Commande $\mathcal{H}_\infty$ par retour de sortie des systèmes en réseau avec incertitudes dans la matrice de probabilité de transition ⋆

André R. Fioravanti [*] **Alim P. C. Gonçalves** [*]
José C. Geromel [*]

[*] *DSCE/École de Génie Électrique et Informatique, UNICAMP*
Av. Albert Einstein, 400. 13083-852, Campinas, SP, Brésil.
andre.fioravanti@gmail.com, alimped@dsce.fee.unicamp.br,
geromel@dsce.fee.unicamp.br

Résumé : Ce papier traite la commande $\mathcal{H}_\infty$ par retour de sortie des systèmes linéaires markoviens (MJLS - de l'anglais *Markov Jump Linear Systems*) en temps discret. Quand la probabilité de transition est entièrement connue, on obtient des conditions suffisantes pour la conception d'un contrôleur basé sur le modèle interne du système. Dans le cas où les probabilités de transition sont incertaines et appartiennent à un polytope convexe dont les sommets sont connus, nous fournissons une condition suffisante par LMI qui garantit que la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée est inférieure à un niveau prescrit. Cette condition peut être améliorée par une procédure itérative. De plus, nous sommes en mesure de traiter le cas de la disponibilité de *clusters* du mode de Markov, à condition que les matrices du système utilisées dans la loi de commande soient constantes dans le cluster, une hypothèse qui permet de traiter les systèmes de contrôle en réseau (NCS). Un exemple numérique montre l'applicabilité de la méthode et la compare avec les résultats précédents.

Mots-clés: Systèmes à temps discret ; Systèmes Stochastiques ; Systèmes de Contrôle en Réseau.

1. INTRODUCTION

Les systèmes markoviens linéaires (MJLS) sont des modèles mathématiques bien établis qui peuvent représenter des changements soudains dans les systèmes dynamiques en raison, par exemple, des échecs, de la réparation, des changements environnementaux ou de la modification des points de fonctionnement. Ces systèmes sont modélisés avec des matrices qui dépendent d'une variable aléatoire prenant ses valeurs selon une chaîne de Markov à états finis. Il y a une grande quantité de théorie et de littérature qui étendent les concepts habituels sur la stabilité, l'observabilité, la contrôlabilité, et les normes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ pour cette classe spéciale, voir Costa et al. (2005) et les références incluses pour plus de détails.

La conception du contrôleur est dite *dépendante du mode* si les informations sur le paramètre de saut sont disponibles à chaque instant du temps, et dite *indépendante du mode* sinon. Un compromis entre les deux approches est de considérer la disponibilité d'un *cluster* de modes, voir do Val et al. (2002) et Gonçalves et al. (2011b). Dans la plupart des travaux, il est habituel de considérer *a priori* la pleine connaissance des probabilités de transition de la chaîne de Markov. En pratique, cependant, ces valeurs ne peuvent être estimées que dans un intervalle incertain, ce qui peut conduire à l'instabilité ou au moins à une dégradation des performances, tout comme les incertitudes dans les matrices de système. Dans la littérature actuelle, parmi les différentes façons d'intégrer l'incertitude sur la matrice de probabilité de transition, nous pouvons citer : des bornes élément par élément Boukas (2009) ; incertitudes polytopiques Costa et al. (1997), de Souza (2006), Gonçalves et al. (2011b) ou en partie des probabilités connues Zhang et Boukas (2009). Pour des bornes élément par élément, Boukas (2009) démontre des conditions suffisantes par LMI pour la commande par retour d'état. Sous l'hypothèse d'incertitude polytopique dans la matrice de probabilité de transition, la programmation convexe a été utilisée dans Costa et al. (1997) pour calculer des contrôleurs $\mathcal{H}_2$ par retour d'état, avec ou sans l'hypothèse de la disponibilité du mode de Markov. Une condition suffisante pour la stabilité robuste a été proposée par de Souza (2006) et des LMIs pour la commande via retour d'état ont été données, à la fois pour les cas dépendant ou indépendant du mode. Un contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ par retour d'état avec des incertitudes sur les paramètres est fourni dans Gonçalves et al. (2011b), avec l'utilisation des LMIs. Enfin, il est possible de considérer que certains éléments de la matrice de probabilité de transition ne sont pas disponibles. Dans Zhang et Boukas (2009), une solution pour le problème de retour d'état $\mathcal{H}_\infty$ est donnée en terme des LMIs et le problème de retour de sortie est également envisagé, mais dans ce cas les contraintes ne sont plus convexes.

