

Controle Avançado de Sistemas

Projeto via Representação de Estado

Profa. Grace S. Deaecto

Faculdade de Engenharia Mecânica / UNICAMP
13083-860, Campinas, SP, Brasil.
grace@fem.unicamp.br

Segundo Semestre de 2018

NOTA AO LEITOR

Estas notas de aula foram baseadas nas seguintes referências :

- J. C. Geromel, R. H. Korogui, “*Controle Linear de Sistemas Dinâmicos - Teoria, Ensaio Práticos e Exercícios*”, 1ª Edição, Edgard Blucher Ltda, 2011.
- G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini, “*Feedback Control of Dynamic Systems*”, Prentice Hall, 2006.
- D. G. Luenberger, “*Introduction to Dynamic Systems : Theory, Model and Applications*”, New York : John Wiley & Sons, 1979.
- B. C. Kuo, F. Golnaraghi, “*Automatic Control Systems*”, John Wiley & Sons, 8th Edition, 2003.

- 1 Capítulo I : Análise de Sistemas LIT
 - Introdução : Sistemas Não-Lineares
 - Representação de Estado : Tempo Contínuo
 - Representação de Estado : Tempo Discreto
 - Matrizes Simétricas
 - Estabilidade : Critério de Lyapunov

Linearização

Considerando novamente o sistema $\dot{\xi} = f(\xi)$ na vizinhança do ponto de equilíbrio $\xi_e \in \mathbb{R}^{n_x}$, cada componente $f_i(\xi)$, $i = 1, \dots, n_x$, pode ser aproximada por **série Taylor considerada até a primeira ordem** :

$$f_i(\xi) \approx f_i(\xi_e) + \sum_{j=1}^{n_x} \frac{\partial f_i(\xi_e)}{\partial \xi_j} (\xi_j - \xi_{ej}), \quad i = 1, \dots, n_x$$

que pode ser escrita de forma mais compacta como

$$f(\xi) \approx f(\xi_e) + A(\xi - \xi_e)$$

em que $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é uma matriz quadrada com elementos

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}(\xi_e), \quad i, j = 1, \dots, n_x.$$

também chamada de matriz Jacobiana de $f(\xi)$.

Linearização

Para fins de ilustração, vamos linearizar o pêndulo para dois pontos de equilíbrio distintos. Note que neste caso

$$f_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_2, \quad f_2(\xi_1, \xi_2) = -(g/\ell)\text{sen}(\xi_1) - b/m\xi_2$$

Assim, temos

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}_{(\xi_{1e}, \xi_{2e})} x$$

No caso do pêndulo, temos :

Para $(\xi_{1e}, \xi_{2e}) = (0, 0)$: || Para $(\xi_{1e}, \xi_{2e}) = (\pi, 0)$:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g/\ell & -(b/m) \end{bmatrix} x \quad || \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/\ell & -b/m \end{bmatrix} x$$

Linearização

Para sistemas de segunda ordem é possível saber *a priori* como o sistema se comporta em torno do ponto de equilíbrio ξ_e através da análise dos autovalores da matriz A do sistema aproximado

$$\dot{x} = Ax$$

- **Autovalores reais distintos** : Considerando que $\lambda \neq \mu \in \mathbb{R}$ são os autovalores da matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $V = [v_\lambda \ v_\mu] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é a matriz dos autovetores associada, tais que :

$$V^{-1}AV = \Lambda = \text{diag}\{\lambda, \mu\}$$

Logo,

$$\dot{x} = \underbrace{V\Lambda V^{-1}}_A x \Rightarrow \dot{\eta} = \Lambda\eta$$

com $\eta = V^{-1}x$.

Linearização

A solução do sistema

$$\dot{\eta} = \Lambda\eta$$

é $\eta(t) = e^{\Lambda t}\eta_0$ e, portanto

$$x(t) = V \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix} V^{-1}x_0$$

Definindo $[c_\lambda \quad c_\mu]' = V^{-1}x_0$ obtemos

$$x(t) = (e^{\lambda t}c_\lambda)v_\lambda + (e^{\mu t}c_\mu)v_\mu$$

válido para $t \geq 0$.

Se os autovalores forem iguais uma perturbação infinitesimal em A faz com que eles se tornem diferentes e a análise anterior pode ser aplicada.

Linearização

- **Autovalores complexos** : Considerando que os autovalores e os autovetores são da forma $\sigma \pm j\omega$ e $v_\sigma \pm jv_\omega$, em que $\sigma \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$ e $v_\sigma \in \mathbb{R}^2$, $v_\omega \in \mathbb{R}^2$ e, portanto :

$$V^{-1}AV = \Lambda = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

e $V = [v_\sigma \quad v_\omega]$. Procedendo de forma similar à realizada anteriormente, temos

$$\dot{x} = \underbrace{V\Lambda V^{-1}}_A x \Rightarrow \dot{\eta} = \Lambda\eta$$

com $\eta = V^{-1}x$.

