CAPÍTULO 8
TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO

Equação da Condução de Calor e Modelos Unidimensionais

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830)

Nasceu em Auxerre, em 1768. Órfão aos 8 anos, Fourier foi colocado no Colégio Militar, dirigida pelos beneditinos.

Aos 12 anos, Fourier começou a mostrar parte do seu talento, redigindo sermões para sacerdotes de várias cidades. Dois anos mais tarde iniciou seus estudos de Matemática, conseguindo grande destaque. Considerado menino-prodígio, foi convidado a ingressar na ordem dos beneditinos mas, antes de ordenar-se, chegou a Revolução de 1789.

Fourier que sempre desejara ser militar, aderiu com entusiasmo à causa da Revolução. Com a criação da Escola Normal e da Escola Politécnica, das quais foi conferencista, Fourier começou a desenvolver os trabalhos que o imortalizaram como matemático. Data dessa época sua teoria para calcular raízes irracionais das equações algébricas, cujo estudo Newton iniciara.

Tendo acompanhado Napoleão no Egito, Fourier desenvolveu ali estudos de arqueologia, tornando-se especialista em egiptologia. Fourier trabalhou nessa época como engenheiro, dirigindo uma fábrica de armamentos do exército francês no Egito.

Voltando à França em 1812, Fourier desenvolveu, na sua obra "Memorial", uma teoria sobre a condução do calor, tornando-se precursor da Física-Matemática. Neste último estudo, o matemático francês foi levado a criar um novo tipo de desenvolvimento em série, diferente do método de Taylor por empregar funções periódicas em vez de potências, e que recebeu seu nome.

Em 1830 morreu Fourier; vítima de um aneurisma cerebral.

EXPERIMENTANDO A CONDUÇÃO DE CALOR

PEGUE UM CLIPE DE PAPEL

JUNTE A ELE BASTONETES DE PARAFINA DE UMA VELA

DERRETA A PARAFINA E DEPOIS MOLDE-A NA FORMA DOS BASTONETES PRESOS AO CLIPE

Condução: A energia térmica é transportada entre partes de um meio contínuo pela transferência de energia cinética entre partículas individuais ou grupos de partículas, no nível atômico.

- ✓ Gases: choque entre partículas;
- ✓ Metais: movimento de elétrons livres;
- ✓ Líquidos e outros sólidos: vibrações de estrutura reticular.

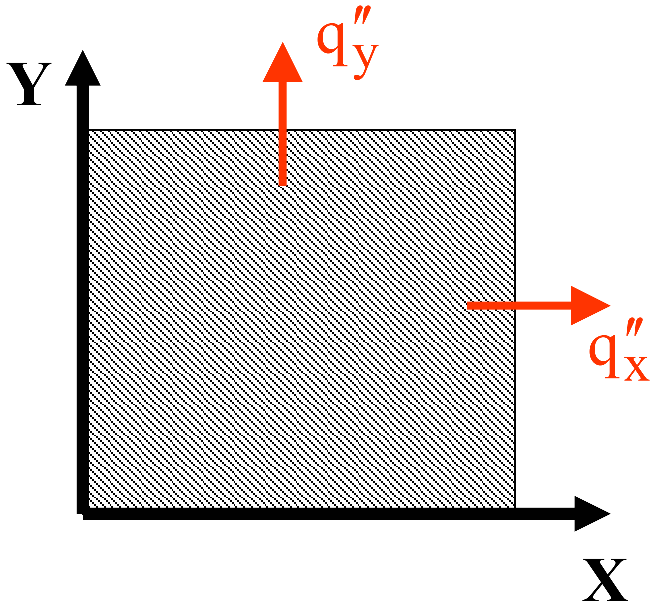
Modelo de Condução Térmica

- **O mecanismo de transmissão de calor por condução térmica consiste de um Processo de Difusão .**
- **Uma espécie (*massa, concentração, temperatura, e outra grandeza escalar*) é transportada da região de ‘maior’ concentração para a de ‘baixa’.**
- **Joseph Fourier modelou a difusão em função do gradiente da espécie e de uma constante de proporcionalidade.**

Modelo de Condução Térmica

- O taxa de calor por unidade de área, ou fluxo de calor q", ***<u>depende da área onde ele cruza</u>***, portanto possui uma natureza vetorial!

