está apresentada na Tabela 3.

Parâmetros identificados - Pêndulo			
ξ	ω_n [rad/s]	B_p [N.m.s/rad]	J_p [kg.m ²]
0.0029	4.7726	0.00084	0.0066

Tabela 3: Parâmetros identificados do pêndulo

A Figura 6 compara a posição angular medida com a obtida a partir do modelo identificado. Foram utilizados $m = 58$ pontos para o procedimento. Apresentamos a resposta apenas a partir dos 20 [s] iniciais, haja vista que o ajuste para $t \leq 20$ [s] é fiel às medidas do sistema.

Nota-se que a condição de sistema subamortecido é encontrada na resposta $\alpha(t)$. Observe que, a partir dos 60 [s], as duas curvas começam a se diferenciar e os pontos

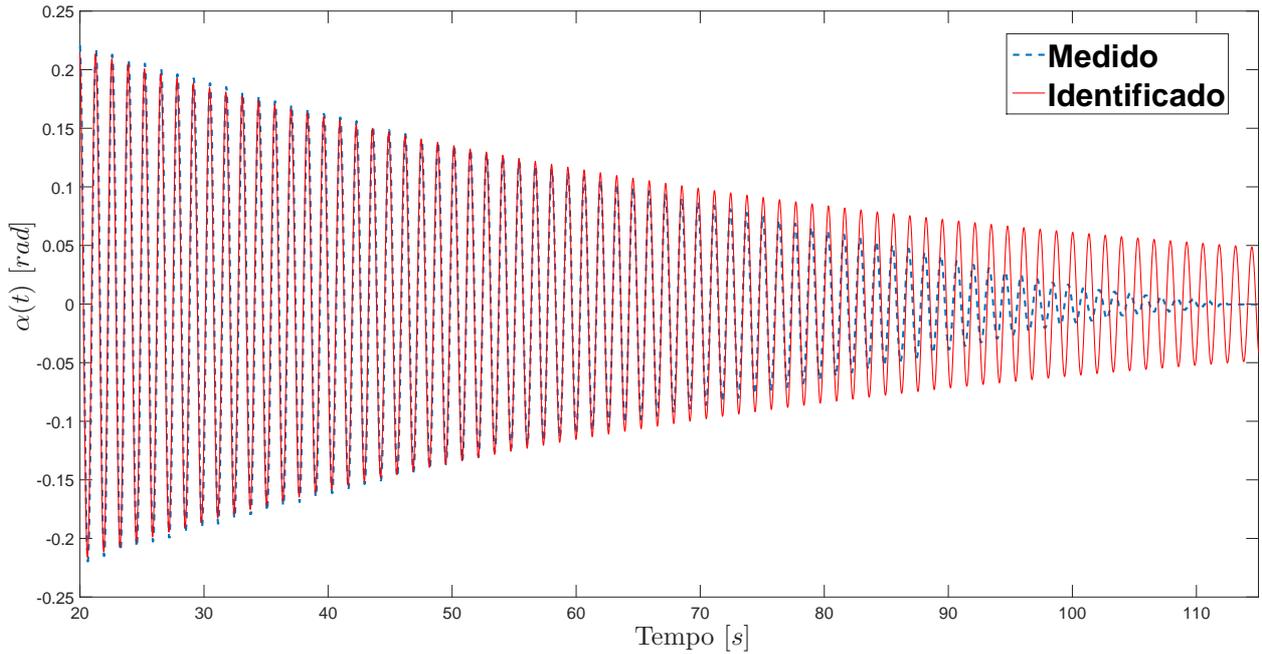


Figura 6: Deslocamento angular do pêndulo

coletados no ensaio tendem mais rapidamente à origem do que o sistema identificado. Este fato está relacionado à omissão no modelo, da força de atrito de Coulomb, que atua no pêndulo sempre que a velocidade muda de sentido e sua influência cresce quanto menor é a velocidade angular do pêndulo. Utilizaremos os valores de ξ e ω_n encontrados durante o processo de identificação para a determinação de B_p e J_p , cujos valores serão apresentados a seguir.

2.5.4 Comparação dos resultados

Os resultados obtidos nas sessões anteriores são resumidos na Tabela 4. É notável uma diferença significativa entre os valores fornecidos pelo fabricante *Quanser* e os valores obtidos na identificação do sistema. Esta disparidade torna-se importante na variável B_p , que é 65% menor do que o valor fornecido pelo fabricante.

A Figura 7 faz a comparação entre resposta do sistema real, o modelo com parâmetros identificados e o modelo com parâmetros *Quanser*. Aplicou-se uma forma de onda quadrada com frequência de 4 [rad/s] e amplitude de 2.5 [V] na entrada $V_m(t)$. A

Variáveis identificadas <i>versus</i> fornecidas				
—	Fornecido	Identificado	Unidade	Varição
\mathcal{A}_{eq}	1.0717	1.2923	$[N/V]$	21%
\mathcal{B}_{eq}	5.4	7.22	$[N.s/m^2]$	34%
\mathcal{M}_{eq}	1.0598	1.2739	$[kg]$	20%
B_p	0.0024	0.00084	$[N.m.s/rad]$	65%
J_p	0.0079	0.0066	$[kg.m^2]$	16%

Tabela 4: Comparação entre os resultados

curva em linha tracejada azul representa a resposta experimental do conjunto. A linha cheia vermelha simula o modelo do pêndulo com parâmetros identificados e, finalmente, a linha cheia preta simula o modelo com parâmetro fornecidos pelo fabricante *Quanser*. É notável que a identificação do sistema utilizando a metodologia apresentada permitiu a

