Controle Avançado de Sistemas

Projeto de Controle $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$

Profa. Grace S. Deaecto

Faculdade de Engenharia Mecânica / UNICAMP
13083-860, Campinas, SP, Brasil.
grace@fem.unicamp.br

Segundo Semestre de 2018

Desigualdades Matriciais Lineares

- Desigualdades Matriciais Lineares, do inglês Linear Matrix Inequalities (LMIs), são essenciais na análise e no controle de sistemas dinâmicos.

Desigualdades Matriciais Lineares

Uma LMI é definida como

$$\mathcal{A}(x) < 0$$

com

$$\mathcal{A}(x) = A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i x_i$$

em que $A_i \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $i = 0, \cdots, n$, são matrizes simétricas e $x_i \in \mathbb{R}$ é a i-ésima componente do vetor x.

Desigualdades Matriciais Lineares

- Note que $\mathcal{A}(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma função linear do vetor $x \in \mathbb{R}$.

Conjunto convexo

O conjunto de todos os vetores $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem a desigualdade matricial linear $\mathcal{A}(x) < 0$ é um conjunto convexo.

- De fato, note que para duas soluções genéricas x_a, $x_b \in \mathbb{R}^n$ o segmento de reta que liga ambos os pontos é definido por $x = \alpha x_a + (1-\alpha)x_b$ para $0 \leq \alpha \leq 1$. Como ambos os pontos são soluções, então $\mathcal{A}(x_a) < 0$ e $\mathcal{A}(x_b) < 0$ e, desta forma, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \mathcal{A}(\alpha x_a + (1-\alpha)x_b) \\ &= \alpha \mathcal{A}(x_a) + (1-\alpha)\mathcal{A}(x_b) \\ &< 0 \end{aligned}$$

em que a segunda igualdade vem do fato de que $\mathcal{A}(x)$ é linear.

Desigualdades Matriciais Lineares

- Um resultado importante usado para linearizar algumas restrições não-lineares é o Complemento de Schur.

Complemento de Schur

A desigualdade matricial linear

$$\mathcal{A}(x) = \begin{bmatrix} S(x) & V(x) \\ V(x)' & Q(x) \end{bmatrix} < 0$$

é equivalente a qualquer das duas desigualdades não lineares

a) $S(x) < 0$ and $Q(x) - V(x)'S(x)^{-1}V(x) < 0$

b) $Q(x) < 0$ and $S(x) - V(x)Q(x)^{-1}V(x)' < 0$

Desigualdades Matriciais Lineares

- De fato, para a parte a), note que $S(x) < 0$ também implica que $S(x)^{-1} < 0$. Como consequência, a matriz

$$U(x) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ V(x)'S(x)^{-1} & I \end{bmatrix}$$

é não singular, o que nos permite escrever $\mathcal{A}(x) = U(x)\mathcal{B}(x)U(x)'$, em que

$$\mathcal{B}(x) = \begin{bmatrix} S(x) & 0 \\ 0 & Q(x) - V(x)'S(x)^{-1}V(x) \end{bmatrix}$$

Logo, a matriz $\mathcal{A}(x) < 0$ se e somente se $\mathcal{B}(x) < 0$. A prova da parte b) é similar.

Desigualdades Matriciais Lineares

- **Exemplo 1 :** Converta as desigualdades matriciais lineares $2x_1 + 3x_2 < 7$, $-x_1 + x_2 < 5$ e $2x_1 - 4x_2 < -4$ na forma matricial.

  Resposta :

$$A_0 = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Desigualdades Matriciais Lineares

- **Exemplo 2 :** Converta a desigualdade não-linear $(x_1 - 1)^2 + 2(x_2 - 2)^2 < 5^2$, que representa uma elipse com foco em (1,2), em uma desigualdade matricial linear.

  Resposta :

  Utilizando o Complemento de Schur, temos que esta desigualdade é equivalente a

$$\begin{bmatrix} 2(x_2 - 2)^2 - 25 & x_1 - 1 \\ x_1 - 1 & -1 \end{bmatrix} < 0$$

  aplicando o complemento novamente, obtemos

$$\begin{bmatrix} -25 & x_1 - 1 & x_2 - 2 \\ x_1 - 1 & -1 & 0 \\ x_2 - 2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} < 0$$

  e, assim, as matrizes $A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ podem ser diretamente determinadas

Desigualdades Matriciais Lineares

- Os conceitos que acabamos de apresentar são importantes para resolver problemas de otimização convexa descritos da forma

$$\inf_{x}\{c'x \ : \ \mathcal{A}(x) < 0\}$$

com $c \in \mathbb{R}^n$.

- No contexto específico de análise e projeto de sistemas dinâmicos, o cálculo das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas com função de transferência

$$H_{wz}(s) = E(sI - A)^{-1}H + J$$

pode ser escrito como a solução de problemas desta forma.

Desigualdades Matriciais Lineares

- A norma $\mathcal{H}_2$ do sistema $H_{wz}(s)$ pode ser determinada a partir da solução do seguinte problema de otimização convexa

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \inf_{P>0}\{\mathrm{Tr}(H'PH) \ : \ A'P + PA + E'E < 0\}$$

- Note que este problema, de fato, pode ser escrito como

$$\inf_{x}\{c'x \ : \ \mathcal{A}(x) < 0\}$$

Desigualdades Matriciais Lineares

- Assim, considerando a variável de decisão $x = [x_1, \cdots, x_m]'$, temos

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{F_1} x_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{F_2} x_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{F_3} x_3 > 0$$

e

$$A'P + PA + E'E =$$
$$= (A'F_1 + F_1A)x_1 + (A'F_2 + F_2A)x_2 + (A'F_3 + F_3A)x_3 + E'E < 0$$

Desta forma a função objetivo pode ser representada por

$$\inf_x \underbrace{\left[\mathrm{Tr}(H'F_1H) \quad \mathrm{Tr}(H'F_2H) \quad \mathrm{Tr}(H'F_3H)\right]}_{c'} x$$