La commande $\mathcal{H}_\infty$ par retour dynamique de sortie est résolue par Seiler et Sengupta (2005) dans le cas particulier

⋆. Ce travail a été financé par le Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) et Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Brésil.

où la matrice de probabilité de transition a des lignes identiques et par Geromel et al. (2009) dans le cas plus général de chaîne de Markov. Les deux papiers considèrent le cas de commande dépendant du mode avec la pleine connaissance des probabilités de transition. Dans Zhang et Boukas (2009) et Chae et al. (2011), deux conceptions différentes pour faire face aux probabilités de transition partiellement disponibles sont présentées, avec des contraintes sous forme d'inégalités matricielles bi-linéaires (BMI). Dans ce papier nous cherchons à déterminer un contrôleur de sortie en utilisant des LMIs, car elles peuvent être facilement résolues en utilisant plusieurs paquets de calcul disponibles et ne montrent pas de problèmes de convergence. Afin d'atteindre cet objectif, les contrôleurs uniquement basés sur le modèle interne du système sont pris en compte. On présente des conditions suffisantes avec des inégalités non-convexes pour le cas dépendant du mode avec des probabilités de transition entièrement connues. Nous présentons aussi des conditions LMIs suffisantes qui sont aptes à s'occuper du contrôle des réseaux avec des probabilités de transition incertaines. Une méthode itérative est présentée, si des améliorations sont nécessaires sur la norme $\mathcal{H}_\infty$. Un exemple numérique montre l'applicabilité des résultats et fournit une comparaison avec d'autres méthodes disponibles dans la littérature.

Pour faciliter la notation, les lettres majuscules indiquent les matrices et les lettres minuscules indiquent les vecteurs. Pour les scalaires, des lettres grecques minuscules sont utilisées. Pour des matrices réelles ou vecteurs, $(')$ indique la transposition. Pour rendre la notation de la partition des matrices symétriques plus simple, le symbole $(\bullet)$ représente de façon générique chacun de ses blocs symétriques. L'ensemble des nombres naturels est noté par $\mathbb{N}$, tandis que l'ensemble fini de la première tranche de N nombres naturels $\{1, \cdots, N\}$ est noté par $\mathbb{K}$. Compte tenu des N^2 nombres réels non négatifs p_{ij} satisfaisant $p_{i1}+\cdots+p_{in}=1$ pour tout $i \in \mathbb{K}$ et N matrices réelles X_j, pour tout $j \in \mathbb{K}$, la combinaison convexe de ces matrices avec des poids p_{ij} est notée par $X_{pi} = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} X_j$. De la même façon, pour des matrices définies positives, l'inverse de la combinaison convexe des inverses est noté par

$$X_{qi} = \left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij} X_j^{-1} \right)^{-1} \tag{1}$$

Bien évidemment, X_{pi} dépend linéairement des matrices $X_1, \cdots, X_n$, tandis que la dépendance de X_{qi} par rapport aux mêmes matrices est fortement non linéaire. Le symbole $\mathcal{E}\{\cdot\}$ représente l'espérance mathématique de $\{\cdot\}$. Pour tout signal stochastique $z(k)$, défini dans le domaine a temps discret $k \in \mathbb{N}$, la quantité $\|z\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}\{z(k)'z(k)\}$ est sa norme au carré.

2. FORMULATION DU PROBLÈME

Un système linéaire markovien à temps discret $\mathcal{G}$ est décrit par les équations stochastiques suivantes :

$$x(k+1) = A(\theta_k)x(k) + B(\theta_k)u(k) + J(\theta_k)w(k) \tag{2}$$
$$z(k) = C_z(\theta_k)x(k) + D_z(\theta_k)u(k) + E_z(\theta_k)w(k) \tag{3}$$
$$y(k) = C_y(\theta_k)x(k) + E_y(\theta_k)w(k) \tag{4}$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$ dénote l'état, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle, $w(k) \in \mathbb{R}^p$ est la perturbation externe, $z(k) \in \mathbb{R}^r$ est la sortie contrôlée et $y(k) \in \mathbb{R}^q$ est la sortie mesurée. Les matrices de l'espace d'état (2)-(4) dépendent d'une chaîne de Markov prenant ses valeurs dans l'ensemble fini $\mathbb{K}$ avec une matrice de probabilité de transition associée donnée par $p_{ij} = Prob(\theta_{k+1} = j|\theta_k = i)$, ce qui doit satisfaire les contraintes de normalisation $p_{ij} \geq 0$ et $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ pour chaque $i \in \mathbb{K}$. Pour faciliter la présentation, les notations suivantes : $A(\theta_k) := A_i$, $B(\theta_k) := B_i$, $J(\theta_k) := J_i$, $C_z(\theta_k) := C_{zi}$, $D_z(\theta_k) := D_{zi}$, $E_z(\theta_k) := E_{zi}$, $C_y(\theta_k) := C_{yi}$ et $E_y(\theta_k) := E_{yi}$ sont adoptés lorsque $\theta_k = i \in \mathbb{K}$.

La matrice de transition de probabilité est donnée par $\mathbb{P} = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Dans le contexte de MJLS, il existe plusieurs formes équivalentes de définir la stabilité du système (2)-(4), comme la stabilité quadratique de la moyenne, la stabilité exponentielle ou stochastique. Il a été montré dans Ji et al. (1991) que ces définitions sont en fait équivalentes pour un MJLS, étant désignées comme la stabilité du second moment (SMS), ou, tout simplement, comme stabilité par concision. Méthodes pour vérifier la stabilité à partir de l'existence d'une solution positive définie pour un ensemble de inégalités de Lyapunov couplées ont été démontrées par Costa et al. (2005). Nous allons utiliser une de ces conditions, qu'implique que le système $\mathcal{G}$ est stable si et seulement s'il existe des matrices $P_i = P_i' > 0$ tels que

$$A_i' P_{pi} A_i - P_i < 0 \tag{5}$$

pour tout $i \in \mathbb{K}$. À partir de la définition de la norme $\mathcal{H}_\infty$ Costa et do Val (1996), il est également possible de calculer $\|\mathcal{G}\|_\infty^2$ comme la solution optimale d'un problème de programmation convexe, exprimée par LMIs, qui peut être obtenu à partir des résultats présentés en Seiler et Sengupta (2003)

$$\|\mathcal{G}\|_\infty^2 = \inf_{(\gamma, P_i) \in \Phi} \gamma \tag{6}$$

où Φ est l'ensemble de toutes les matrices positives définie P_i et $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que la LMI