Linearização

Considerando $\eta(t)$ na forma polar, ou seja

$$\eta(t) = \begin{bmatrix} r(t) \cos(\phi(t)) \\ r(t) \text{sen}(\phi(t)) \end{bmatrix}$$

e aplicando no sistema $\dot{\eta} = \Lambda\eta$, obtemos

$$\dot{r} \cos(\phi) - r \text{sen}(\phi) \dot{\phi} = r\sigma \cos(\phi) + r\omega \text{sen}(\phi)$$

$$\dot{r} \text{sen}(\phi) + r \cos(\phi) \dot{\phi} = r\sigma \text{sen}(\phi) - r\omega \cos(\phi)$$

De ambas as equações acima, obtemos $\dot{r} = r\sigma$ e $\dot{\phi} = -\omega$ o que nos permite concluir que

$$r(t) = e^{\sigma t} c_\sigma \quad \phi(t) = -\omega t + c_\omega$$

onde as constantes c_σ e c_ω dependem das condições iniciais.

Linearização

Da mudança de variável adotada $x = V\eta$, temos

$$x(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} v_\sigma & v_\omega \end{bmatrix}}_V \begin{bmatrix} c_\sigma e^{\sigma t} \cos(c_\omega - \omega t) \\ c_\sigma e^{\sigma t} \sin(c_\omega - \omega t) \end{bmatrix}$$

o que resulta em

$$x(t) = (c_\sigma e^{\sigma t} \cos(c_\omega - \omega t))v_\sigma + (c_\sigma e^{\sigma t} \sin(c_\omega - \omega t))v_\omega$$

para todo $t \geq 0$.

Linearização

Considere agora, um **sistema mais geral com entrada de controle** $u_N \in \mathbb{R}^{n_u}$, ou seja, $\dot{\xi} = f(\xi, u_N)$ onde o objetivo é estabilizá-lo em torno de um ponto genérico ξ_e . Neste caso, precisamos calcular o valor de u_{Ne} da forma

$$f(\xi_e, u_{Ne}) = 0$$

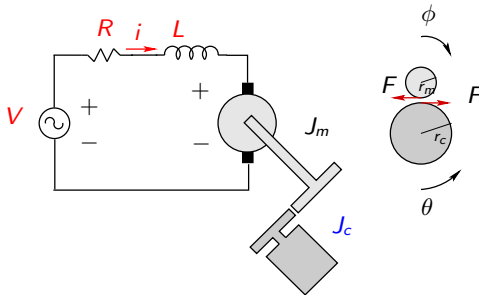
que será responsável por manter o sistema em equilíbrio na posição desejada. A linearização segue o mesmo procedimento anterior, mas considerando também a entrada de controle

$$f_i(\xi, u) \approx f_i(\xi_e, u_{Ne}) + \sum_{j=1}^{n_x} \frac{\partial f_i(\xi_e, u_{Ne})}{\partial \xi_j} (\xi_j - \xi_{ej}) + \sum_{k=1}^{n_u} \frac{\partial f_i(\xi_e, u_{Ne})}{\partial u_k} (u_{Nk} - u_{Nek})$$

para todo $i = 1, \dots, n_x$.

Motor CC

Vamos agora retomar o modelo do motor CC estudado no curso anterior e cujo esquema está apresentado na figura a seguir :



Este motor com momento de inércia J_m movimentava uma carga com momento de inércia J_c e coeficiente de atrito viscoso torcional b . A transmissão de força entre o motor e a carga é feita através de engrenagens com raios r_m e r_c .

Motor CC

Utilizando a relação $r_m\phi = r_c\theta$, com $c = r_c/r_m$ obtemos a equação da parte elétrica

$$L\frac{d}{dt}i + Ri = V - K_c\frac{d}{dt}\theta$$

e mecânica do motor

$$(J_c + J_m c^2)\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = cKi$$

Como pode ser notado o sistema é linear. Assim definindo $x_1 = i$ e $x_2 = \nu = \dot{\theta}$, obtemos a seguinte representação em espaço de estado

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -R/L & -cK/L \\ cK/J_T & -b/J_T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} V$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

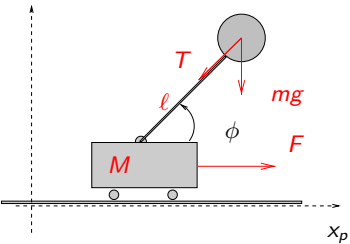
em que $J_T = J_c + J_m c^2$.

