Condução de Calor Bidimensional

- Soluções analíticas para condução térmica em casos 2D requer um esforço muito maior daquelas para casos 1D.

- Há no entanto inúmeras soluções baseadas em técnicas da Física-Matemática, tais como: séries de Fourier, séries de Bessel, séries de Legendre, Transformada de Laplace entre outras, veja por exemplo *Carslaw and Jaeger (1959) Conduction Heat Transfer*.

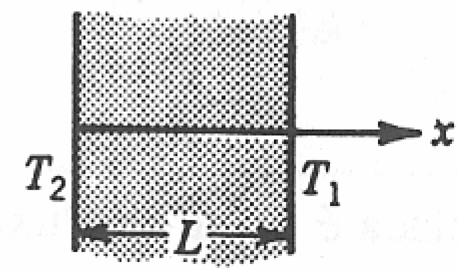
- Baseado nestas soluções analíticas o Livro Texto propõe a determinação da taxa de calor para algumas situações bi-dimensionais baseado em '*fatores de forma de condução*'.

Fator de Forma de Condução

1. A geometria contém somente DUAS superfícies ISOTÉRMICAS, T1 e T2
2. O material é homogêneo

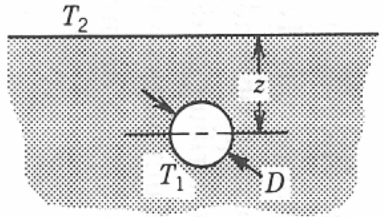
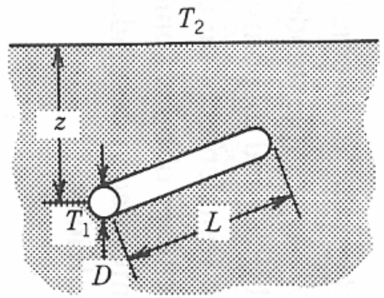
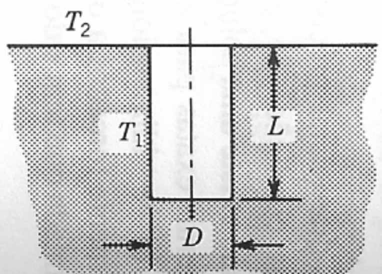
$$\dot{Q} = S \cdot k \cdot (T_2 - T_1) \rightarrow R = \frac{1}{S \cdot k}$$

- Onde S é o fator de forma de condução e tem dimensão de metro.

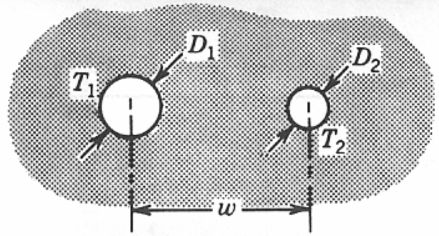


- Note que para uma placa plana unidimensional infinita, S = A/L

Tabela 8-3 Fatores de forma de condução de calor[11]

Sistema	Esquema	Restrições	Fator de forma
Esfera isotérmica enterrada em um meio semi-infinito		$z > D/2$	$\dfrac{2\pi D}{1 - D/4z}$
Cilindro isotérmico horizontal de comprimento L enterrado em um meio semi-infinito		$L >> D$	$\dfrac{2\pi L}{\cosh^{-1}(2z/D)}$
		$L >> D$ $z > 3D/2$	$\dfrac{2\pi L}{\ln(4z/D)}$
Cilindro vertical em um meio semi-infinito		$L >> D$	$\dfrac{2\pi L}{\ln(4L/D)}$

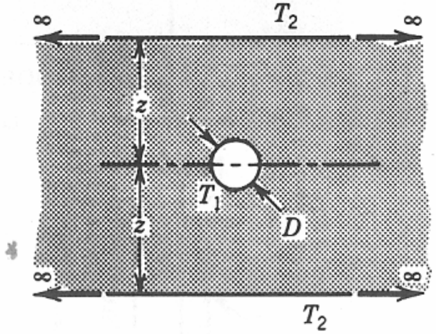
Condução entre dois cilíndros de comprimento L em um meio infinito



$L >> D_1 D_2$
$L >> w$

$$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{4w^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1D_2}\right)}$$

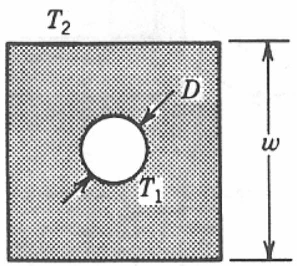
Cilindro circular horizontal de comprimento L entre placas paralelas de comprimento igual e largura infinita



$z > D/2$
$L >> z$

$$\frac{2\pi L}{\ln(8z/D)}$$

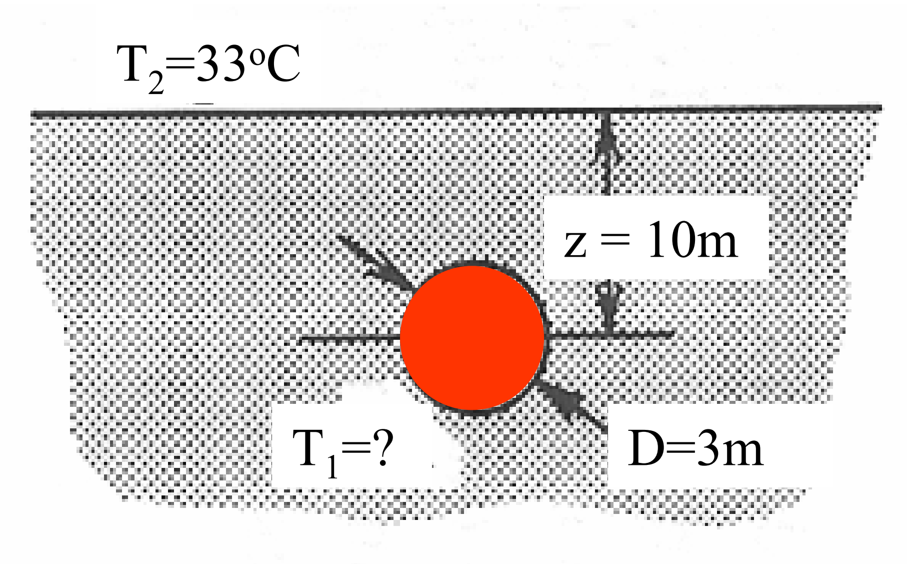
Cilíndro circular de comprimento L inserido em um sólido quadrado



$w > D$
$L >>> w$

$$\frac{2\pi L}{\ln(1{,}08w/D)}$$

- **8-25** Resíduo de material radioativo é colocado em uma esfera que é então enterrada na terra (k=0,52W/m°C). A esfera tem um diâmetro de 3m e seu centro é enterrado 10m abaixo da superfície do solo. A taxa de transferência de calor liberada no início do processo de armazenamento é de 1250W. Estime a temperatura da superfície da esfera se a temperatura do solo é de 33°C.