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ P_{pi}A_i & P_{pi}J_i & P_{pi} & \bullet \\ C_{zi} & E_{zi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \tag{7}$$

soit satisfaite pour tout $i \in \mathbb{K}$. Nous sommes maintenant en mesure de poser le problème principal de ce papier. Associé au système markovien (2)-(4) on considère le contrôleur $\mathcal{C}$ par retour dynamique de sortie dépendant du mode basé sur le modèle interne de la plante

$$\begin{aligned} x_c(k+1) &= A(\theta_k)x_c(k) + B(\theta_k)u(k) + \\ &\quad + B_c(\theta_k)(y(k) - C_y(\theta_k)x_c(k)) \end{aligned} \tag{8}$$
$$\begin{aligned} u(k) &= C_c(\theta_k)x_c(k) + \\ &\quad + D_c(\theta_k)(y(k) - C_y(\theta_k)x_c(k)) \end{aligned} \tag{9}$$

où $x_c(k) \in \mathbb{R}^n$, $x_c(0) = 0$ et les matrices B_{ci}, C_{ci} et D_{ci}, pour tout $i \in \mathbb{K}$, ont dimensions compatibles. Notre objective est de déterminer ces matrices de telle manière que la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée soit minimale. Après la connexion du contrôleur (8)-(9) avec le système (2)-(4), la sortie contrôlée $z(k)$ est donnée par

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}} : \begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}(\theta_k)\tilde{x}(k) + \tilde{J}(\theta_k)w(k) \\ z(k) = \tilde{C}(\theta_k)\tilde{x}(k) + \tilde{E}(\theta_k)w(k) \end{cases} \tag{10}$$

où

$$\tilde{A}_i := \begin{bmatrix} A_i + B_i D_{ci} C_{yi} & B_i C_{ci} - B_i D_{ci} C_{yi} \\ B_{ci} C_{yi} + B_i D_{ci} C_{yi} & \mathcal{A}_i \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\tilde{J}_i := \begin{bmatrix} J_i + B_i D_{ci} E_{yi} \\ B_{ci} E_{yi} + B_i D_{ci} E_{yi} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\tilde{C}_i := [C_{zi} + D_{zi} D_{ci} C_{yi} \;\; D_{zi} C_{ci} - D_{zi} D_{ci} C_{yi}] \tag{13}$$

$$\tilde{E}_i := E_{zi} + D_{zi} D_{ci} E_{yi} \tag{14}$$

avec

$$\mathcal{A}_i = A_i - B_{ci} C_{yi} + B_i C_{ci} - B_i D_{ci} C_{yi} \tag{15}$$

et, par conséquent, le problème à résoudre est écrit de façon plus compacte

$$\min_{B_{ci}, C_{ci}, D_{ci}} \|\mathcal{G}_{\mathcal{C}}\|_\infty^2 \tag{16}$$

La raison d'adopter un contrôleur avec la forme (8)-(9) est d'obtenir, par LMI, un contrôleur de retour de sortie avec des paramètres qui ne dépendent pas les probabilités de transition, afin de résoudre les problèmes où les probabilités de transition sont incertaines. Nous visons également à résoudre le problème de disponibilité en *cluster* du mode et par conséquence de nombreux modèles en réseau Gonçalves et al. (2010). Aucun de ces deux cas ne peut être traité avec le contrôleur obtenu dans Geromel et al. (2009), qui est optimal mais dépend de la disponibilité du mode et d'une connaissance complète des probabilités de transition.

À partir de la détermination de la norme $\mathcal{H}_\infty$, on peut constater que le contrôleur d'ordre complète $\mathcal{C}$ impose un système en boucle fermée $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ avec une ordre deux fois plus grande que l'ordre du système $\mathcal{G}$. Ainsi le calcul de la norme $\mathcal{H}_\infty$ a besoin de matrices auxiliaires symétriques $\tilde{P}_i \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, pour tout $i \in \mathbb{K}$. Par conséquence, on considère que $\tilde{P}_i$ soient des matrices réelles $2n\times 2n$ partitionnées comme suit :