Motor CC

- Verificamos que o sistema atinge o regime permanente com uma velocidade angular de 50 [rad/s] .
- A mudança em qualquer parâmetro, por exemplo b que é um fator que depende do meio, exige que a tensão de entrada seja recalculada.
- **Nosso objetivo ao longo deste curso é realizar o controle em malha fechada de forma a assegurar um bom desempenho tanto no regime transitório como no regime permanente.**

Pêndulo Invertido

O outro modelo de nosso interesse é o pêndulo invertido cujo esquema está apresentado a seguir.



O modelo matemático não-linear que descreve o seu comportamento é o seguinte :

$$(M + m)\ddot{x}_p - ml \operatorname{sen}(\phi)\ddot{\phi} - ml \cos(\phi)\dot{\phi}^2 = F$$

$$l\ddot{\phi} - \operatorname{sen}(\phi)\ddot{x}_p + g \cos(\phi) = 0$$

Pêndulo Invertido

Linearizando o pêndulo em torno de $x_{pe} = 0$ e $\phi_e = \pi/2$ e definindo $x_1 = x_p - x_{pe}$, $x_2 = \dot{x}_1$, $x_3 = \phi - \phi_e$ e $x_4 = \dot{x}_3$, obtemos o modelo linearizado

$$\begin{aligned}(M + m)\dot{x}_2 - m\ell\dot{x}_4 &= F \\ \ell\dot{x}_4 - \dot{x}_2 - gx_3 &= 0\end{aligned}$$

o que nos fornece o seguinte modelo em representação em espaço de estado

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{M\ell} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{M\ell} \end{bmatrix} F$$

Representação de Estado

Qualquer equação diferencial de ordem n_x pode ser convertida em n_x equações diferenciais de primeira ordem. Este sistema de equações diferenciais, geralmente acoplado, é chamado de **representação em espaço de estado**. Para um **sistema LIT a tempo contínuo** a representação na forma matricial é dada a seguir

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída do sistema. As matrizes (A, B, C, D) , de dimensões compatíveis, e a condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$ devem ser determinadas de tal forma que $y(t)$ **coincida** com a solução da equação diferencial em estudo para todo $t \geq 0$. A primeira equação é chamada de **equação dinâmica** e a segunda de **equação de saída**.

Representação de Estado

A solução geral da equação dinâmica é a seguinte

$$x(t) = \Phi(t, 0)x_0 + \int_0^t \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau$$

em que $\Phi(t, \tau)$ é chamada de matriz de transição de estado.

Matriz de transição de estado

A matriz de transição de estado $\Phi(t, \tau)$, correspondente ao sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, é definida como sendo uma função matricial de dimensão $n_x \times n_x$ satisfazendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, \tau) &= A(t)\Phi(t, \tau) \\ \Phi(\tau, \tau) &= I\end{aligned}$$

Note que a matriz $\Phi(t, \tau)$ é responsável pelo regime transitório do sistema.

Representação de Estado

Exponencial de Matrix

Para qualquer matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ define-se a **função exponencial de matrix** como sendo

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n_x} \frac{(At)^i}{i!} = I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \dots$$

Para o sistema LIT que estamos estudando

$$\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$$

Note que ela satisfaz as duas condições apresentadas anteriormente (Verifique!).

Representação de Estado

Além disso, a **solução geral da equação dinâmica**, fica

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Alternativamente, para sistemas LIT, esta solução pode ser obtida via transformada de Laplace inversa, levando em conta a seguinte definição :

Transformada de Laplace da Função Exponencial de Matriz

A transformada de Laplace da função e^{At} definida para todo $t \geq 0$ é dada por

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$$

definida no domínio $\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > \max \text{Re}(\lambda_i)\}$ sendo λ_i para $i = 1, \dots, n_x$ os autovalores de A .

Representação de Estado

Aplicando a transformada de Laplace nas equações de estado, obtemos

$$\hat{x}(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}B\hat{u}(s)$$

o que nos fornece

$$\hat{y}(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1}x_0}_{G_0(s)} + \underbrace{(C(sI - A)^{-1}B + D)}_{G(s)}\hat{u}(s)$$

com :

- $g_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_0(s)\} = Ce^{At}x_0$ que depende somente das condições iniciais.
- $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = Ce^{At}B + D\delta(t)$ é a **resposta ao impulso, obtida para condições iniciais nulas.**

Representação de Estado

Note que a função de transferência $G(s)$ é dada por

$$G(s) = \frac{CA \operatorname{Adj}(sI - A)B + \det(sI - A)D}{\det(sI - A)}$$

Assim a solução da equação característica

$$\det(sI - A) = 0$$

fornecem os polos de $G(s)$, que são também os autovalores de A .