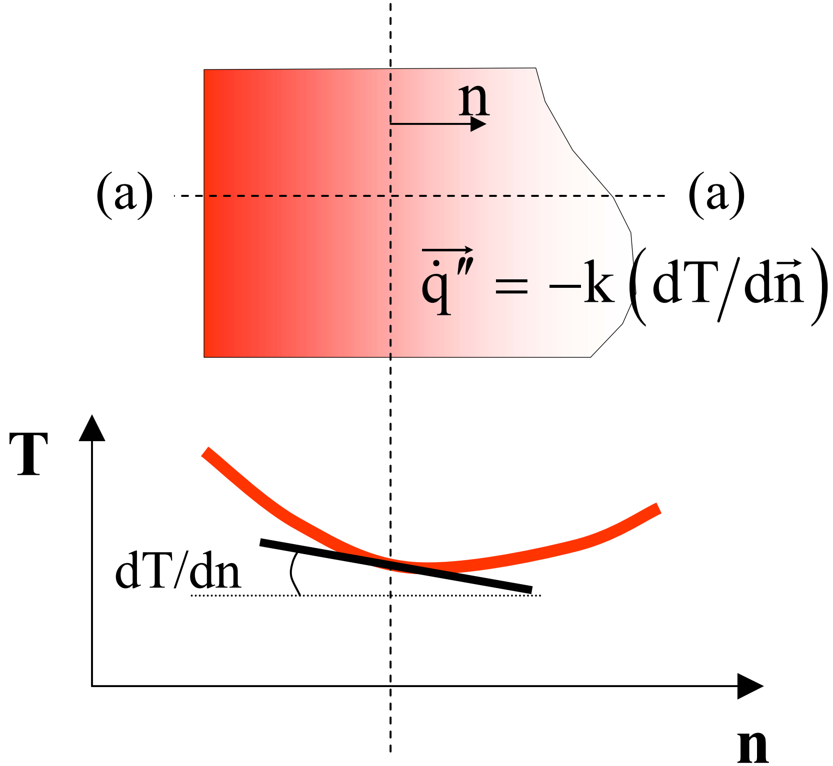
$$\overrightarrow{\dot{q}''} = \vec{i} \cdot q''_x + \vec{j} \cdot q''_y$$



Modelo de Condução Térmica

- **A taxa de calor por unidade de área que cruza uma superfície cuja normal é n, é função do *gradiente térmico*, dT/dn e da *constante de proporcionalidade, k* .**

$$\vec{\dot{q}}'' = \frac{\vec{\dot{Q}}}{A} = -k\frac{\partial T}{\partial n}$$



Perfil de temperatura ao longo da linha a-a, paralela ao vetor normal n

Condutividade Térmica: (kcal/s)/ (ºCm)

Alumínio	$4{,}9 \times 10^{-2}$
Cobre	$9{,}2 \times 10^{-2}$
Aço	$1{,}1 \times 10^{-2}$
Ar	$5{,}7 \times 10^{-6}$
Gelo	4×10^{-4}
Madeira	2×10^{-5}
Vidro	2×10^{-4}
Amianto	2×10^{-5}

1 kcal = 4184 J

Vácuo $\rightarrow$ k = 0 (não há difusão térmica no vácuo; para haver difusão é necessário haver um meio para a temperatura difundir!

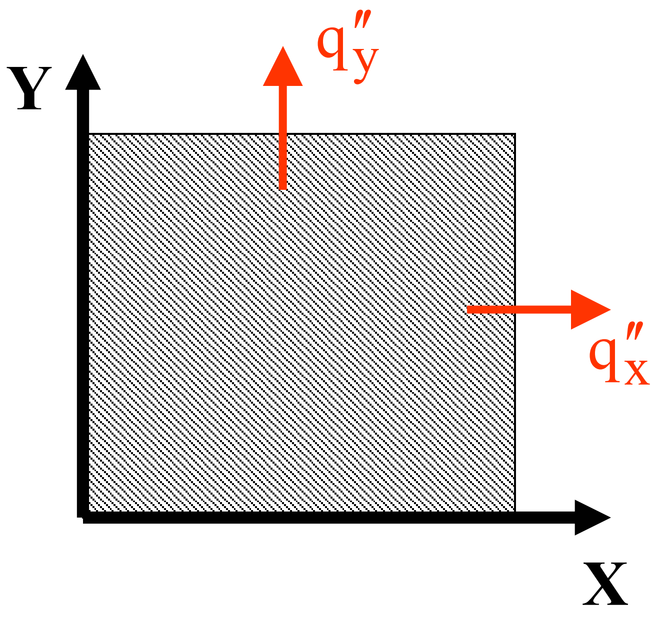
Modelo de Condução Térmica

- **O fluxo de calor na direção x:** $\dot{q}''_x = -k\left(dT/dx\right)$
- **O fluxo de calor na direção y:** $\dot{q}''_y = -k\left(dT/dy\right)$

$$\overrightarrow{\dot{\mathbf{q}}''} = \vec{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{q}''_{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{q}''_{\mathbf{y}}$$