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} X_i & U_i \\ U_i' & \hat{X}_i \end{bmatrix}, \; \tilde{P}_i^{-1} = \begin{bmatrix} Y_i & V_i \\ V_i' & \hat{Y}_i \end{bmatrix}, \; \tilde{T}_i = \begin{bmatrix} Y_i & I \\ V_i' & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

où tous les blocs sont des matrices réelles $n \times n$. On peut vérifier que

$$\tilde{T}_i' \tilde{P}_i \tilde{T}_i = \begin{bmatrix} Y_i & I \\ I & X_i \end{bmatrix} \tag{18}$$

pour tout $i \in \mathbb{K}$. C'est un fait connu que si on contraint la matrice en (18) à être définie positive alors il est toujours possible de déterminer les blocs de la matrice dans (17) afin d'obtenir $\tilde{P}_i > 0$. Par ailleurs, cela peut être accompli même si la matrice U_i ou V_i pour chaque $i \in \mathbb{K}$ est fixe d'une façon arbitraire (mais non singulière). Maintenant, nous procédons en considérant $\tilde{P}_i > 0$ et on adopte un raisonnement analogue pour la combinaison convexe de ces matrices. À partir de (17), la même partition rend

$$\tilde{P}_{pi} = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \tilde{P}_j = \begin{bmatrix} X_{pi} & U_{pi} \\ U_{pi}' & \hat{X}_{pi} \end{bmatrix} \tag{19}$$

et en désignant

$$\tilde{P}_{pi}^{-1} = \begin{bmatrix} R_{1i} & R_{2i} \\ R_{2i}' & R_{3i} \end{bmatrix}, \; \tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} I & X_{pi} - R_{1i}^{-1} \\ 0 & U_{pi}' \end{bmatrix} \tag{20}$$

on vérifie que

$$\tilde{Q}_i' \tilde{P}_{pi}^{-1} \tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} R_{1i} & 0 \\ 0 & X_{pi} - R_{1i}^{-1} \end{bmatrix} \tag{21}$$

C'est important de souligner que les quatre matrices en bloc qui définissent l'inverse $\tilde{P}_{pi}^{-1}$ dépendent d'un façon non linéaire des quatre matrices en bloc $\tilde{P}_{pi}$. Toutefois, comme $R_{1i}^{-1} = X_{pi} - U_{pi} \hat{X}_{pi}^{-1} U_{pi}'$, le choix $U_i = -\hat{X}_i = Y_i^{-1} - X_i$ implique que la matrice partitionnée (21) devient

$$\tilde{Q}_i' \tilde{P}_{pi}^{-1} \tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} Y_{qi} & 0 \\ 0 & X_{pi} - Y_{qi}^{-1} \end{bmatrix} \tag{22}$$

Les relations (18) et (22) sont les principaux résultats qu'on va utiliser ensuite pour la synthèse des contrôleurs par retour dynamique de sortie.

3. CONTRÔLEUR DÉPENDANT DU MODE

Dans cette section, nous présentons des conditions suffisantes pour le calcul des gains B_{ci}, C_{ci} and D_{ci} du contrôleur pour tout $i \in \mathbb{K}$.

Théorème 1. Il existe un contrôleur linéaire par retour de sortie dépendant du mode dans la forme (8)-(9) pour tout $i \in \mathbb{K}$ tel que $\|\mathcal{G}_{\mathcal{C}}\|_\infty^2 < \gamma$ s'il existe des matrices symétriques Y_i, X_i, Z_{ij} et les matrices L_i, F_i, K_i, H_i, G_i avec des dimensions compatibles qui satisfont les inégalités matricielles

$$\begin{bmatrix} Y_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ I & X_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \gamma I & \bullet & \bullet & \bullet \\ \Xi_{1i} & A_i + B_i K_i C_{yi} & J_i + B_i K_i E_{yi} & \mathcal{H}_i & \bullet & \bullet \\ 0 & G_i A_i - F_i C_{yi} & G_i J_i - F_i E_{yi} & 0 & \mathcal{Y}_i & \bullet \\ \Xi_{2i} & C_{zi} + D_{zi} K_i C_{yi} & E_{zi} + D_{zi} K_i E_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{ij} & \bullet \\ H_i & Y_j \end{bmatrix} > 0 \tag{24}$$

où

$$\mathcal{Y}_i = G_i + G_i' - X_{pi} + Y_{qi}^{-1} \tag{25}$$

$$\mathcal{H}_i = H_i + H_i' - Z_{pi} \tag{26}$$

$$\Xi_{1i} = A_i Y_i + B_i L_i \tag{27}$$

$$\Xi_{2i} = C_{zi} Y_i + D_{zi} L_i \tag{28}$$

pour tout $i, j \in \mathbb{K}$. Dans le cas affirmatif, le contrôleur linéaire par retour de sortie est définie par les gains

$$B_{ci} = G_i^{-1} F_i, \; C_{ci} = L_i Y_i^{-1}, \; D_{ci} = K_i \tag{29}$$

pour tout $i \in \mathbb{K}$.