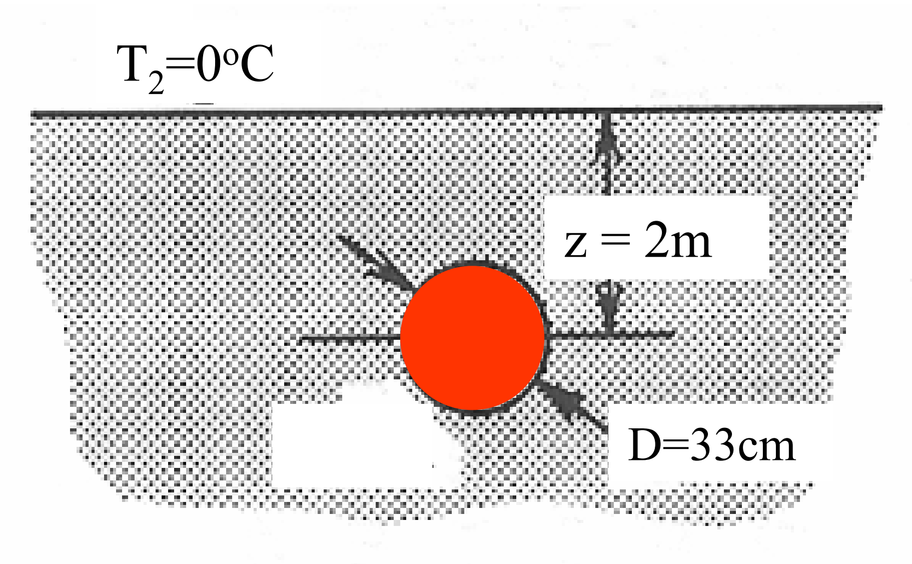
$$\dot{Q} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_s} \rightarrow T_1 = T_2 + \dot{Q} \cdot R_s$$

$$S = \frac{2\pi D}{1 - D/4z} = 20,38m \qquad z>D/2$$

$$R_s = \frac{1}{S \cdot k} = 10,6\ ^{o}C/W$$

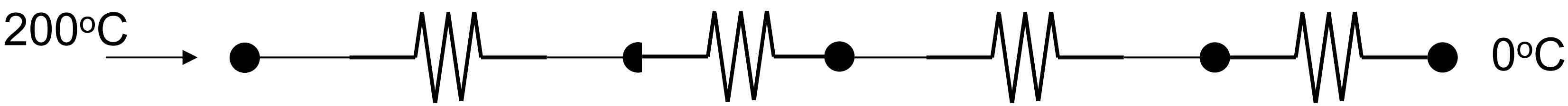
$$T_1 = 150,9^{o}C$$

- **8-28** Uma tubulação com vapor d'agua a 200ºC está enterrada a 2 m abaixo do solo (ksolo = 41 W/mºC) que está a 0ºC. O tubo (k = 41 W/mºC) tem um diâmetro interno de 20 cm e uma espessura de 5mm com um coef transf calor interno de 1000 W/m²ºC. O tubo é envolto em uma manta isolante (k = 0,06 W/mºC) com 6 cm de diâmetro. Determine a taxa de calor perdida por metro linear de tubo



- A taxa de transferência de calor do vapor para o solo pode ser determinada pelo circuito equivalente:

$$R_{isol} = \frac{Ln\left(d_3/d_2\right)}{2\pi k_{isol} \cdot L}$$



$$R_{aco} = \frac{Ln\left(d_2/d_1\right)}{2\pi k_{aco} \cdot L} \qquad R_s = \frac{1}{S \cdot k}$$

$$R_c = \frac{1}{hi \cdot Ai} = \frac{1}{1000 \cdot \pi \cdot 0,2} = 0,002 / L$$

$$R_{aco} = \frac{Ln\left(d_2/d_1\right)}{2\pi k_{aco} \cdot L} = \frac{Ln\left(21/20\right)}{2\pi 41 \cdot L} = 1,89 \cdot 10^{-4} / L$$

$$R_{isol} = \frac{Ln\left(33/21\right)}{2\pi \cdot 0,06 \cdot L} = 1,117 / L$$

$$S = \frac{2\pi L}{Ln\left(4z/D\right)} = 1,971m$$

$$R_s = \frac{1}{S \cdot k} = 0,976 / L$$

$$R_{eq} = 2,095 / L$$

$$\dot{Q}/L = 95,5W$$

CONDUÇÃO DE CALOR TRANSIENTE

CONDUÇÃO TRANSIENTE

- A temperatura varia no espaço e no tempo.
- A equação representa um balanço de energia num volume 'infinitesimal'.
- O terceiro termo representa uma geração volumétrica de calor (reação química, elétrico ou de outras fontes)

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + \dot{q}'''$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho C T \, d\forall = \int_V \nabla \cdot (k \nabla T) \, d\forall + \int_V \dot{q}''' d\forall$$

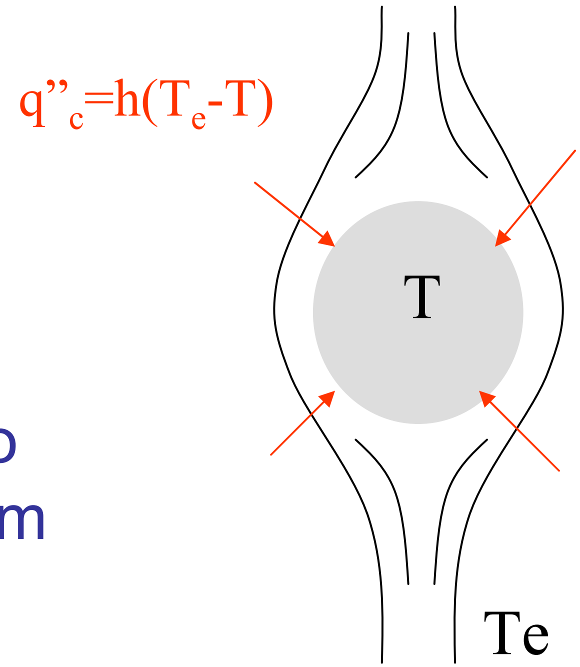
$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q} + \int_V \dot{q}''' d\forall$$

- A obtenção do campo de temperaturas através da solução analítica ou numérica destas equações geralmente tem um custo elevado. Vamos estudar técnicas aproximadas

Método Concentrado

- O corpo possui uma temperatura uniforme em TODO os instantes.
- Sem geração de calor, o balanço de energia é:

$$\underbrace{\rho C \forall \frac{dT}{dt}}_{\substack{\text{Variação} \\ \text{Energia Interna}}} = \underbrace{hA\left(T_e - T\right)}_{\substack{\text{Taxa Calor} \\ \text{Cruza S.C.}}}$$



- O calor transferido por convecção para o corpo sólido é difundido por condução em seu interior.
- O processo de condução é mais eficaz que o de convecção de forma que a temperatura do corpo sólido é uniforme!