Solução da Equação de Estado

A solução da equação de estado é dada por

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Representação de Estado

Finalmente, é importante notar que a representação de estado **não é única**. Únicas são a função de transferência $G(s)$ e, dada as condições iniciais, a função $G_0(s)$. De fato, o sistema definido pelas matrizes (A, B, C, D) possui a mesma função de transferência $G(s)$ do sistema definido pelas matrizes $(\Gamma^{-1}A\Gamma, \Gamma^{-1}B, C\Gamma, D)$ em que $\Gamma \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é qualquer matriz não-singular e recebe o nome especial de **Transformação de Similaridade**.

Isto pode ser facilmente verificado fazendo

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= C\Gamma(sI - \Gamma^{-1}A\Gamma)^{-1}\Gamma^{-1}B + D \end{aligned}$$

Além disso, observe que

$$\begin{aligned} \det(sI - \Gamma^{-1}A\Gamma) &= \det(\Gamma^{-1}(sI - A)\Gamma) \\ &= \det(\Gamma^{-1})\det(sI - A)\det(\Gamma) = \det(sI - A) \end{aligned}$$

Formas Canônicas

Considere um sistema SISO LIT de ordem n_x com a seguinte função de transferência

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n_x} a_i s^i}$$

com $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, n_x$ e $a_{n_x} = 1$. A equação diferencial correspondente é dada por

$$\sum_{i=0}^{n_x} a_i \frac{d^i y}{dt^i}(t) = u(t), \quad \forall t \geq 0$$

que na forma compacta pode ser escrita como

$$D[y(t)] = u(t)$$

em que $D[y]$ é o operador diferencial.

Formas Canônicas

Para $D[y(t)] = u(t)$ com $a_{n_x} = 1$, podemos definir as seguintes variáveis de estado :

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n_x}(t) \end{bmatrix}, \quad x_i(t) = y^{(i-1)}(t), \quad i = 1, \dots, n_x$$

que implicam nas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n_x-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0], \quad D = [0]$$

Formas Canônicas

Para o caso mais geral em que

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n_u} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n_x} a_i s^i}$$

temos que o sistema correspondente $D[z] = N[u]$, com $N[u] = \sum_{i=0}^{n_u} b_i y^{(i)}(t)$ sendo um operador diferencial de ordem $n_u \leq n_x - 1$, pode ser reescrito como

$$D[\zeta] = u, \quad y = N[\zeta]$$

Assim, definindo as variáveis de estado como sendo

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad x_i(t) = \zeta^{(i-1)}(t), \quad i = 1, \dots, n_x$$

Formas Canônicas

As matrizes A e B são as mesmas, entretanto, temos

$$y(t) = N[\zeta] = \sum_{i=0}^{n_u} b_i \zeta^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{n_u} b_i x_{i+1}(t)$$

o que nos permite determinar as matrizes de saída como sendo

$$C = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad 0], \quad D = [0]$$

Para funções de transferência próprias ($n_u = n_x$), podemos escrever

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n_u} (b_i - b_n a_i) s^i}{\sum_{i=0}^{n_x} a_i s^i} + b_n$$

$a_{n_x} = 1$ e, neste caso, a representação de estado é obtida de maneira análoga, mas com $D = b_n$.

Esta representação está na **forma canônica controlável**, que como ficará claro posteriormente, é muito conveniente para testes de controlabilidade e projetos de controle.

Formas Canônicas

Alternativamente, poderíamos descrever qualquer sistema SISO

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

com uma representação mais adequada

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t), \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \\ y(t) &= \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}u(t)\end{aligned}$$

dependendo da aplicação de interesse, utilizando uma [transformação de similaridade \$\Gamma\$ conveniente](#). As duas representações mais utilizadas são aquelas que facilitam o projeto de controladores e observadores de estado, chamadas de forma canônica controlável e forma canônica observável.

Forma Canônica Controlável

A forma canônica controlável é definida pelas matrizes $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ com estrutura dada na pag 38 e podem ser obtidas a partir de qualquer representação (A, B, C, D) e uma matriz Γ adequada.