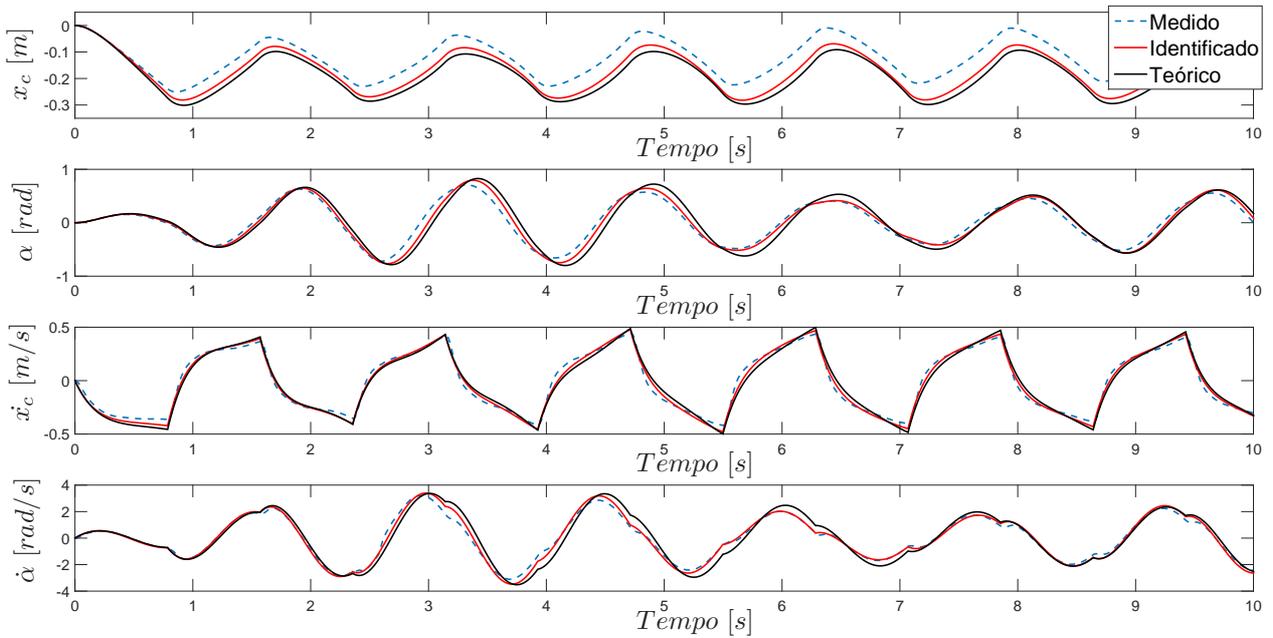


Figura 7: Comparação do sistema para onda quadrada

obtenção de um modelo mais preciso do que aquele fornecido pelo fabricante. Isto ocorre devido à maior proximidade das variáveis identificadas para o sistema real, uma vez que o desgaste de uso e condições de laboratório influenciam nestes fatores. Porém, também é importante discutir os problemas do modelo em si. A resposta da simulação com parâmetros identificados define bem a dinâmica do sistema, embora note-se que há uma pequena

defasagem, principalmente na variável α e sua derivada. A explicação para este fenômeno se dá devido à não linearidades, como o atrito de Coulomb, que não foram considerados no modelo. Para a variável x_c , a maior disparidade está na amplitude do deslocamento. Neste caso, os fatores externos são responsáveis pelo efeito, pois a influência do cabo do *encoder* e a não planicidade do trilho de corrida alteram a dinâmica. Apesar disso, é fato que o modelo engloba com bastante eficiência o movimento do conjunto como um todo, e segue corretamente os dados coletados do ensaio. Verificamos, então, de maneira clara, que o modelo é suficientemente adequado para a determinação de regras de controle.

Os valores da Tabela 4, aplicados à dinâmica linear do pêndulo invertido modelada pelas matrizes (19)-(20), nos proporcionam os seguintes resultados

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1.2139 & -5.4713 & -0.0015 \\ 0 & 25.5963 & -12.7038 & -0.0311 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.9794 \\ 2.2759 \end{bmatrix} \quad (47)$$

que representam o sistema pêndulo invertido linear do fabricante *Quanser*.

3 Controle Multiobjetivo Através da Rede

Considere um sistema a tempo contínuo com a seguinte realização no espaço de estado

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) + B_{\sigma(t)} u(t) + H_{\sigma(t)} w(t), x(0) = 0 \quad (48)$$

$$z(t) = E_{\sigma(t)} x(t) + F_{\sigma(t)} u(t) \quad (49)$$

na qual $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ é a entrada exógena e $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída controlada. A lei de controle possui a seguinte estrutura $u(t) = K_{\sigma(t)} x(t)$ em que $\{K_1, \dots, K_N\}$ são ganhos de realimentação de estado a ser determinados em conjunto com a regra de comutação $\sigma(x) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \{1, \dots, N\} := \mathbb{K}$. Esta lei deve

assegurar estabilidade e um limitante superior adequado para o custo funcional \mathcal{H}_2 dado por

$$J_2(\sigma) = \sum_{k=1}^{n_w} \|z_k\|_2^2 \quad (50)$$

em que z_k é a saída correspondente à entrada impulsiva $w(t) = \delta(t)e_k$, a qual representa a aplicação de um impulso unitário no k -ésimo canal (e_k é a k -ésima coluna da matriz identidade). Nota-se que o índice $J_2(\sigma)$ se iguala à norma \mathcal{H}_2 ao quadrado do subsistema i quando $\sigma(t) = i$, $\forall t \geq 0$. Este problema já foi tratado na literatura, mais especificamente, nas referências [4] e [12]. As condições de projeto dependem de uma subclasse especial de matrizes de Metzler \mathcal{M}_c composta por matrizes $\Pi = \{\pi_{ji}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ com as seguintes propriedades

$$\pi_{ji} \geq 0, \forall i \neq j \text{ e } \sum_{j=1}^N \pi_{ji} = 0, \forall i \in \mathbb{K} \quad (51)$$

É fácil notar que $\pi_{ii} \leq 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$. Definindo $\text{He}\{X\} = X + X'$ como sendo o operador Hermitiano para a matriz quadrada X , podemos apresentar o teorema a seguir, disponível em [4], que fornece as condições para o cálculo dos controladores e da regra de comutação.