Preuve 1. Nous supposons que les inégalités (23) et (24) sont valables. Par l'application du complément de Schur dans (24), on vérifie que $H_i + H_i' - Z_{pi} \leq Y_{qi}$. D'autre part, comme $X_i > Y_i^{-1}$ alors $X_{pi} - Y_{qi}^{-1} > 0$ et pour chaque G_i, nous avons $G_i + G_i' - X_{pi} + Y_{pi}^{-1} \leq G_i(X_{pi} - Y_{qi}^{-1})^{-1} G_i'$. Par conséquent, nous pouvons substituer ces termes dans la diagonale de (23) par leurs bornes supérieures, et l'inégalité reste valable. Puis on le multiplie à gauche par $\mathrm{diag}\{I, I, I, I, (X_{pi} - Y_{qi}^{-1}) G_i^{-1}, I\}$ et à droite par sa transposée. Avec le choix particulier $U_i = Y_i^{-1} - X_i$ on calcule $V_i' = Y_i$. En considérant les définitions (17) et (20), notre inégalité est équivalente à

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}_i'\tilde{P}_i\tilde{T}_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ \tilde{Q}_i'\tilde{A}_i\tilde{T}_i & \tilde{Q}_i'\tilde{J}_i & \tilde{Q}_i'\tilde{P}_{pi}^{-1}\tilde{Q}_i & \bullet \\ \tilde{C}_i & \tilde{E}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \tag{30}$$

qui, multipliée à droite par diag$\{\tilde{T}_i^{-1}, I, \tilde{Q}_i^{-1}\tilde{P}_{pi}, I\}$ et à gauche par sa transposée, nous donne (7) et $\|\mathcal{G_C}\|_\infty^2 < \gamma$.

Il faut remarquer que les inégalités (23) ne sont pas des LMIs parce qu'ils dépendent d'un terme non linéaire Y_{qi}^{-1}. Une tentative de les résoudre peut être obtenue en appliquant l'algorithme CCL de El Ghaoui et al. (1997).

Dans Geromel et al. (2009) les LMIs donnent des conditions necessaires et suffisantes. Ce n'est pas le cas ici, car nous prenons un contrôleur basé sur le modèle interne du système. Néanmoins, comme nous allons illustrer plus tard, cette procédure peut encore fournir des résultats moins conservatifs que ceux de Zhang et Boukas (2009). Puisque les conditions dans le Théorème 1 sont seulement suffisantes, la minimisation de γ sous contraintes (23) et (24) va fournir une borne supérieure pour la vraie norme $\mathcal{H}_\infty$. Dans le corollaire suivant nous allons fournir une autre condition suffisante, basée sur LMIs, à la conception du contrôleur.

Corollaire 1. Il existe un contrôleur linéaire par retour de sortie dépendant du mode dans la forme (8)-(9) pour tout $i \in \mathbb{K}$ tel que $\|\mathcal{G_C}\|_\infty^2 < \gamma$ s'il existe des matrices symétriques Y_i, X_i, Z_{ij} et les matrices L_i, F_i, K_i, H_i, G_i avec des dimensions compatibles qui satisfont les LMIs

$$\begin{bmatrix} Y_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ I & X_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \gamma I & \bullet & \bullet & \bullet \\ \Xi_{1i} & A_i + B_iK_iC_{yi} & J_i + B_iK_iE_{yi} & \mathcal{H}_i & \bullet & \bullet \\ 0 & G_iA_i - F_iC_{yi} & G_iJ_i - F_iE_{yi} & 0 & \mathcal{X}_i & \bullet \\ \Xi_{2i} & C_{zi} + D_{zi}K_iC_{yi} & E_{zi} + D_{zi}K_iE_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \tag{31}$$

et (24) pour $i, j \in \mathbb{K}$, où $\mathcal{H}_i$, Ξ_{1i} et Ξ_{2i} sont donnés par (26), (27) et (28) respectivement, et

$$\mathcal{X}_i = G_i + G_i' - X_{pi} \tag{32}$$

Dans le cas affirmatif, le contrôleur linéaire par retour de sortie est définie par (29) pour tout $i \in \mathbb{K}$.

Preuve 2. Il résulte du fait que $0 < \mathcal{X}_i < \mathcal{Y}_i$ pour tout $i \in \mathbb{K}$. Si (31) est valide, nous pouvons remplacer le cinquième bloc diagonale par sa borne supérieure, et l'inégalité reste valable. Le reste du résultat est dérivé à partir du Théorème 1.

C'est évident que la borne supérieure de la norme $\mathcal{H}_\infty$ fournit par la minimisation de γ sous contrainte de (23) and (24) est meilleure ou égale à celle calculée en utilisant les LMIs (31) et (24), mais la résolution de ce dernier est beaucoup plus simple et nécessite moins de calcul. Cette borne supérieure, cependant, peut être améliorée en utilisant une procédure itérative basée uniquement sur des LMI faisables. Nous commençons en minimisant γ sous contrainte de (31) et (24). Nous appelons $\overline{Y}_i$ la valeur numérique de Y_i pour chaque $i \in \mathbb{K}$. Avec la contrainte supplémentaire

$$\begin{bmatrix} Y_i & Y_i \\ Y_i & \overline{Y}_i \end{bmatrix} > 0 \tag{33}$$

on assure que $\overline{Y}_{qi}^{-1}$ est un minorant de Y_{qi}^{-1} dans (23). Par conséquent, si on résoudre (23) et (24) en remplaçant le bloc $G_i + G_i' - X_{pi} + Y_{qi}^{-1}$ par $G_i + G_i' - X_{pi} + \overline{Y}_{qi}^{-1}$ et on ajout la contrainte (33), on obtient $\|\mathcal{G_C}\|_\infty^2 < \gamma$. La procédure est résumée dans le tableau suivant.