De fato, redefinindo $x = \Gamma \tilde{x}$ obtemos o sistema anterior com

$$(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}) = (\Gamma^{-1}A\Gamma, \Gamma^{-1}B, C\Gamma, D)$$

e $\Gamma = \mathcal{CM}$ em que

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n_x-1}B]$$

é chamada de **matriz de controlabilidade** e

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n_x-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n_x-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad a_{n_x} = 1$$

Forma Canônica Observável

Note que esta forma canônica exige que Γ seja invertível. Uma vez que $\det(\mathcal{M}) = (-1)^{n_x-1}$ sempre existe, então a matriz de controlabilidade \mathcal{C} deve ser não singular. Na forma canônica observável as matrizes $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ são as seguintes

$$\tilde{A} = \Gamma^{-1}A\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n_x-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = C\Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}'$$

e $\tilde{B} = \Gamma^{-1}B$ e $\tilde{D} = D$ obtidas com a transformação

$$\Gamma = (\mathcal{M}\mathcal{O})^{-1}$$

Forma Canônica Observável

Nesta transformação

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n_x-1} \end{bmatrix}$$

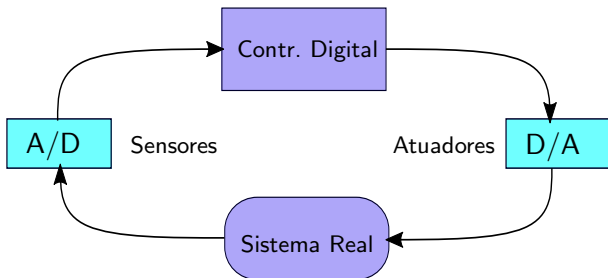
é chamada de **matriz de observabilidade**. Além disso, assim como no caso anterior a inversa \mathcal{O}^{-1} deve existir para que a transformação seja possível.

Para qualquer que seja a transformação de similaridade Γ adotada, as matrizes

$$\tilde{A} = \Gamma^{-1}A\Gamma \quad \text{ou} \quad A = \Gamma\tilde{A}\Gamma^{-1}$$

são ditas similares.

Discretização



Na verdade, o que normalmente ocorre na prática é que o sistema a ser controlado é contínuo, mas o esforço de controle $u(t)$ é sintetizado por um controlador digital e, portanto, é constante por partes, ou seja

$$u(t) = u(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1})$$

em que t_k e t_{k+1} são instantes de amostragem sucessivos satisfazendo $t_{k+1} - t_k = T > 0$ e T é o período de amostragem.

Discretização

Considerando um instante de tempo $t \in [t_k, t_{k+1})$ temos da equação dinâmica obtida que

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{A(t-t_k)} x(t_k) + \int_{t_k}^t e^{A(t-\tau)} B d\tau \quad u(t_k) \\
 &= e^{A(t-t_k)} x(t_k) + \int_0^{t-t_k} e^{A\psi} B d\psi \quad u(t_k)
 \end{aligned}$$

onde foi utilizada a mudança de variável $\psi = t - \tau$. Logo nos instantes de amostragem, temos

$$x(t_{k+1}) = e^{AT} x(t_k) + \int_0^T e^{A\psi} B d\psi \quad u(t_k)$$

Representação de Estado

De fato, note que

$$\begin{aligned} e^{AT} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1} & \frac{1}{s}(sI - A)^{-1}B \\ 0 & \frac{1}{s}I \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} e^{AT} & \int_0^T e^{A\tau} B d\tau \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por enquanto as matrizes de saída do sistema a tempo discreto serão consideradas idênticas às do sistema a tempo contínuo. Posteriormente, para fins de projeto da lei de controle $u(t_k)$, as matrizes (C_d, D_d) serão determinadas de forma conveniente para que o desempenho dos sistemas a tempo discreto e a tempo contínuo sejam idênticos.

Representação de Estado

A representação de estado de um sistema LIT a tempo discreto pode ser descrita na forma matricial como sendo

$$\begin{aligned}x(k + 1) &= Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0 \\y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída do sistema. As matrizes (A, B, C, D) , de dimensões compatíveis, e a condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^{n_y}$ devem ser determinadas de tal forma que $y(k)$ coincida com a solução da equação a diferenças em estudo para todo $k \in \mathbb{N}$. A primeira equação é chamada de equação dinâmica e a segunda de equação de saída.

Representação de Estado

A solução geral da equação dinâmica é a seguinte

$$x(k) = \Phi(k, 0)x_0 + \sum_{\ell=0}^{k-1} \Phi(k, \ell + 1)Bu(\ell)$$

em que $\Phi(k, \ell)$ é chamada de matriz de transição de estado.

Matriz de transição de estado

A matriz de transição de estado $\Phi(k, \ell) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, correspondente ao sistema $x(k+1) = A(k)x(k)$, é definida como sendo uma função matricial satisfazendo

$$\begin{aligned}\Phi(k, \ell) &= A(k-1)A(k-2) \cdots A(\ell) \\ \Phi(k+1, \ell) &= A(k)\Phi(k, \ell) \\ \Phi(\ell, \ell) &= I\end{aligned}$$

para $k > \ell$.