Teorema 1 *Se existirem matrizes simétricas S_i , T_{ij} , matrizes Y_i para $j \neq i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_c$ satisfazendo as desigualdades de Lyapunov-Metzler*

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{A_i S_i + B_i Y_i\} + \sum_{j \neq i \in \mathbb{K}} \pi_{ji} T_{ij} & \bullet \\ E_i S_i + F_i Y_i & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (52)$$

$$\begin{bmatrix} T_{ij} + S_i & \bullet \\ S_i & S_j \end{bmatrix} > 0, \quad i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (53)$$

então a regra de comutação

$$\sigma(x(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x(t)' S_i^{-1} x(t) \quad (54)$$

e os ganhos de realimentação de estado $K_i = Y_i S_i^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{K}$ fazem com que a origem $x = 0$ do sistema em malha fechada seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Ademais, a desigualdade $J_2(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(Q_i)$ é satisfeita

sempre que existirem matrizes Q_i para todo $i \in \mathbb{K}$ tais que as seguintes LMIs

$$\begin{bmatrix} Q_i & \bullet \\ H_i & S_i \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (55)$$

sejam válidas.

Um dos pontos mais importantes deste teorema é que ele garante estabilidade do sistema em malha fechada mesmo que todos os subsistemas sejam não-controláveis e não-estabilizáveis, ou seja, ainda que não seja possível determinar K_i que garanta estabilidade de cada um dos respectivos subsistemas (A_i, B_i) , $i \in \mathbb{K}$. De fato, definindo $A_{M_i} = A_i + B_i K_i$ e $E_{M_i} = E_i + F_i K_i$ as desigualdades (52) e (53) são equivalentes a

$$\text{He} \left\{ P_i \left(A_{M_i} + \frac{\pi_{ii}}{2} I \right) \right\} + \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} P_j + E_{M_i}' E_{M_i} < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (56)$$

e, como $\pi_{ii} \leq 0$, as matrizes A_{M_i} , $\forall i \in \mathbb{K}$ não precisam ser estáveis como condição necessária. Além disso, como apresentado em [14], a função de comutação apresentada neste teorema é consistente, ou seja, sempre fornece um desempenho no mínimo igual ao melhor desempenho dos subsistemas.

Nosso objetivo é utilizar este resultado para tratar do controle \mathcal{H}_2 do pêndulo invertido com representação em espaço de estado

$$\mathcal{G} := \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Hw(t), \quad x(0) = 0 \\ z(t) &= E_{\sigma(t)} x(t) + F_{\sigma(t)} u(t) \end{cases} \quad (57)$$

na qual a saída $z(t)$ passa a ser definida por N critérios diferentes e conflitantes, que caracterizam um problema de controle multiobjetivo como apresentado em [11]. Utilizaremos neste trabalho $N = 2$ saídas diferentes aplicadas à dinâmica do pêndulo. Note que o sistema (57) pode ser escrito de forma equivalente com a mesma equação, mas considerando $w(t) = 0$ e $x(0) = H$. A dificuldade reside na implementação prática da lei de controle proposta no Teorema 1 que, em geral, exige uma frequência de comutação muito elevada. Na prática, este efeito induz a presença de trepidação no sistema, po-

dendo ocasionar danos ao conjunto. Para contornar este efeito, é necessária uma regra de comutação que garanta estabilidade para frequências de comutação limitadas, o que também viabiliza o controle através de redes de comunicação, pois permite respeitar a sua largura de faixa. Algumas propostas podem ser encontradas em [1], [9] e [10]. Neste trabalho, adotou-se a estratégia de trabalhar com o sistema contínuo amostrado de tal maneira que as normas deste e do sistema discreto sejam idênticas.

Mais detalhes e resultados estão disponíveis no artigo [5]. As próximas seções apresentam a técnica de discretização utilizada e o controle multiobjetivo discreto aplicados ao pêndulo invertido e implementado através de uma rede de comunicação.

3.1 Discretização exata

A realização do controle através de redes de comunicação é suscetível a eventos intrínsecos de um canal imperfeito. Podemos citar a quantização e atraso, largura de faixa limitada e perda de pacotes de dados como os efeitos principais. Eles são amplamente discutidos e bem fundamentados na literatura, com destaque para [23]. Neste trabalho nos atentamos à largura de faixa limitada, que será modelada para aplicação no controle multiobjetivo. Assim, dedicamos esta seção ao desenvolvimento da teoria necessária à discretização exata do sistema contínuo amostrado.

Considere o modelo do pêndulo invertido (57), mas com $u_k(t)$ no lugar de $u(t)$ em que

$$u_k(t) = u(t_k), \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (58)$$

é o esforço de controle que será o mesmo entre dois instantes de amostragem sucessivos, com período $t_{k+1} - t_k = T > 0, \forall k \in \mathbb{N}$, ou seja, até que haja uma atualização de seu valor por intermédio da rede com largura de faixa de $1/T$ [Hz]. Definindo

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)} \quad (59)$$

$$\mathcal{E}_\sigma = \begin{bmatrix} E_\sigma & F_\sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_z \times (n_x+n_u)} \quad (60)$$

podemos apresentar o seguinte teorema, que fornece um sistema discreto equivalente em termos de custo \mathcal{H}_2 .