Algorithme 1: Procédure itérative pour améliorer le limitant supérieur de la norme $\mathcal{H}_\infty$

$l \leftarrow 0$;
Minimizer γ sous contrainte de (31) et (24);
$\gamma^{(0)} \leftarrow \gamma$;
$\overline{Y}_{qi}^{-1} \leftarrow Y_{qi}^{-1}$;
répéter
  $l \leftarrow l + 1$;
  Minimizer γ sous contrainte de (23), avec $\overline{Y}_{qi}^{-1}$ dans le lieu de Y_{qi}^{-1}, (24) et (33);
  $\gamma^{(l)} \leftarrow \gamma$;
  $\overline{Y}_{qi}^{-1} \leftarrow Y_{qi}^{-1}$;
jusqu'à $\frac{\gamma^{(l)}}{\gamma^{(l-1)}} > 1 - \epsilon$;
Calculer les gains du contrôleur B_{ci}, C_{ci} et D_{ci} par (29);

On rapelle que comme à chaque nouvelle itération, l'inégalité (33) impose une soluction sctrictement factible, la convergence sw l'algorithme est garantie. Cette proprieté n'est pas toujours valable en appliquant l'algorithme CCL dans (23)-(24).

Pour le problème dépendant du mode avec des probabilités de transition entièrement disponibles, la conception du contrôle présentées jusqu'ici n'améliore pas ce qui était donné dans Geromel et al. (2009). En fait, avec la méthode discuté ici, il est seulement possible de minimiser une borne supérieure de la norme $\mathcal{H}_\infty$, au cas qu'en utilisant Geromel et al. (2009) il est possible de minimiser la norme $\mathcal{H}_\infty$ reéle du système. Pourtant, dans les prochaines sections, nous utilisons cette approche pour résoudre le problème de la disponibilité du cluster et les probabilités de transition incertaine, deux cas qui ne peuvent pas être traités avec Geromel et al. (2009).

4. PROBABILITÉS DE TRANSITION INCERTAINES

Comme cela a déjà été discuté dans Gonçalves et al. (2011a), un point crucial concernant (7) est que pour chaque $i \in \mathbb{K}$, la dépendance se passe *uniquement* dans le i-ème ligne de la matrice de transition $\mathbb{P}$. En d'autres termes, pour chaque $i \in \mathbb{K}$ fixe, ces contraintes ne sont pas couplés par p_{ij} qui apparaissant dans les différentes lignes de $\mathbb{P}$. Partant de ce constat, nous avons divisé la matrice $\mathbb{P}$ par lignes : $\mathbb{P}' = [\mathbb{P}_1', \cdots, \mathbb{P}_N'] \in \mathbb{R}^{N\times N}$ où $\mathbb{P}_i \in \mathbb{R}^N$. Nous pouvons aussi utiliser le fait que les LMIs (23) et (24) sont affines par rapport aux probabilités de transition et que les gains du contrôleur (29) ne dépendent pas des probabilités de transition pour calculer un coût minimum garanti de la solution du problème (16) en imposant les contraintes dans chaque sommet du polytope convexe

$$\mathcal{P}_i = \text{co}\left\{\mathbb{P}_i^{(l)}\ ,\ l = 1, \cdots, N_p\right\} \tag{34}$$

pour $i \in \mathbb{K}$.

Un autre modèle capable de modéliser l'incertitude dans les probabilité, introduite dans Zhang et Boukas (2009), considère que certains des éléments de $\mathbb{P}$ sont inconnus. Dans ce cas, la matrice de probabilité de transition pour le système (2)-(4) a $[p_{ij}] =?$ pour certains $(i,j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, ce qui signifie que cet élément est totalement inconnu. En effet, telle hypothèse peut être considérée comme un cas particulier de l'incertitude polytopique comme celui représenté par (34), comme détaillé dans Gonçalves et al. (2011a).

5. DISPONIBILITÉ DU MODE EN *CLUSTER*

L'hypothèse que les modes $\theta_k \in \mathbb{K}$ sont disponibles peut ne pas être réaliste. Dans certaines applications, il peut être plus approprié de considérer la disponibilité en *cluster*. Considérons l'ensemble $\mathbb{L} = \{1, 2, \cdots, N_c\}$ avec $N_c \leq N$ et définissons l'ensemble des états de la chaîne de Markov $\mathbb{K}$ comme l'union de N_c ensembles disjoints, ou *clusters*, c'est-à dire $\mathbb{K} \equiv \cup_{\ell \in \mathbb{L}} \mathbb{U}_\ell$ tel que $\cap_{\ell \in \mathbb{L}} \mathbb{U}_\ell \equiv \emptyset$. Cela implique que les N modes sont divisés en N_c clusters et nous supposons qu'il est toujours possible de mesurer à quel cluster $\mathbb{U}_\ell$ un certain mode i appartient, même si le mode i est lui-même inconnu. Les problèmes dépendant du mode ($N_c = N$) et indépendant du mode ($N_c = 1$) sont des cas particuliers de cette définition.