Solução da E.D.O. $\rho C\forall \dfrac{dT}{dt} = hA\left(T_e - T\right)$

- No tempo t = 0, a temperatura do corpo está a T0
- Transformação $\theta = (T\text{-}T_e) \quad \longrightarrow \quad \theta(0) = (T_0\text{-}T_e) = \theta_0$

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hA}{\rho C\forall} \cdot dt \rightarrow Ln\left(\frac{\theta}{\theta_o}\right) = -\frac{hA}{\rho C\forall} \cdot t$$

- ou em termos das temperaturas

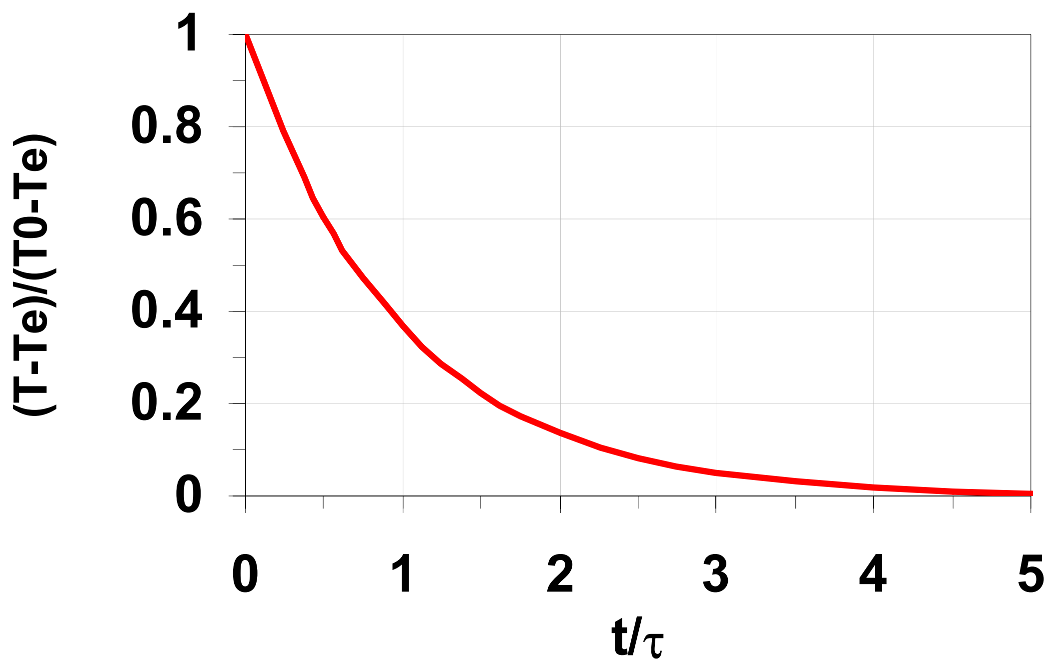
$$\left(\frac{T - T_e}{T_0 - T_e}\right) = e^{-t/\tau} \quad \text{onde} \qquad \tau = \left(\frac{\rho C\forall}{hA}\right)$$

A Constante de Tempo, τ

- A constante de tempo é um parâmetro do sistema que define uma escala de tempo.

$$\tau = \left(\frac{\rho C \forall}{hA} \right)$$

- Se $\tau >> 1$, o corpo apresenta uma variação ‘lenta’
- Se $\tau << 1$, o corpo apresenta uma variação ‘rápida’



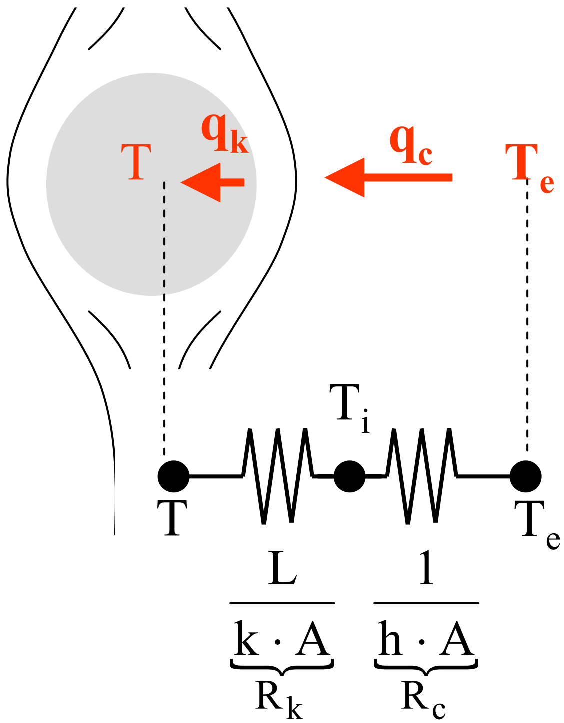
$t = 1\tau \rightarrow 0.36$

$t = 2\tau \rightarrow 0.13$

$t = 3\tau \rightarrow 0.05$

Quando é Válido Aplicar Mod. Concentrado?

- O modelo só é válido quando a temperatura no interior do corpo varia de forme uniforme.Há dois mecanismos de transferência de calor: convecção e condução envolvidos. Vamos analisá-los:



- A temperatura é uniforme quando $R_k << R_c$ ou

$$\mathbf{Bi} = \frac{R_k}{R_c} = \frac{hL}{k} << 1$$

- Biot, Bi compara as resistências interna e externa ao corpo sólido. L é uma dimensão caract. do corpo.
- <u>*Método Concentrado é válido quando Bi << 1*</u>

Taxa Transf. Calor Modelo Concentrado

- A taxa de transferência de calor, em qualquer instante de tempo, é determinada por:

$$\dot{Q} = hA \cdot \left(T_e - T\right) \quad \rightarrow \quad \dot{Q} = -hA \cdot \left(T_0 - T_e\right) e^{-\left(t/\tau\right)}$$

- O calor total transferido do ou para o corpo sólido é obtido integrando a taxa de calor:

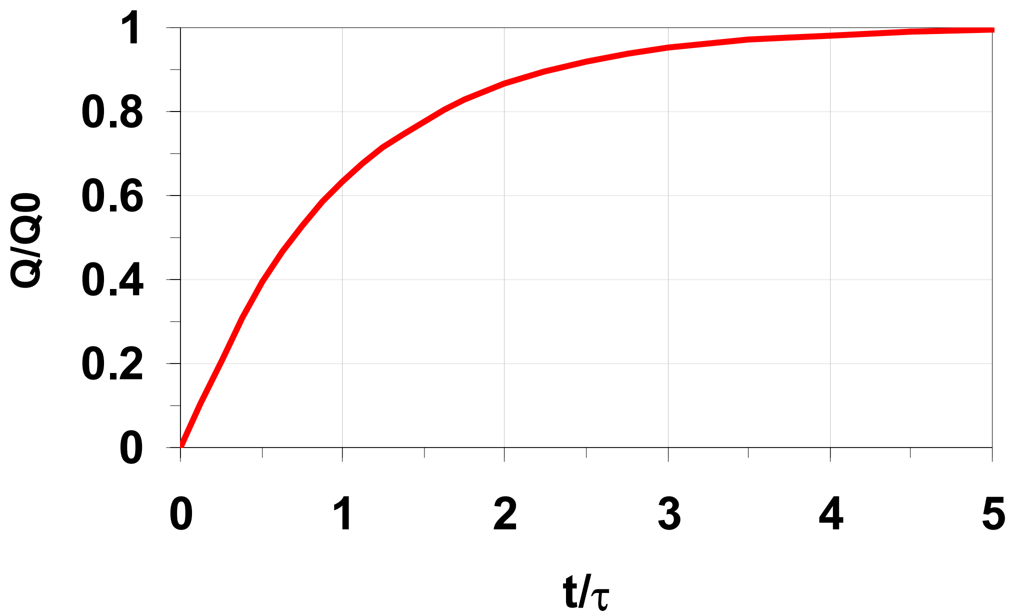
$$Q = \underbrace{\rho C \forall \cdot \left(T_0 - T_e\right)}_{Q_0} \left[1 - e^{-\left(t/\tau\right)}\right]$$

- Note que para t = 0, Q =0, como deveria ser!