Teorema 2 *Considere o sistema dinâmico \mathcal{G} , e defina matrizes $(A_d, B_d, E_{di}, F_{di})$ de dimensões compatíveis tais que*

$$e^{AT} = \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$Q_i = \int_0^T e^{A't} \mathcal{E}'_i \mathcal{E}_i e^{At} dt = \begin{bmatrix} E'_{di} \\ F'_{di} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E'_{di} \\ F'_{di} \end{bmatrix}', \quad i \in \mathbb{K} \quad (62)$$

O sistema a tempo discreto equivalente é dado por

$$\mathcal{G}_e := \begin{cases} x(k+1) & = A_d x(k) + B_d u_k, \quad x(0) = H \\ z(k) & = E_{d\sigma} x(k) + F_{d\sigma} u_k \end{cases} \quad (63)$$

e a seguinte igualdade é satisfeita

$$\int_0^\infty z(t)' z(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{N}} z'_k z_k \quad (64)$$

É digno de nota que a relação apresentada no Teorema 2 é exata no sentido que o custo \mathcal{H}_2 do sistema a tempo contínuo é idêntico ao do sistema a tempo discreto. As matrizes $(A_d, B_d, E_{di}, F_{di})$, $i \in \mathbb{K}$, são bem definidas, visto que são encontradas de técnicas como o cálculo de exponencial de matriz e decomposição em valores singulares. As provas para estes resultados se encontram em [23] e [24], assim como uma discussão mais abrangente.

O Teorema 2 foi aplicado às matrizes A e B , definidas em (47), que representam a dinâmica do pêndulo invertido linear identificado na Seção 2 para um período de amostragem de $T = 0.1$ [s]. A condição inicial H e as saídas escolhidas para o controle

multiobjetivo são

$$E_1 = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 \\ 4^\circ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.001 \end{bmatrix} \quad (66)$$

Podemos notar que o par (E_1, F_1) penaliza o esforço de controle, mas permite que o carro tenha velocidades elevadas. De maneira conflitante, o par (E_2, F_2) permite valores elevados de esforço de controle, mas exige que a velocidade do carro seja reduzida.

O sistema discreto equivalente é o seguinte

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0.0052 & 0.0770 & 0.0002 \\ 0 & 1.1283 & -0.0545 & 0.1041 \\ 0 & 0.0979 & 0.5767 & 0.0051 \\ 0 & 2.5985 & -1.0242 & 1.1251 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 0.0041 \\ 0.0098 \\ 0.0758 \\ 0.1835 \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$E_{d1} = \begin{bmatrix} -3.1621 & 1.9731 & -0.1695 & 0.0973 \\ -0.0348 & -0.0445 & 0.0982 & -0.0555 \\ 0 & -0.0001 & 0.0004 & -0.0002 \\ 0.0055 & 0.0094 & 0.0045 & -0.0030 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0.0001 \end{bmatrix}, F_{d1} = \begin{bmatrix} 0.0019 \\ -0.0017 \\ 0.0316 \\ -0.0001 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$E_{d2} = \begin{bmatrix} -3.1621 & 1.9731 & -0.1698 & 0.0973 \\ -0.0161 & -0.0020 & 0.2651 & -0.0213 \\ -0.0316 & -0.0487 & 0.0061 & -0.0506 \\ 0.0034 & 0.0058 & -0.0007 & -0.0084 \\ -0.0012 & -0.0021 & -0.0001 & 0.0020 \end{bmatrix}, F_{d2} = \begin{bmatrix} 0.0019 \\ 0.0102 \\ -0.0070 \\ -0.0059 \\ 0.0056 \end{bmatrix} \quad (69)$$

Note que as dimensões de $z(k)$ e $z(t)$ são diferentes. Isto ocorre pois a integral em (62) é semidefinida positiva e sua decomposição em valores singulares é dada por

$$Q_i = V_i X_i V_i' = \mathcal{E}_i' \mathcal{E}_i \quad (70)$$

em que $V_i \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$ e $X_i = X_i' \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$. Portanto, $\mathcal{E}_i = X_i^{1/2} V_i'$ em que $E_{di} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times n_x}$ e $F_{di} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times n_u}$ para todo $i \in \mathbb{K}$.

3.2 Sistema com comutação à tempo discreto

Tendo obtido o modelo equivalente discreto \mathcal{G}_e para o sistema contínuo \mathcal{G} , podemos aplicar as condições propostas em [6] para o projeto de uma lei de controle

$$u_k = K_\sigma x_k \quad (71)$$

que consiste na determinação conjunta de ganhos de realimentação de estado $\{K_1, \dots, K_N\}$ e da função de comutação $\sigma(x(k)) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{K}$, que asseguram um custo garantido \mathcal{H}_2 de desempenho. O teorema seguinte, disponível em [6], apresenta este resultado e utiliza a subclasse especial de matrizes de Metzler \mathcal{M}_d , composta por matrizes $\Pi = \{\pi_{ji}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ com as seguintes propriedades

$$\pi_{ji} \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^N \pi_{ji} = 1, \forall i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (72)$$

É fácil notar que $0 \leq \pi_{ii} \leq 1, \forall i \in \mathbb{K}$.

Teorema 3 *Se existirem matrizes simétricas S_i, T_{ij} , matrizes J_i, Y_i para todo $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$*

e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_d$ satisfazendo as desigualdades de Lyapunov-Metzler

$$\begin{bmatrix} S_i & \bullet & \bullet \\ A_d S_i + B_d Y_i & \mathcal{V}_i & \bullet \\ E_{di} S_i + F_{di} Y_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (73)$$

$$\begin{bmatrix} T_{ij} & \bullet \\ J_i & S_i \end{bmatrix} > 0, i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (74)$$

com $\mathcal{V}_i = J_i + J_i' - \sum_{j=1}^N \pi_{ji} T_{ij}$, então a regra de comutação

$$\sigma(x(k)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x(k)' S_i^{-1} x(k) \quad (75)$$

e os ganhos de realimentação de estado $K_i = Y_i S_i^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{K}$ fazem com que a origem $x = 0$ do sistema em malha fechada (63) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Ademais, a desigualdade $J_2(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(Q_i)$ é satisfeita sempre que existirem matrizes Q_i para todo $i \in \mathbb{K}$ tais que as seguintes LMIs

$$\begin{bmatrix} Q_i & \bullet \\ H & S_i \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \quad (76)$$

sejam válidas.