Representação de Estado

De fato note que de $x(k + 1) = A(k)x(k)$ temos

$$x(1) = A(0)x(0)$$

$$x(2) = A(1)A(0)x(0)$$

$$x(3) = A(2)A(1)A(0)x(0)$$

$$\vdots = \vdots$$

$$x(k) = \underbrace{A(k-1)A(k-2)\cdots A(0)}_{\Phi(k,0)}x(0)$$

Também podemos escrever

$$x(k) = \Phi(k, \ell)x(\ell), \quad k > \ell$$

Para o sistema LIT que estamos estudando

$$\Phi(k, \ell) = A^{k-\ell}$$

Representação de Estado

Logo, a solução geral da equação dinâmica, fica

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{\ell=0}^{k-1} A^{k-\ell-1} B u(\ell)$$

Para sistemas LIT, esta solução pode ser obtida via transformada de \mathcal{Z} inversa, levando em conta a seguinte definição :

Transformada \mathcal{Z} da Função Potência de Matriz

A transformada \mathcal{Z} da função A^k , $k \in \mathbb{N}$ é dada por

$$\mathcal{Z}\{A^k\} = z(zI - A)^{-1}$$

definida no domínio $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \max |\lambda_i|\}$ sendo λ_i para $i = 1, \dots, n_x$ os autovalores de A .

Representação de Estado

Aplicando a transformada \mathcal{Z} nas equações de estado, obtemos

$$\hat{x}(z) = z(zI - A)^{-1}x_0 + (zI - A)^{-1}B\hat{u}(z)$$

o que nos fornece

$$\hat{y}(z) = \underbrace{C(zI - A)^{-1}zx_0}_{G_0(z)} + \underbrace{(C(zI - A)^{-1}B + D)}_{G(z)}\hat{u}(z)$$

com :

- $g_0(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{G_0(z)\} = CA^k x_0$ que depende somente das condições iniciais.
- $g(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\} = \begin{cases} D & , k = 0 \\ CA^{k-1}B & , k \geq 1 \end{cases}$ é a **resposta ao impulso, obtida para condições iniciais nulas.**

Representação de Estado

De fato, o sistema definido pelas matrizes (A, B, C, D) possui a mesma função de transferência $F(s)$ do sistema definido pelas matrizes $(\Gamma^{-1}A\Gamma, \Gamma^{-1}B, C\Gamma, D)$ em que $\Gamma \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é qualquer matriz não-singular e recebe o nome especial de **Transformação de Similitude**.

Isto pode ser facilmente verificado fazendo

$$\begin{aligned} G(s) &= C(zI - A)^{-1}B + D \\ &= C\Gamma(zI - \Gamma^{-1}A\Gamma)^{-1}\Gamma^{-1}B + D \end{aligned}$$

Além disso, observe que

$$\begin{aligned} \det(zI - \Gamma^{-1}A\Gamma) &= \det(\Gamma^{-1}(zI - A)\Gamma) \\ &= \det(\Gamma^{-1})\det(zI - A)\det(\Gamma) \\ &= \det(zI - A) \end{aligned}$$

Formas Canônicas

Considere um sistema SISO LIT de ordem n_x com a seguinte **função de transferência**

$$G(z) = \frac{\hat{y}(z)}{\hat{u}(z)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n_x} a_i z^i}$$

com $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, n_x$ e $a_{n_x} = 1$. A equação a diferenças correspondente é dada por

$$\sum_{i=0}^{n_x} a_i y(k+i) = u(k), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

que na forma compacta pode ser escrita como

$$D[y(k)] = u(k)$$

em que $D[y]$ é o operador a diferenças.

Formas Canônicas

Para $D[y(k)] = u(k)$ com $a_{n_x} = 1$, podemos definir as seguintes variáveis de estado :

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_{n_x}(k) \end{bmatrix}, \quad x_i(k) = y(k + i - 1), \quad i = 1, \dots, n_x$$

que implicam nas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n_x-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0], \quad D = [0]$$

Formas Canônicas

Para o caso mais geral em que

$$G(z) = \frac{\hat{y}(z)}{\hat{u}(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{n_u} b_i z^i}{\sum_{i=0}^{n_x} a_i z^i}$$

temos que o sistema correspondente $D[\zeta] = N[u]$, com $N[u] = \sum_{i=0}^{n_u} b_i u(k+i)$ sendo o operador a diferenças de ordem $n_u \leq n_x - 1$, pode ser reescrito como

$$D[\zeta] = u, \quad y = N[\zeta]$$

Assim, definindo as variáveis de estado como sendo

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_{n_x}(k) \end{bmatrix}, \quad x_i(k) = \zeta(k+i-1), \quad i = 1, \dots, n_x$$

Formas Canônicas

As matrizes A e B são as mesmas, entretanto, temos

$$y(k) = N[\zeta] = \sum_{i=0}^{n_u} b_i \zeta(k+i) = \sum_{i=0}^{n_u} b_i x_{i+1}(k)$$

o que nos permite determinar as matrizes de saída como sendo

$$C = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad 0], \quad D = [0]$$

Para funções de transferência próprias ($n_u = n_x$), podemos escrever

$$G(z) = \frac{\hat{y}(z)}{\hat{u}(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{n_u} (b_i - b_n a_i) z^i}{\sum_{i=0}^{n_x} a_i z^i} + b_n$$

e, neste caso, a representação de estado é obtida de maneira análoga, mas com $D = b_n$.