Máximo Calor Transferido

- O calor total transferido do ou para o corpo sólido é obtido integrando a taxa de calor:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - e^{-\left(t/\tau\right)} \qquad Q_0 = \rho C \forall \cdot \left(T_0 - T_e\right)$$

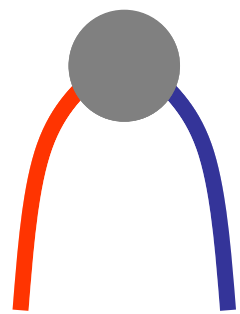


$$t = 1\tau \rightarrow 0.64$$
$$t = 2\tau \rightarrow 0.87$$
$$t = 3\tau \rightarrow 0.95$$

- O máximo calor que pode ser transferido, Q_0, é quando o corpo é aquecido da temp. inicial a Te.

- **8-30** O termopar é um sensor de temperatura formado pela fusão de dois metais não similares na forma esférica. Considere um processo onde haja uma variação em degrau de temperatura de 100ºC para 200ºC. Determine a curva de resposta do termopar para as características definidas na figura.

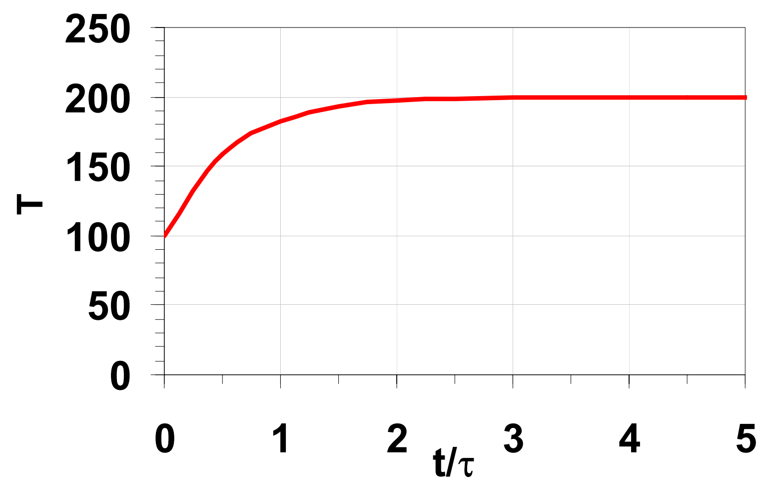
D = 0,5 mm



$k = 23\ \mathrm{W/m^{o}C}$
$\rho = 8920\ \mathrm{kg/m^3}$
$C = 384\ \mathrm{J/kg^{o}C}$
$h = 500\ \mathrm{W/m^{2o}C}$

A constante de tempo:

$$\tau = \left(\frac{\rho C \forall}{hA}\right) = \frac{8920 \cdot 384 \cdot \frac{4\pi}{3}\left(\frac{0.005}{2}\right)^3}{500 \cdot 4\pi\left(\frac{0.005}{2}\right)^2} = 0.57\mathrm{s}$$



Condução Transiente Bi > 0.1

- Não se considera a temperatura do corpo uniforme para casos com Bi > 0.1. Portanto não se pode utilizar o modelo condensado mas considerar a variação no tempo e no espaço da temperatura.
- Veja (FILME) numa placa de aço com bordas isoladas

1. Condução bi-dimensional & transiente
2. Corpo inicialmente 0^oC tem a temperatura numa parte da fronteira subitamente alterada para 100^oC.
3. O distúrbio da fronteira se propaga por ‘difusão’ no interior do sólido.

Condução 1D Transiente, Bi > 0,1

- Será abordados casos transientes e uni-dimensionais. Isto é, a temperatura só varia em uma direção.
- Veja (FILME) de um bloco de aço submetido a uma variação de temperatura na face.

1. Condução uni-dimensional & transiente
2. Corpo inicialmente 0^{o}C tem a temperatura numa face subitamente alterada para 100^{o}C.
3. O distúrbio da fronteira se propaga por ‘difusão’ no interior do sólido somente ao longo da direção X.

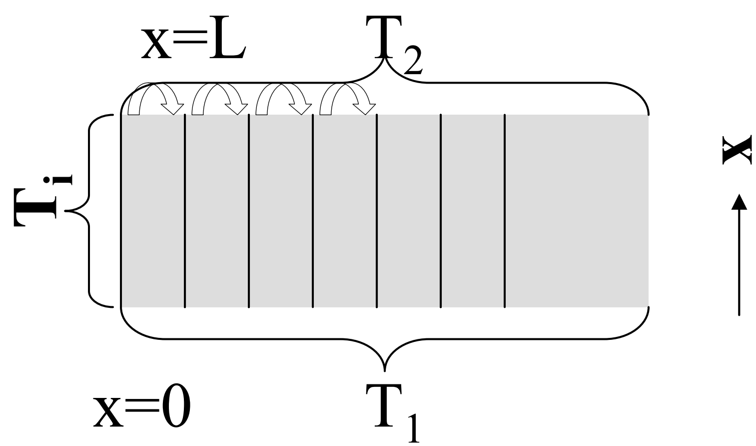
Condução 1D Transiente, Bi > 0,1

- Formulação

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \textbf{onde} \quad \alpha = \frac{k}{\rho C}}$$

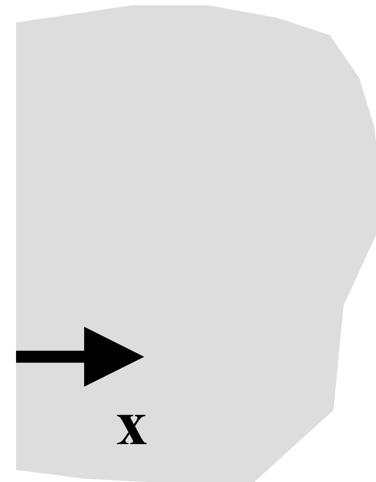
- Eq. diferencial parcial de segunda ordem linear Parabólica. Ela tem uma condição inicial e duas condições de contorno em x.

$$\begin{aligned} &\textbf{C.I.} \rightarrow T(x,0) = T_i \\ &\textbf{C.C.} \rightarrow T(0,t) = T_1 \\ &\textbf{C.C.} \rightarrow T(L,t) = T_2 \end{aligned}$$



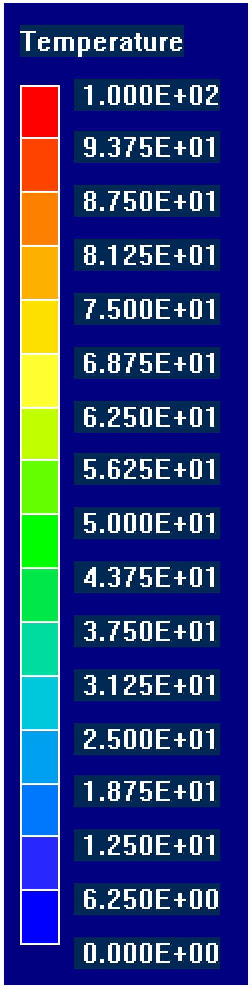
Condução 1D Transiente: Sólido Semi-Infinito

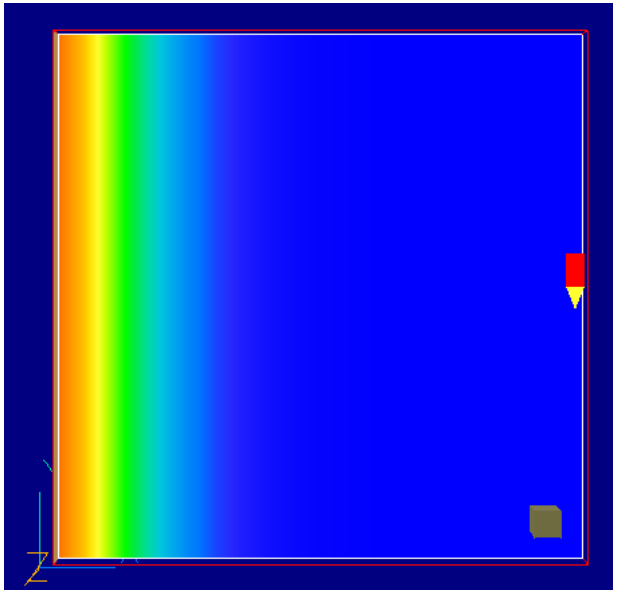
- Um sólido semi-infinito 2D possui uma face mas largura infinita. Qualquer distúrbio de temperatura na face NUNCA atingirá a sua outra extremidade.