Da mesma forma do caso contínuo, é possível mostrar que como $0 \leq \pi_{ii} \leq 1$, nenhuma propriedade de estabilidade é exigida das matrizes em malha fechada $A_d + B_d K_i$, $\forall i \in \mathbb{K}$. A prova e uma discussão mais abrangente podem ser encontradas em [4] e [6]. A solução das condições do Teorema 3 pode ser realizada através de busca exaustiva em relação aos elementos da matriz $\Pi \in \mathcal{M}_d$ e a partir da solução de um conjunto de LMIs que, para o caso em questão, é uma tarefa bastante simples e computacionalmente viável, pois o sistema é composto de somente dois subsistemas.

3.3 Aplicação no pêndulo invertido

Resolvemos o Teorema 3 para o sistema \mathcal{G}_e , definido pelas matrizes (67)-(69). Observe que, para $N = 2$ subsistemas, a matriz de Metzler é do tipo $\Pi \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ dada por

$$\Pi = \begin{bmatrix} p & (1-q) \\ (1-p) & q \end{bmatrix} \quad (77)$$

Logo, o teorema pode ser resolvido sem dificuldades através de uma busca unidimensional em relação aos elementos (p, q) , com o auxílio do software MATLAB[®]. O passo de incrementação utilizado foi de 0.1. A Figura 8 apresenta um gráfico 3D que expressa o custo garantido \mathcal{H}_2 em relação aos elementos de Π . Nesta figura, o plano representa o

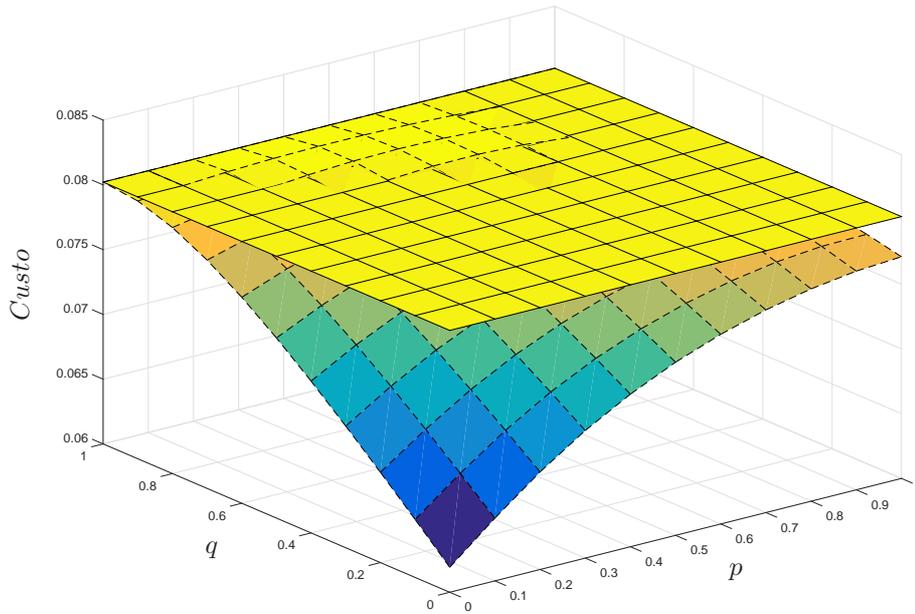


Figura 8: Custo garantido em função dos elementos da matriz de Metzler

custo \mathcal{H}_2 mínimo de ambos os sistemas isolados, que vale 0.0802. Mais especificamente, considerando isoladamente o primeiro subsistema, temos

$$K_1 = \begin{bmatrix} 45.8496 & -81.0764 & 25.1025 & -15.7083 \end{bmatrix} \quad (78)$$

e uma norma \mathcal{H}_2 ao quadrado de 0.0802. Enquanto que, considerando isoladamente o segundo subsistema, temos

$$K_2 = \begin{bmatrix} 82.1883 & -124.9026 & 38.9166 & -23.7426 \end{bmatrix} \quad (79)$$

e uma norma \mathcal{H}_2 ao quadrado de 0.1074. Utilizando o sistema com comutação o custo garantido \mathcal{H}_2 foi de 0.0619 e foi obtido para $(p, q) = (0, 0)$. Este valor representa um ganho de desempenho garantido de 23% em relação às técnicas de controle clássico. Resolvendo as condições do Teorema 3 para esta matriz Π obtivemos as seguintes matrizes definidas positivas

$$S_1^{-1} = \begin{bmatrix} 36.2792 & -26.0066 & 6.6809 & -3.4220 \\ -26.0066 & 22.5134 & -6.4969 & 3.4275 \\ 6.6809 & -6.4969 & 2.1862 & -1.1447 \\ -3.4220 & 3.4275 & -1.1447 & 0.6049 \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$S_2^{-1} = \begin{bmatrix} 31.5147 & -18.8330 & 4.4922 & -2.0584 \\ -18.8330 & 12.7061 & -3.5005 & 1.5996 \\ 4.4922 & -3.5005 & 1.3164 & -0.5859 \\ -2.0584 & 1.5996 & -0.5859 & 0.2655 \end{bmatrix} \quad (81)$$

as quais foram utilizadas para a implementação da regra de comutação, em conjunto com os ganhos de realimentação de estado

$$K_1 = \begin{bmatrix} 58.6348 & -69.3645 & 22.1655 & -12.5250 \end{bmatrix} \quad (82)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 63.5859 & -106.8128 & 32.7673 & -20.5192 \end{bmatrix} \quad (83)$$

Os controladores e a regra de comutação determinados foram incluídos em uma rotina na plataforma *Simulink* do software MATLAB[®] para a obtenção da evolução temporal dos estados do sistema. O custo verdadeiro obtido a partir de simulação numérica foi de $J_2(\sigma) = 0.0394 < 0.0619$ indicando que, na verdade, o ganho real de desempenho foi de

51%.