Esta representação está na **forma canônica controlável**.

Formas Canônicas

As matrizes nas formas canônicas controlável e observável, podem ser obtidas a partir de qualquer representação em espaço de estado (A, B, C, D) utilizando as transformações de similaridade :

- $\Gamma = \mathcal{CM}$ para a obtenção de

$$(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}) = (\Gamma^{-1}A\Gamma, \Gamma^{-1}B, C\Gamma, D)$$

na **forma canônica controlável**.

- $\Gamma = (\mathcal{MO})^{-1}$ para a obtenção de

$$(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}) = (\Gamma^{-1}A\Gamma, \Gamma^{-1}B, C\Gamma, D)$$

na **forma canônica observável**.

Matrizes Simétricas

Antes de prosseguir, vamos apresentar a classe de **matrizes simétricas** e suas propriedades, cujos conceitos serão fundamentais nos desenvolvimentos que seguem. Uma matriz quadrada e real $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita **simétrica** se os seus elementos são tais que

$$q_{ij} = q_{ji}$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$. Neste caso, temos que a igualdade $Q = Q'$ é verificada.

Matrizes Simétricas

Seja $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica, então as seguintes afirmações são verdadeiras :

- 1 Todos os seus **autovalores** $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ são **reais**.
- 2 Todos os seus **autovetores** $\{v_1, \dots, v_n\}$ são **reais**. Além disso, autovetores associados a autovalores distintos são **ortogonais**.

Matrizes Simétricas

- **Primeira afirmação** : Para mostrar que todos os autovalores são reais, basta multiplicar $Qv = \lambda v$ à esquerda por $v^{\sim} = (v^*)'$. Assim, temos

$$v^{\sim} Qv = \lambda v^{\sim} v \xrightarrow{(\sim)} v^{\sim} Qv = \lambda^* v^{\sim} v$$

igualando o lado direito de ambas as igualdades temos $(\lambda - \lambda^*)v^{\sim} v = 0$. Como $v \neq 0$, isto implica que

$$\lambda = \lambda^*$$

e, portanto, λ deve ser real.

Matrizes Simétricas

- **Segunda afirmação** : Para mostrar que os autovetores são reais, temos

$$(\lambda I - Q)v = 0 \xrightarrow{(*)} (\lambda I - Q)v^* = 0$$

onde foi considerado na segunda igualdade que λ é real e Q é simétrica. Logo v é real pois $v = v^*$. Agora, considerando $Qv_i = \lambda_i v_i$ e $Qv_j = \lambda_j v_j$ e fazendo

$$v_j' Qv_i = \lambda_i v_j' v_i \quad \text{e} \quad v_i' Qv_j = \lambda_j v_i' v_j$$

Calculando o transposto da primeira igualdade e comparando o resultado com a segunda, obtemos

$$(\lambda_i - \lambda_j)v_i' v_j = 0$$

Como $\lambda_i \neq \lambda_j$ então $v_i' v_j = 0$ indicando que

v_i e v_j são ortogonais

Matrizes Simétricas

De fato, com a matriz $V = [v_1 \ \cdots \ v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ temos

$$\begin{aligned} V'QV &= V'V\Lambda \\ &= \Lambda \end{aligned}$$

sendo $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Como V é unitária, podemos escrever $Q = V\Lambda V'$ e, portanto :

$$x'Qx = \underbrace{(V'x)'}_x \Lambda \underbrace{(V'x)}_x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i^2$$

Como V é não singular, $x \neq 0$ sse $\chi \neq 0$, então $x'Qx > 0$ para todo $x \neq 0$ sse todos os seus autovalores forem positivos. Os demais casos decorrem de forma similar.

Critério de Lyapunov

Além dos critérios de Nyquist e de Routh-Hurwitz, necessários e suficientes para o estudo de estabilidade de sistemas LIT, outro critério igualmente importante é o **critério de Lyapunov**.