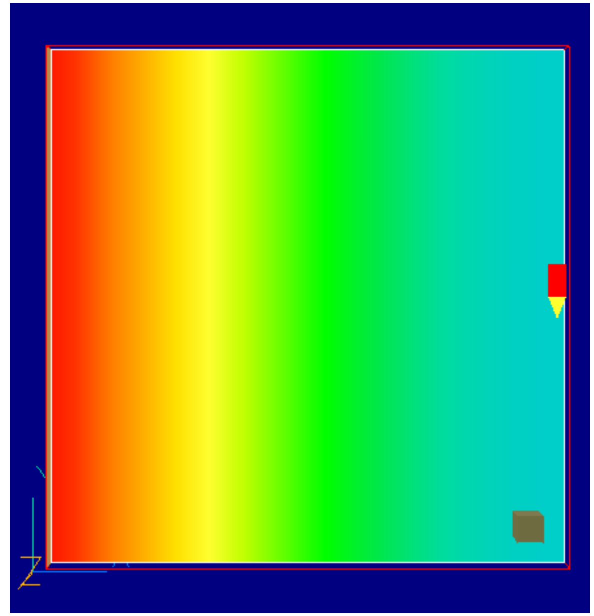
- Qualquer sólido com dimensões ‘finitas’ pode ser ‘aproximado’ como um sólido semi-infinito desde que o distúrbio de temperatura da face não atingir a sua outra fronteira.

Aproximação de Sólido Semi-Inifinito

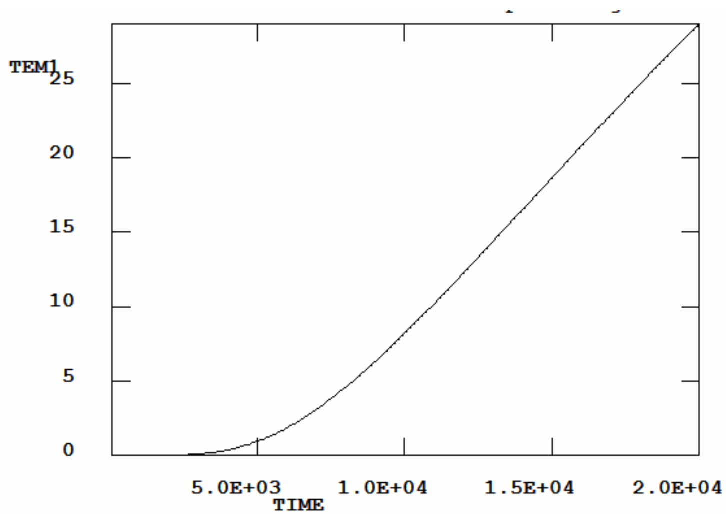




Distúrbio não chegou na outra face



Distúrbio chegou na outra face

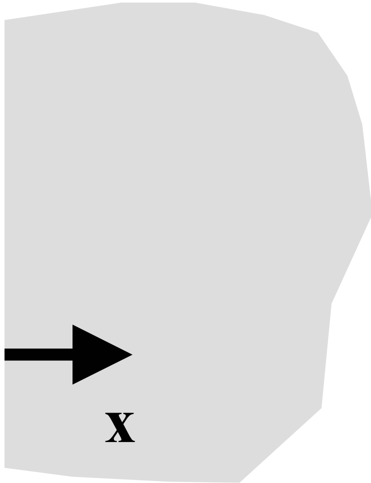


• História da temperatura versus tempo na face oposta.

• Para t < 5000s pode-se dizer que o sólido se comporta como Semi-Infinito.

Solução Sólido Semi-Infinito

- Considere um sólido inicialmente a temperatura T_0. A temperatura em sua face muda, subitamente, para T_1 e o calor começa a ser difundido no interior do sólido.



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

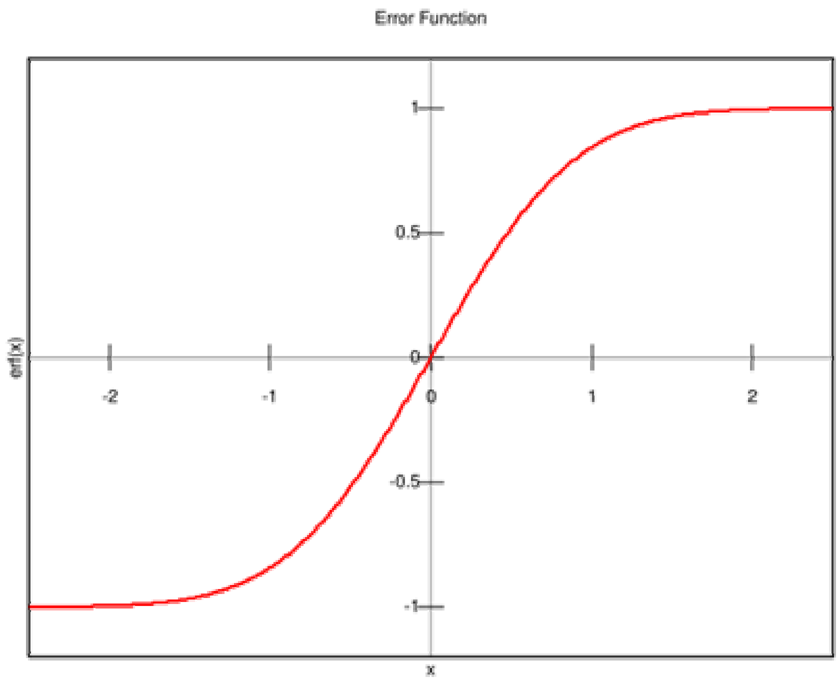
$$\begin{cases} \text{C.I.} \rightarrow T(x,0) = T_0 \\ \text{C.C.} \rightarrow T(0,t) = T_1 \\ \text{C.C.} \rightarrow T(\infty,t) = T_0 \end{cases}$$

$$\frac{T(x,t) - T_1}{T_0 - T_1} = \text{erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right]$$

Error Function (Wikipedia)

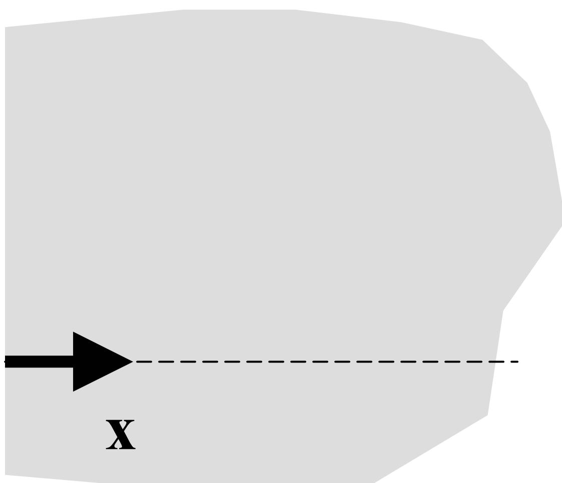
In mathematics, the error function (also called the Gauss error function) is a non-elementary function which occurs in probability, statistics and partial differential equations. It is defined as:

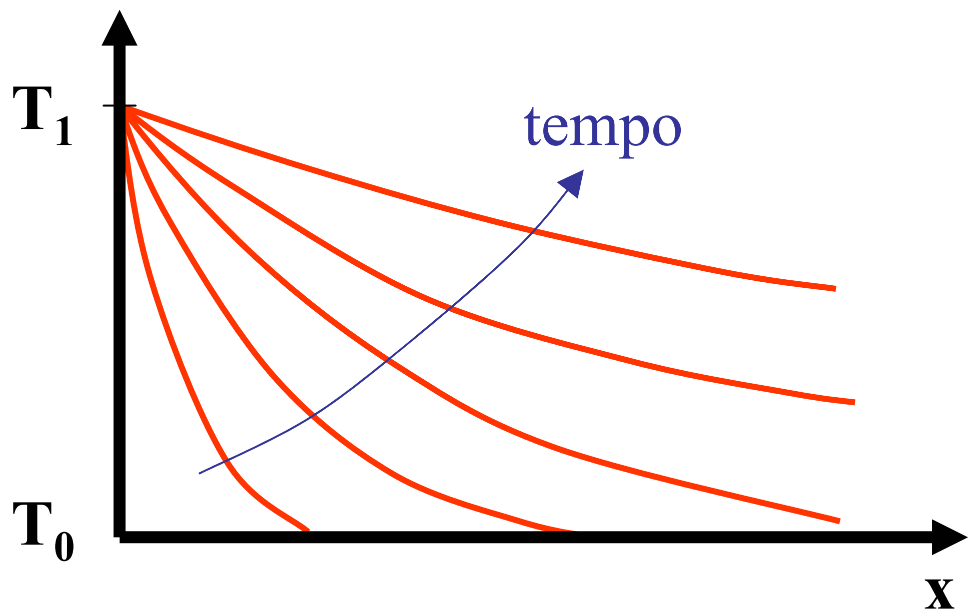
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$



Solução Sólido Semi-Infinito

$$\frac{T(x,t) - T_1}{T_0 - T_1} = \mathrm{erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right]$$





- **8-38** Um teste de incêndio é conduzido sobre uma grande massa de concreto inicialmente a uma temperatura de 15ºC. A temperatura da superfície atinge 500ºC instantaneamente. Estime o tempo requerido para que a temperatura a uma profundidade de 30cm atinja 100ºC. O concreto pode ser considerado como um sólido semi-infinito.

$$\frac{T(x,t) - T_1}{T_0 - T_1} = \mathrm{erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right]$$

Tab. A-15.1

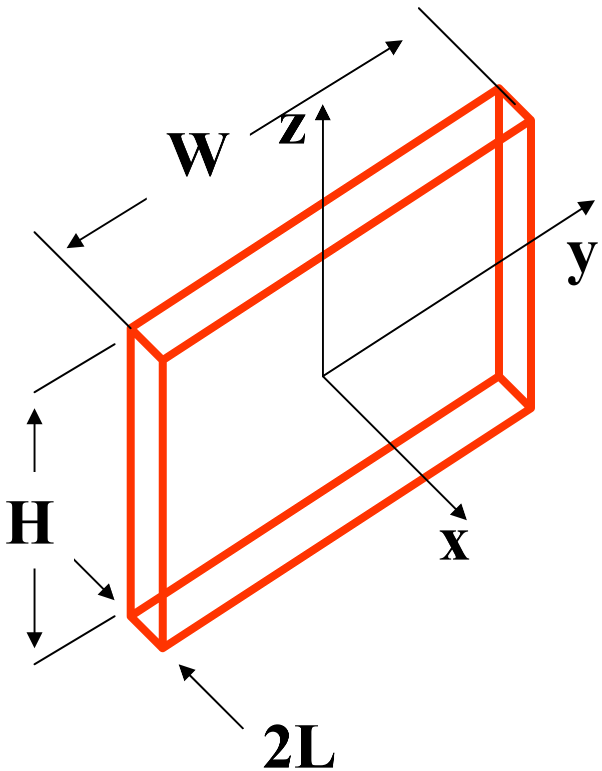
k = 1,4 W/mºC
ρ = 2300 kg/m³
C = 880 J/kgºC
α = 6,9.10⁻⁷ m²/s

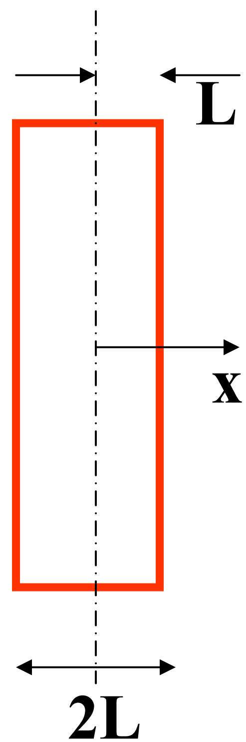
$$\left(\frac{100 - 500}{15 - 500}\right) = 0,8347 = \mathrm{erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right]$$

$$\text{Tab 8.4} \rightarrow \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = 0,98 \rightarrow x = 0,3 \quad \text{então} \quad t = 9{,}4\text{h}$$

Condução Transiente 1D em Sólidos Finitos

- Será apresentado uma solução gráfica para condução 1D transiente em casos onde Bi > 0,1.
- Para que a transferência de calor seja 1D é necessário que as dimensões do corpo, normal a direção do fluxo, sejam muito grandes.

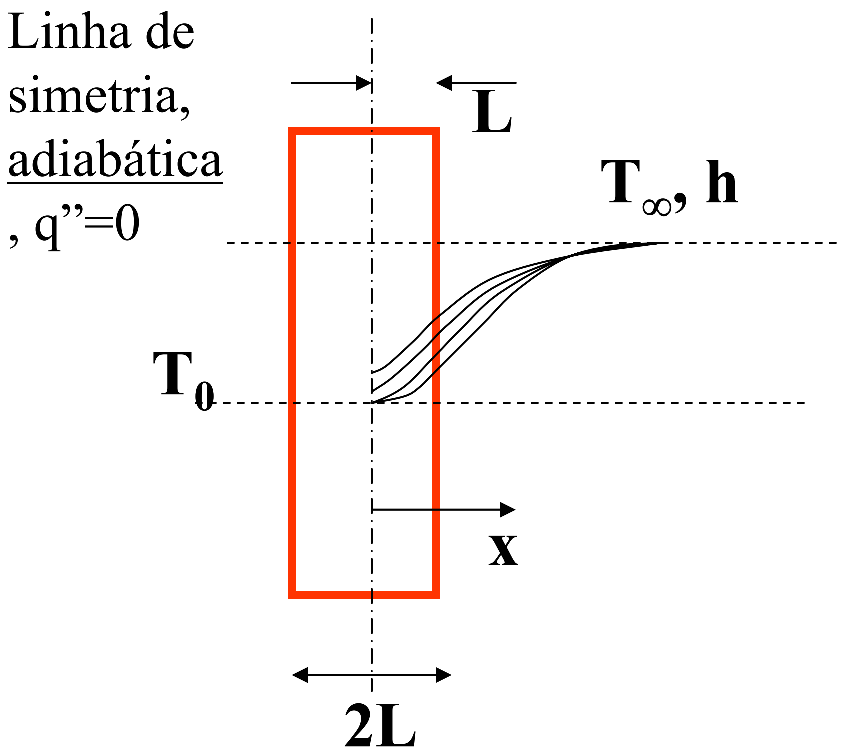




- 2L é muito menor que as dimensões W e H, assim o fluxo de calor ocorre somente em X.
- Neste caso as condições de contorno nas outras direções terão pouca influência no campo de temperatura

Condução Transiente 1D em Sólidos Finitos

- A solução gráfica é apresentada para corpos sólidos submetidos com espessura 2L submetidos a um fluxo de calor imposto por um coeficiente de transferência de calor, h, idêntico em ambas as faces.