A Figura 9 compara a resposta no tempo para cada variável de estado, além de exibir o esforço de controle e a regra de comutação simulada. Os resultados são exibidos para o controle com comutação, controle clássico \mathcal{H}_2 para o subsistema 1 e controle clássico \mathcal{H}_2 para o subsistema 2.

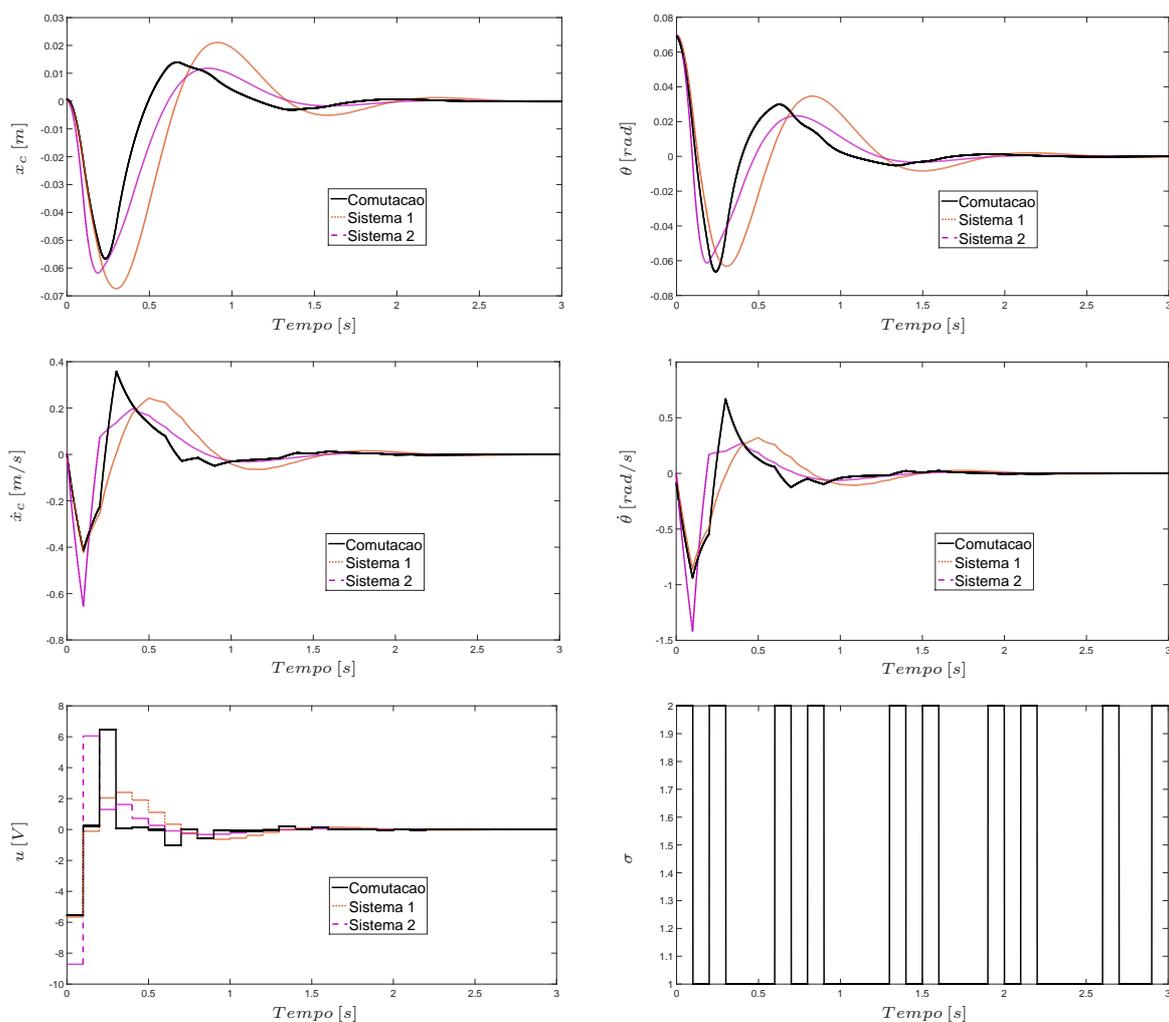


Figura 9: Trajetórias do estado, esforço de controle e regra de comutação simulada.

A validação da lei de controle proposta foi feita através de implementação da regra na planta do fabricante *Quanser*. Repetimos o ensaio 16 vezes e obtivemos as trajetórias apresentadas na Figura 10, que apresenta o evolução no tempo de todas as variáveis de estado, o esforço de controle e a regra de comutação. Em linha contínua preta estão os sinais obtidos por simulação no MATLAB, em azul as médias dos valores

medidos e a região sombreada é aquela definida por um desvio padrão.