Si l'on ajoute les contraintes d'égalité

$$G_i = G_\ell \ , \ Y_i = Y_\ell \ , \ L_i = L_\ell \ , \ F_i = F_\ell \qquad (35)$$

pour tous les $\ell \in \mathbb{L}$ et $i \in \mathbb{U}_\ell \subset \mathbb{K}$ aux conditions LMI du Théorème 1 et du Corollaire 1, nous pouvons vérifier que les gains du contrôleur seront les mêmes pour tous les modes i appartenant au même *cluster* $\mathbb{U}_\ell \subset \mathbb{K}$.

Comme les contrôleurs discutés ici dépendent du modèle interne du système, nous ne pouvons pas les utiliser pour résoudre le problème avec les *clusters* en général, parce que la réalisation du contrôleur (8)-(9) exige que le mode $i \in \mathbb{K}$ soit connu de façon que les matrices du système A_i, B_i et C_{yi} puissent être déterminées. Cependant, pour le cas de contrôle en réseau, il n'est pas difficile de considérer ces matrices avec des valeurs constantes pour tous les modes au sein du même cluster pour tout $i \in \mathbb{U}_\ell \subset \mathbb{K}$. Considérons, par exemple, le cas où les matrices d'état et de sortie dans (2)-(4) sont constants, indépendamment du mode de Markov, correspondant à la commande d'un système déterministe où le signal de commande est transmis à travers d'un réseau. Associé à un protocole approprié de détection d'échec de transmission, nous pouvons décrire la sortie $z(k)$ comme un MJLS avec un nombre de modes divisés en deux *clusters* différents, représentant le succès ou l'échec de la transmission de l'entrée de commande $u(k)$. Bien que la connaissance du mode du canal de réseau actuel peut ne pas être pratique, il est facile de savoir dans quel groupe le MJLS est en fonctionnement. En vue d'intégrer l'échec de transmission, les matrices d'entrée de commande B_i, D_i sont remis à zéro pour $i \in \mathbb{U}_\ell$, où $\mathbb{U}_\ell$ est un *cluster* qui représente l'échec de la transmission. Pour $i \notin \mathbb{U}_\ell$, ces matrices ont les vrais valeurs du système.

Il existe plusieurs modèles stochastiques pour le réseau, comme le Gilbert-Elliot Elliot (1963); Gilbert (1960), le Fritchman Fritchman (1967), et le McCullough McCullough (1968). L'utilisation du modèle Gilbert-Elliot associé à un MJLS est présenté dans de nombreux travaux dans la littérature Hespanha et al. (2007), mais ils font toujours référence à la soi-disant modèle simplifiée de Gilbert-Elliot. Dans Gonçalves et al. (2010), une méthode pour incorporer tous les modèles précédents dans le MJLS est présenté en détail.

		ZB (2009)	*Coro. 1*	*Algo. 1*
Système 1	Cas 1	1.17	0.46	0.46
	Cas 2	1.36	0.46	0.46
Système 2	Cas 1	1.88	1.64	1.32
	Cas 2	1.94	1.66	1.33

TABLE 1. Minimum $\gamma^\star$ pour différents cas de probabilité de transition.

6. EXEMPLE

Prenons le système étudié dans Zhang et Boukas (2009). Il s'agit d'un MJLS (2)-(4) avec quatre modes, où les matrices de l'espace d'état sont données par

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & -1.25 \\ 2.50 & 2.50 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.50 & -0.83 \\ 2.50 & 3.50 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ 2.50 & 3.00 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.57 \\ 2.50 & 2.75 \end{bmatrix}$$

et, pour tout $i \in \mathbb{K} = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$B_i = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \qquad J_i = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.10 \end{bmatrix}, \qquad C_{zi} = [1 \ \ 0]$$

$$C_{yi}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_{yi}^1 = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.08 \end{bmatrix}, \qquad D_{zi} = 0.8$$

$$C_{yi}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_{yi}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad E_{zi} = 0.6.$$

On peut vérifier que chaque mode individuelment, en boucle ouverte, est instable.

Nous allons considérer deux différentes sorties mesurées, où chaque système complet sera appelé Système 1 et 2 respectivement. Nous allons aussi considérer deux cas différents pour la matrice de probabilité de transition avec incertitudes

$$\mathbb{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ ? & ? & 0.3 & 0.2 \\ ? & 0.1 & ? & 0.3 \\ 0.2 & ? & ? & ? \end{bmatrix},$$

et

$$\mathbb{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & ? & 0.1 & ? \\ ? & ? & 0.3 & 0.2 \\ ? & 0.1 & ? & 0.3 \\ ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

qui seront nommés comme cas 1 et 2, respectivement. Nous rappelons que quand un élément de la matrice de probabilité de transition est $[p_{ij}] =?$ pour certains $(i,j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, on implique que l'élément correspondant est totalement inconnu. Les résultats obtenus en utilisant les procédures développées dans ce document sont résumées dans le Tableau 1.

Les résultats indiquent que, dans cet exemple, notre méthode est meilleur que les résultats obtenus par Zhang et Boukas (2009) lorsqu'on considère des probabilités inconnues. Nous pouvons aussi vérifier que dans le Système 2, notre procédure itérative a pu réduire environ 20% la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée.