Este critério é bastante geral e se aplica a sistemas dinâmicos lineares ou não-lineares, a tempo contínuo ou discreto, descrito através de suas equações de estado. A ideia central é a seguinte :

- Considerando $v(x)$ uma função que mede a distância de um ponto genérico $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ até o ponto de equilíbrio x_e tendo, portanto, as características :

a) $v(x) > 0$ para todo $x \neq x_e$ e $v(x) = 0$ para $x = x_e$

Se para toda condição inicial $x(0) = x_0$ a função $v(x(t))$ diminuir e tender a zero no decorrer do tempo, ou seja :

b) $\dot{v}(x) < 0$ para todo $x \neq x_e$

então o ponto x_e é dito **globalmente assintoticamente estável**.

Critério de Lyapunov

O critério de Lyapunov se baseia na escolha da **função de Lyapunov** $v(x)$ e na imposição de que $\dot{v}(x) < 0, \forall t \geq 0$.

Considere um sistema LIT descrito por

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

que como já mencionado, possui a origem como único ($\det(A) \neq 0$). Escolhendo $v(x) = x'Px$ com $P > 0$ e derivando em relação ao tempo, obtemos

$$\dot{v} = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'(A'P + PA)x$$

Assim, dada $Q > 0$, se existir $P > 0$ solução da chamada **equação de Lyapunov** :

$$A'P + PA = -Q$$

então $\dot{v}(x) = -x'Qx < 0, \forall x \neq 0$ e o sistema é globalmente assintoticamente estável.

Critério de Lyapunov

Critério de Lyapunov

A matriz A é Hurwitz estável **se e somente se** para uma matriz $Q > 0$ arbitrária dada existir uma matriz simétrica definida positiva P satisfazendo a **equação de Lyapunov**

$$A'P + PA + Q = 0$$

Ademais, $P = \int_0^{\infty} e^{A't} Q e^{At} dt > 0$ é solução única desta equação.

Como as matrizes P e Q são definidas positivas, existe α suficientemente pequeno tal que $2\alpha P < Q$. Portanto

$$\dot{v}(x) \leq -2\alpha v(x) \Rightarrow v(t) \leq e^{-2\alpha t} v(0)$$

Critério de Lyapunov

Para o sistema dinâmico assintoticamente estável

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

$$y = Cx$$

que a partir de $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$ produz uma saída $y(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, desejamos avaliar a **qualidade do transitório** através do cálculo do índice

$$J = \int_0^{\infty} y(t)'y(t)dt$$

Com a solução $P \geq 0$ de $A'P + PA = -C'C$ o que indica $\dot{v}(x) = -y'y$, temos

$$J = - \int_0^{\infty} \dot{v} dt = v(x_0) - \underbrace{v(x(\infty))}_{=0} = x_0' P x_0$$

Critério de Lyapunov

Um raciocínio análogo pode ser desenvolvido para obter as condições de estabilidade de um sistema a tempo discreto descrito por

$$x(k + 1) = Ax(k), \quad x(0) = x_0$$

que possui a origem como único ponto de equilíbrio ($\det(I - A) \neq 0$). Escolhendo novamente $v(x) = x'Px$ com $P > 0$, obtemos

$$v(x(k + 1)) - v(x(k)) = x'(A'PA - P)x$$

Assim, dada $Q > 0$, se existir $P > 0$ solução da chamada **equação de Lyapunov** :

$$A'PA - P = -Q$$

então $v(x(k + 1)) - v(x(k)) = -x(k)'Qx(k) < 0, \quad \forall x \neq 0$ e o sistema é globalmente assintoticamente estável.

Critério de Lyapunov

Critério de Lyapunov

A matriz A é Schur estável, ou seja, possui todos os seus autovalores no interior do círculo unitário ($|\lambda_i(A)| < 1, \forall i = 1, \dots, n_x$) **se e somente se** para uma matriz $Q > 0$ arbitrária dada existir uma matriz $P > 0$ satisfazendo a **equação de Lyapunov**

$$A'PA - P + Q = 0$$

Ademais, $P = \sum_{k=0}^{\infty} A'^k Q A^k > 0$ é solução única desta equação.

Como as matrizes P e Q são definidas positivas, existe β suficientemente pequeno tal que $\beta P < Q$. Portanto

$$v(k+1) \leq (1-\beta)v(k) \Rightarrow v(k) \leq (1-\beta)^k v(0)$$

Critério de Lyapunov

Ou seja $v(k)$ tende a zero e, da mesma forma, $x(k)$ tende ao ponto de equilíbrio $x_e = 0$ assintoticamente. Note que quanto mais o valor de $\beta \rightarrow 1$, maior é a velocidade com que $x(k)$ se aproxima da origem.

Para o sistema dinâmico assintoticamente estável

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k), \quad x(0) = x_0 \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}$$

que a partir de $x_0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ produz uma saída $y(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, desejamos avaliar a **qualidade do transitório** através do cálculo do índice

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)' y(k)$$