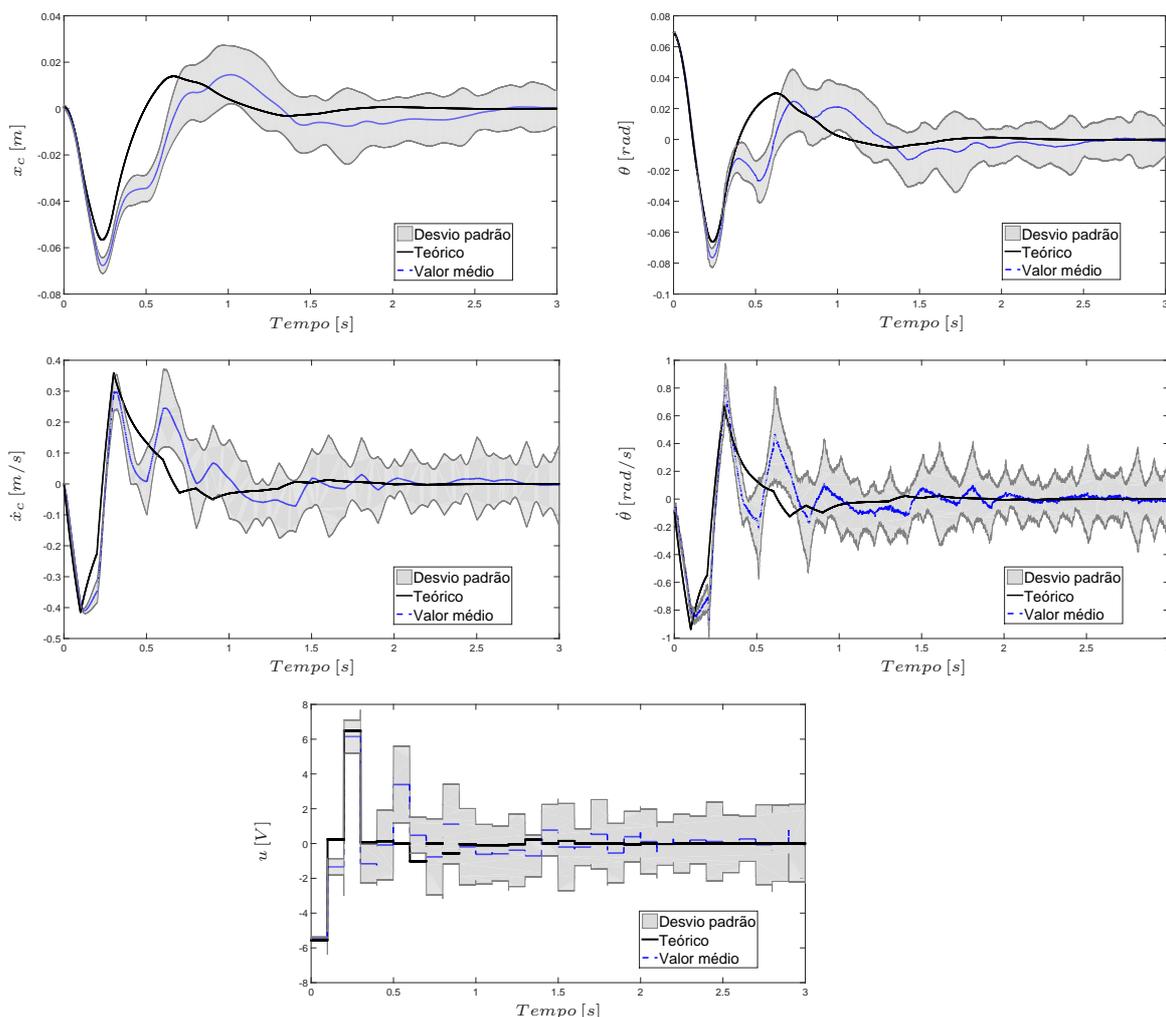


Figura 10: Trajetórias do estado e esforço de controle real.

Como pode ser notado, de maneira geral, a implementação da regra capturou corretamente a dinâmica do sistema com comutação. Para $t \leq 0.4$ [s] a resposta é fiel e precisa comparada à simulação computacional. Para $0.4 < t < 0.8$ [s] a resposta do conjunto perde sua fidelidade, pois, como já discutido na Seção 2, para velocidades baixas do carro, o sistema se torna muito sensível a não-linearidades que não foram levadas em conta durante a modelagem, como por exemplo, o atrito de Coulomb, a folga no conjunto pinhão-cremalheira e a influência do cabo do *encoder*. Para $t \geq 0.8$ [s], os estados evoluem para a origem $x = 0$, como esperado. É importante ressaltar a robustez da estratégia de controle face a diversos fenômenos e incertezas que foram ignorados durante

a modelagem do sistema. Mesmo diferindo sensivelmente dos resultados de simulação, as trajetórias sempre evoluem para a origem.

4 Perspectivas futuras

Como continuidade, ainda durante o mestrado, pretendemos generalizar os resultados apresentados para tratar do controle cooperativo de várias estações de trabalho IP02 da Quanser através do compartilhamento da mesma rede de comunicação. O esquema da arquitetura de controle a ser adotada está apresentada na Figura 11. Neste caso, a regra de comutação σ atuará como coordenadora do processo, que escolherá a cada instante de tempo qual planta deve receber o sinal de controle u_k atualizado, enquanto que as demais devem manter a última informação recebida. O controle global deve ser capaz de assegurar estabilidade e um custo garantido \mathcal{H}_2 de desempenho.