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$t = 0 \rightarrow T(x, 0) = T_0$$

$$x = 0 \rightarrow \partial T / \partial x\big|_{x=0} = 0$$

$$x = L \rightarrow h\left(T - T_\infty\right) = -k \partial T / \partial x\big|_{x=L}$$

Condução Transiente 1D em Sólidos Finitos

- Pode-se mostrar que o campo de temperatura depende dos grupos adimensionais:

$$\frac{(T - T_e)}{(T_0 - T_e)} = f\,(Bi, Fo) \quad \text{onde} \quad Bi = \frac{h \cdot L}{k} \quad \text{e} \quad Fo = \frac{\alpha \cdot t}{L^2}$$

- A solução gráfica fornece a temperatura na linha de centro, na superfície x = L e o calor transferido, este definido por:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\text{calor transferido}}{\rho C \forall (T_0 - T_\infty)} = g\,(Bi, Fo)$$

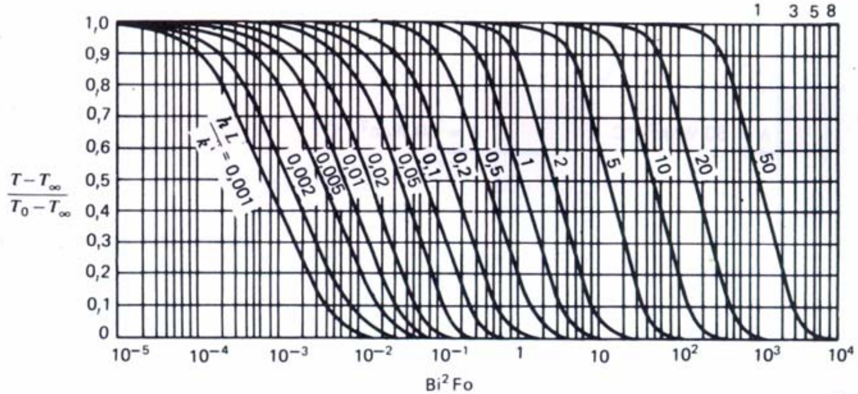


Figura 8-20 Temperatura da superfície adiabática — placa infinita, $X = 0$. Usada com permissão.[12]

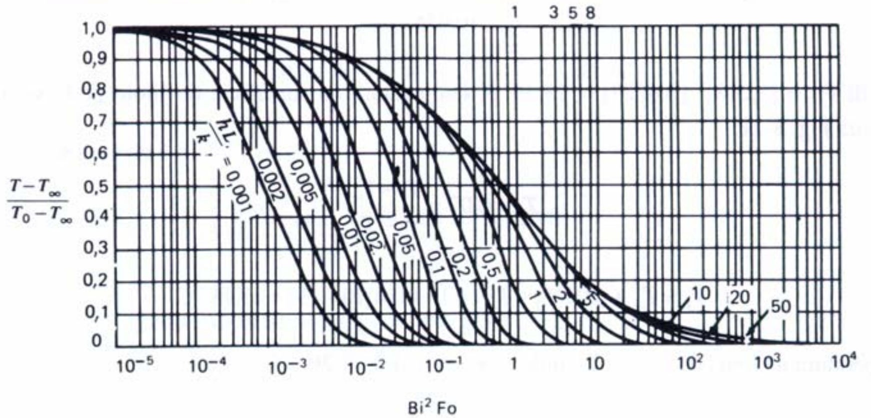


Figura 8-21 Temperatura de superfície — placa infinita, $X = 1$. Usada com permissão.[12]

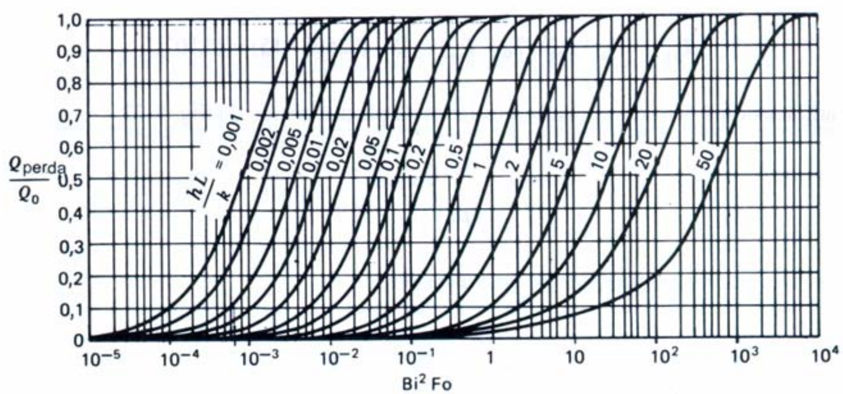


Figura 8-22 Calor perdido — placa infinita. Usada com permissão.[12]

- PLACA PLANA
- Note que a temperatura do centro e da superfície coincidem para Bi < 0,1, como era de se esperar

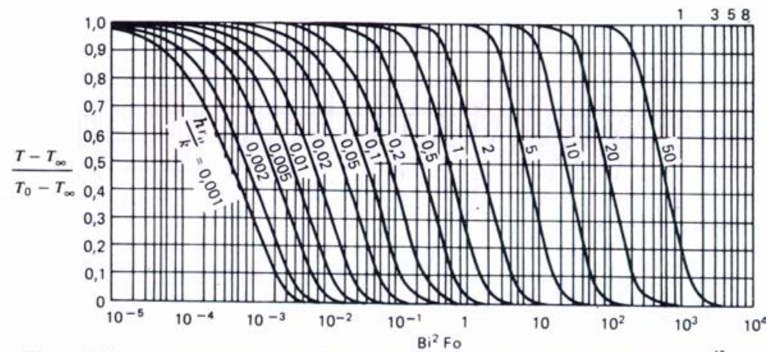


Figura 8-23 Temperatura na linha de centro — cilindro infinito, $R = 0$. Usada com permissão.[12]

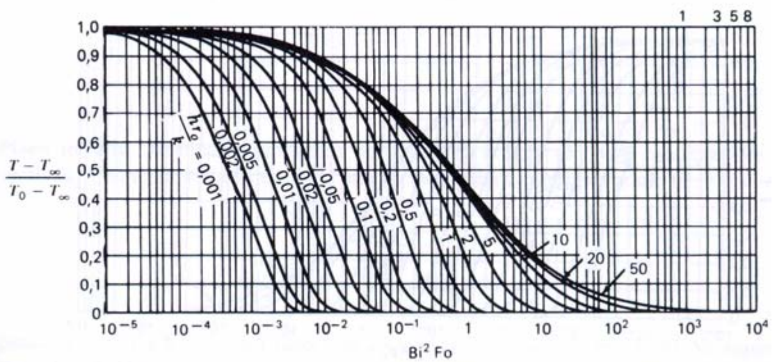


Figura 8-24 Temperatura na superfície — cilindro infinito, $R = 1$. Usada com permissão.[12]