7. CONCLUSIONS

Dans ce papier, nous avons proposé une méthode pour déterminer un contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ par retour dynamique de sortie qui est capable de prendre en compte les probabilités de transition incertaines et la disponibilité en *cluster* du mode pour les MJLS à temps discret. Concernant les incertitudes sur les probabilités de transition, au vu de l'état de l'art, c'est la première fois que ce problème est résolu par LMI au lieu de BMI, comme selon Zhang et Boukas (2009) et Chae et al. (2011). Quant à la disponibilité en *cluster* du mode, puisque le contrôleur dépend du modèle interne du système, nous avons besoin de restreindre l'application aux systèmes où certaines matrices de la représentation d'état ne varient pas au sein du même *cluster*. Néanmoins, une telle classe inclut des exemples importants de contrôle en réseau. La borne supérieure de la norme $\mathcal{H}_\infty$ peut être améliorée par une procédure itérative fondée exclusivement sur LMI. Un exemple numérique illustre l'applicabilité des résultats et les compare avec d'autres méthodes présentes dans la littérature.

Pour des travaux futurs, nous nous proposons de déterminer des conditions necessaires et suffisantes pour le calcule de contrôleurs $\mathcal{H}_\infty$ basés sur le modèle interne du système pour MJLS. Tels conditions existent dèja pour le cas $\mathcal{H}_2$, voir Costa et Tuesta (2004).

RÉFÉRENCES

Boukas, E.K. (2009). $\mathcal{H}_\infty$-control of discrete-time Markov jump systems with bounded transition probabilities. *Optimal Control Applications and Methods*, 30(5), 477–494.

Chae, S., Huang, D., et Nguang, S.K. (2011). Robust Partially Mode Delay-Dependent $\mathcal{H}_\infty$ Output Feedback Control of Discrete-Time Networked Control Systems. In *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, 1680–1685. San Francisco, California, USA.

Costa, O.L.V. et do Val, J.B.R. (1996). Full information H_∞ control for discrete-time infinite Markov jump parameter systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 202, 578–603.

Costa, O.L.V., do Val, J.B.R., et Geromel, J.C. (1997). A convex programming aproach to H_2 control of discrete-time markovian linear systems. *International Journal of Control*, 66, 557–579.

Costa, O.L.V., Fragoso, M.D., et Marques, R.P. (2005). *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*. Springer-Verlag.

Costa, O.L.V. et Tuesta, E.F. (2004). H_2-Control and the Separation Principle for Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 16, 320–350.

de Souza, C.E. (2006). Robust stability and stabilization of uncertain discrete-time markovian jump linear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 51(5), 836–841.

do Val, J.B.R., Geromel, J.C., et Gonçalves, A.P.C. (2002). The H_2-control for jump linear systems : cluster observations of the Markov state. *Automatica*, 38, 343–349.

El Ghaoui, L., Oustry, F., et AitRami, M. (1997). A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42, 1171–1176.

Elliot, E.O. (1963). Estimates of error rates for codes on burst-error channels. *Bell Systems Tech. Journal*, 42, 1977–1997.

Fritchman, B.D. (1967). A binary channel characterization using partitioned markov chain. *IEEE Trans. on Information Theory*, 13, 221–227.

Geromel, J.C., Gonçalves, A.P.C., et Fioravanti, A.R. (2009). Dynamic Output Feedback Control of Discrete-Time Markov Jump Linear Systems Through Linear Matrix Inequalities. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48, 573–593.

Gilbert, E.N. (1960). Capacity of a burst-noise channel. *Bell Systems Tech. Journal*, 39, 1253–1266.

Gonçalves, A.P.C., Fioravanti, A.R., et Geromel, J.C. (2010). Markov jump linear systems and filtering through network transmitted measurements. *Signal Processing*, 90, 2842–2850.

Gonçalves, A.P.C., Fioravanti, A.R., et Geromel, J.C. (2011a). Filtering of discrete-time markov jump linear systems with uncertain transition probabilities. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21, 613–624.

Gonçalves, A.P.C., Fioravanti, A.R., et Geromel, J.C. (2011b). $\mathcal{H}_\infty$ State Feedback Control of Discrete-time Markov Jump Linear Systems through Linear Matrix Inequalities. In *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, 12620–12625. Milan, Italy.

Hespanha, J.P., Naghshtabrizi, P., et Xu, Y. (2007). A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 95, 138–162.

Ji, Y., Chizeck, H.J., Feng, X., et Loparo, K.A. (1991). Stability and control of discrete-time jump linear systems. *Control Theory and Advanced Technology*, 7, 247–270.

McCullough, R.H. (1968). The binary regenerative channel. *The Bell System Technical Journal*, 47, 1713–1735.

Seiler, P. et Sengupta, R. (2003). A bounded real lemma for jump systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48, 1651–1654.

Seiler, P. et Sengupta, R. (2005). An H_∞ approach to networked control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50, 356–364.

Zhang, L.X. et Boukas, E.K. (2009). H_∞ control for discrete-time markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19(8), 868–883.