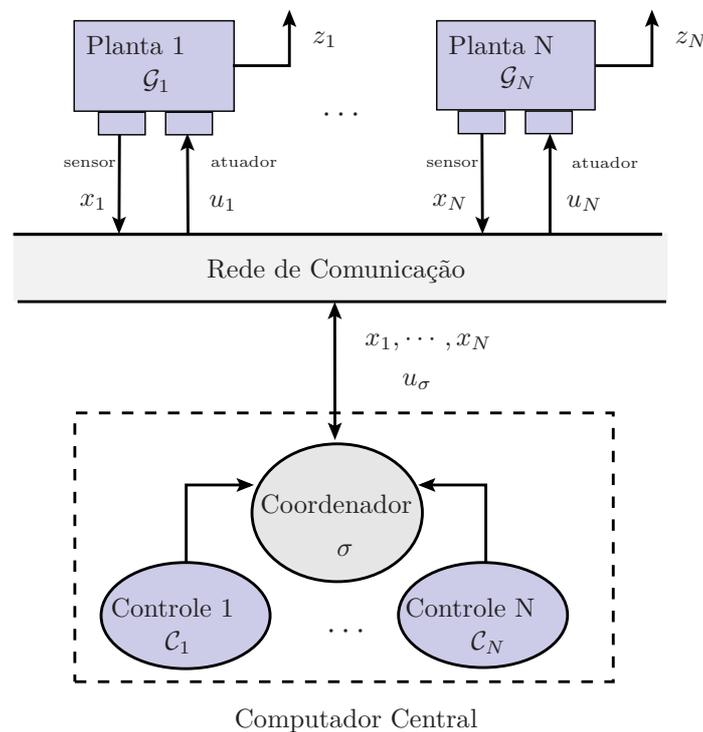


Figura 11: Arquitetura de Controle

5 Conclusão

Todas as etapas propostas foram realizadas de forma satisfatória. O trabalho permitiu o desenvolvimento de um modelo adequado do conjunto pêndulo invertido IP02 do fabricante *Quanser*, além do levantamento de algumas limitações para aplicação prática, como a influência de não linearidades para baixas velocidades. As vantagens do controle com comutação foram discutidas e sua implementação foi realizada através de redes de comunicação, tanto em um ambiente simulado quanto na prática. Nota-se um grande potencial na técnica, na qual o projeto conjunto da regra de comutação com os ganhos matriciais é uma promissora alternativa para o controle \mathcal{H}_2 .

Referências

- [1] L. I. Allerhand, U. Shaked, *Robust state-dependent switching of linear systems with dwell time*, IEEE Transactions on automatic control, vol. 58, pp. 994-1001, 2013.
- [2] A. M. de Oliveira, *Análise e controle de um sistema mecânico com dados transmitidos através de rede*, Dissertação de Mestrado, FEEC/UNICAMP, 2015.
- [3] L. F. de Oliveira, *Controle com comutação \mathcal{H}_∞ de um pêndulo invertido*, Trabalho de Graduação, FEM/UNICAMP, 2015.
- [4] G. S. Deaecto, *Projeto de controladores dinâmicos com comutação: Aplicação em sistemas mecânicos e conversores de potência CC-CC*, Tese de Doutorado, FEEC/UNICAMP, 2010.
- [5] G. S. Deaecto, J. C. Geromel, J. Daafouz, *Dynamic output feedback H_∞ control of switched linear systems*, Automatica, vol. 47, pp. 1713-1720, 2011.
- [6] G. S. Deaecto, M. Souza, J. C. Geromel *Discrete-time switched linear systems control design with application to networked control*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 60, pp. 877-881, 2015.
- [7] R. A. DeCarlo, M. S. Branicky, S. Pettersson, and B. Lennartson, *Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems*, IEEE Transactions on automatic control, vol. 88, pp. 1069–1082, 2000.
- [8] F. G. Dedini, *Projeto e otimização de uma transmissão planetária por rolos de tração*, Dissertação de Mestrado, FEM/UNICAMP, 1985.
- [9] C. Duan, F. Wu, *Analysis and control of switched linear systems via dwell-time min-switching*, Systems and Control Letters, vol. 70, pp. 8–16, 2014.
- [10] C. Duan, F. Wu, *Analysis and control of switched linear systems via modified Lyapunov-Metzler inequalities*, International Journal of Robust and nonlinear Control, vol. 24, pp. 276–294, 2014.

- [11] J. C. Geromel, G. S. Deaecto, P. Colaneri, *Multi-objective \mathcal{H}_2 control via switched linear systems*, IFAC Symposium on System, Structure and Control, 2007.
- [12] J. C. Geromel and G. S. Deaecto, *Switched state feedback control for continuous-time uncertain systems*, *Automatica*, vol. 45, pp. 593-597, 2009.
- [13] J. C. Geromel, R. H. Korogui, *Controle linear de sistemas dinâmicos: Teoria, ensaios práticos e exercícios*, Editora Edgard Blucher Ltda, 2011.
- [14] J. C. Geromel, G. S. Deaecto, J. Daafouz, *Suboptimal switching control consistency analysis for switched linear systems*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, pp. 1857-1861, 2013.
- [15] J. P. Hespanha, A. S. Morse, *Switching between stabilizing controllers*, *Automatica*, vol. 38, pp. 1905-1917, 2002.
- [16] J. P. Hespanha, P. Naghshtabrizi, Y. Xu, *A survey of recent results in networked control systems*, *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, pp. 138-162, 2007.
- [17] D. Liberzon, *Switching in systems and control*, Birkhäuser, 2003.
- [18] L. Ljung, K. Glover, *Frequency domain versus time domain methods in system Identification*, *Automatica*, vol. 17, pp. 71-86, 1981.
- [19] K. Ogata, *Engenharia de controle moderno*, Pearson Prentice Hall, ed. 5, pp. 61-62, 2010.
- [20] Quanser, *User manual, IP02 Linear Inverted Pendulum and IP02 Linear Pendulum Gantry Experiments*, Ontario, 2012.
- [21] V. C. Scarpa, *Controle com comutação \mathcal{H}_2 de um pêndulo invertido*, Trabalho de Graduação, FEM/UNICAMP, 2014.
- [22] R. Shorten, F. Wirth, O. Mason, K. Wulff, and C. King, *Stability criteria for switched and hybrid systems*, *SIAM Rev.*, vol. 49(4), pp. 545-592, 2007.

- [23] M. Souza, *Controle de sistemas dinâmicos através de redes de comunicação*, Dissertação de Mestrado, FEEC/UNICAMP, 2012.
- [24] M. Souza, G. S. Deaecto, J. C. Geromel, J. Daafouz, *Self-triggered linear quadratic networked control*, *Optimal Control, Applications and Methods*, vol. 35, pp. 524-538, 2014.
- [25] Z. Sun, and S. S. Ge, *Switched Linear Systems: Control and Design*, Springer, 2005.