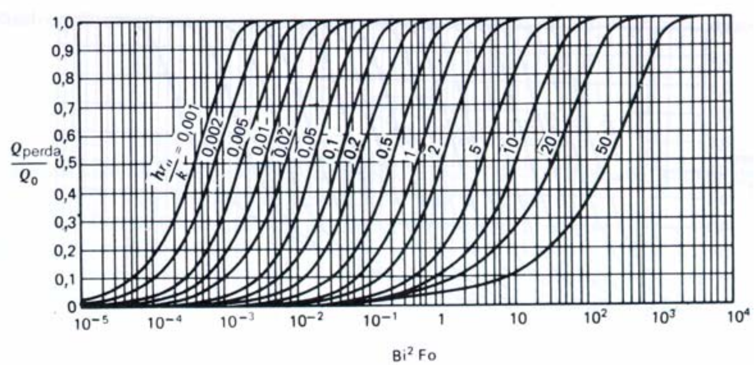


Figura 8-25 Calor perdido — cilindro infinito. Usada com permissão.[12]

- CILINDRO
- Note que a temperatura do centro e da superfície coincidem para Bi < 0,1, como era de se esperar

- **Exemplo** Uma latinha de cerveja inicialmente a 20^{o}C é colocada num congelador com ar a 0^{o}C. Quanto tempo demora para resfriar a latinha de cerveja inicialmente para 7^{o}C? Considere as propriedades da cerveja as mesmas da água. A lata possui 20cm de altura e 7cm de diâmetro. O coeficiente de transferência de calor do ar para a lata foi estimado em 4,73 W/m^2 ^{o}C.

Tab. A-8

$k = 0{,}5723$ W/m^{o}C
$\rho = 1000$ kg/m^3
$C = 4203$ J/kg^{o}C
$\alpha = 1{,}32.10^{-7}$ m^2/s

Biot, Bi = hD/k = 0,289.
Como Bi > 0.1 o modelo condensado *não é recomendado*!

Estimativa Modelo Condensado

- Apesar de ser inapropriado vamos estimar o tempo utilizando o modelo condensado.

$$\tau = \left(\frac{\rho C \forall}{hA}\right) = \frac{1000 \cdot 4203 \cdot 7,7.10^{-4}}{4,73 \cdot 4,48.10^{-2}} = 14300\text{s ou } 3{,}96\text{h}$$

$$t = -\tau \cdot \text{Ln}\left(\frac{T - T_e}{T_0 - T_e}\right)$$

$$\rightarrow t = -14300 \cdot \text{Ln}\left(\frac{7-0}{20-0}\right) \cong\sim 15000\text{s ou } 4\text{h}$$

Estimativa Modelo Unidimensional

- Deseja-se saber quanto tempo é necessário para que o centro da lata atinja 7°C.

$$\left(T - T_e\right) / \left(T_0 - T_e\right) = 0,35 \qquad \& \qquad Bi = 0.289$$

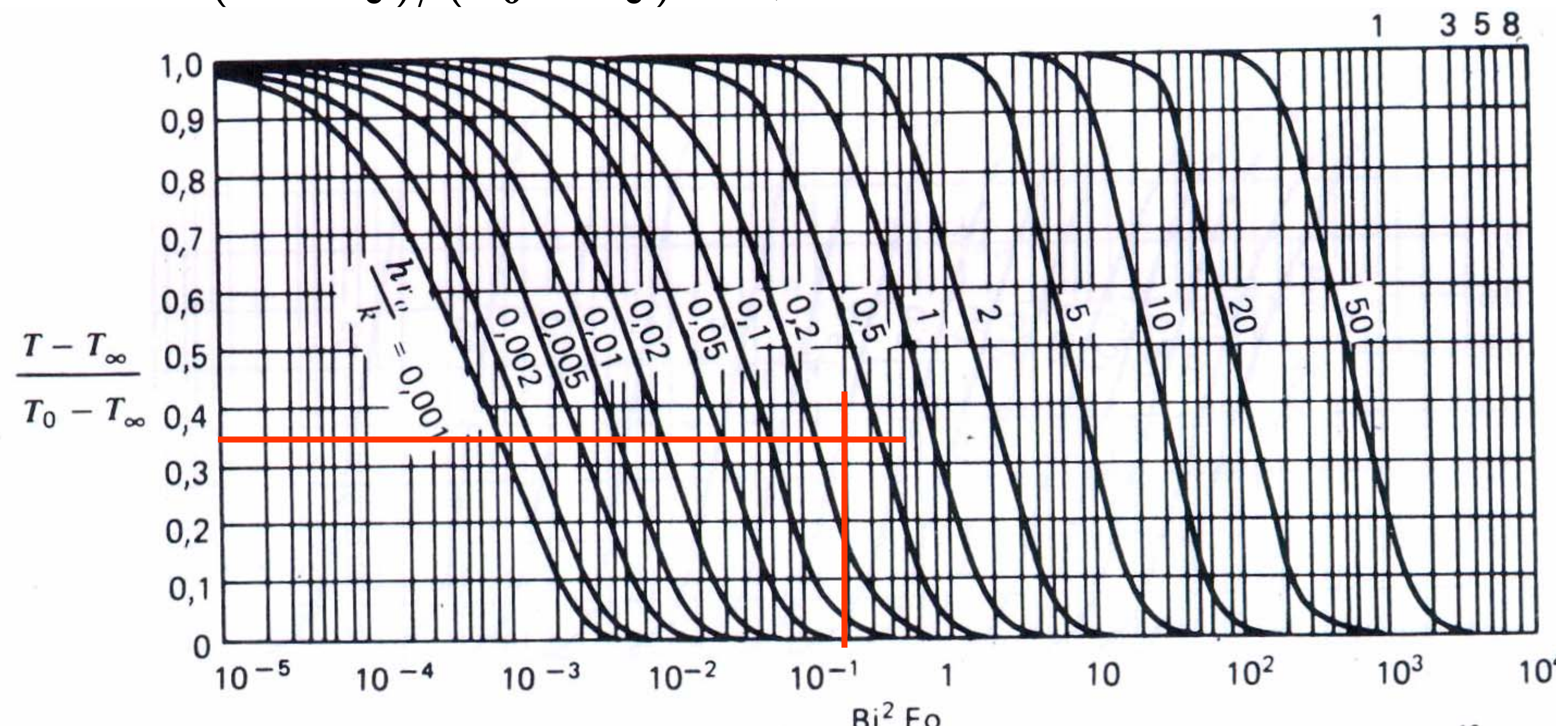


Figura 8-23 Temperatura na linha de centro — cilindro infinito, $R = 0$. Usada com permissão.[12]

$$Bi^2 Fo = 0,2 \quad \text{logo } Fo = 2{,}39$$

$$\text{como } Fo = t / \alpha r^2 \rightarrow t = Fo \cdot \left(r^2 / \alpha\right) = 21500\text{s ou } 6\text{h}$$

Comentário Final

- Se quisermos diminuir o tempo necessário para gelar a latinha a 7^{o}C temos que aumentar o coeficiente de transferência de calor, h.
- O h pode ser aumentado se colocarmos a lata num barril com água e gelo ao invés do ar. Outra possibilidade é utilizar congeladores que possuem um fluxo forçado de ar dentro do congelador.