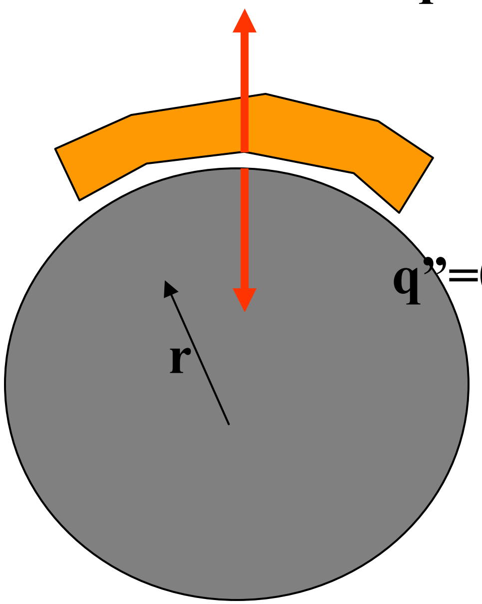
$$\overrightarrow{\dot{\mathbf{q}}''} = -\vec{\mathbf{i}} \cdot \left(\mathbf{k}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}}\right) - \vec{\mathbf{j}} \cdot \left(\mathbf{k}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{y}}\right)$$

$$\overrightarrow{\dot{\mathbf{q}}''} = -\mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{T} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{gradT}$$



8-2 Uma lona de freio é pressionada contra um tambor rotativo de aço. Calor é gerado na superfície de contato tambor-lona na taxa de 200 W/m^2. 90% do calor gerado passa para o tambor de aço, o restante passa pela lona. Determine o gradiente térmico no ponto de contato tambor-lona

$q'' = 0.1 \times 200 = 20 W/m^2$



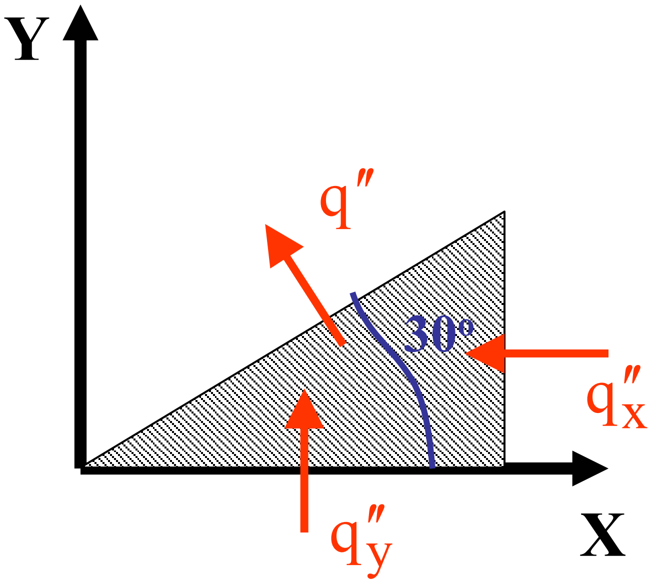
$q'' = 0.9 \times 200 = 180\ W/m^2$

$q'' = -k dT/dr \rightarrow dT/dr = -q''/k$

Ex. 8.3 O fluxo de calor na superfície diagonal da cunha de baquelite é de 680 Btu/h.ft². Determine o fluxo de calor e o gradiente de temperatura nas direções x e y

Fluxo calor x, q_x = q.sin30º = 340 Btu/h.ft²

Fluxo calor y, q_y = q.cos30º= 589 Btu/h.ft2



Grad T, x, → dT/dx = $-q_x/k$

Grad T, y, → dT/dy = $-q_y/k$

Linhas de Fluxo de Calor e Isotermas

- O fluxo de calor depende da posição (x,y).
- A taxa de variação de T ao longo de um caminho ‘s’, é dada por:

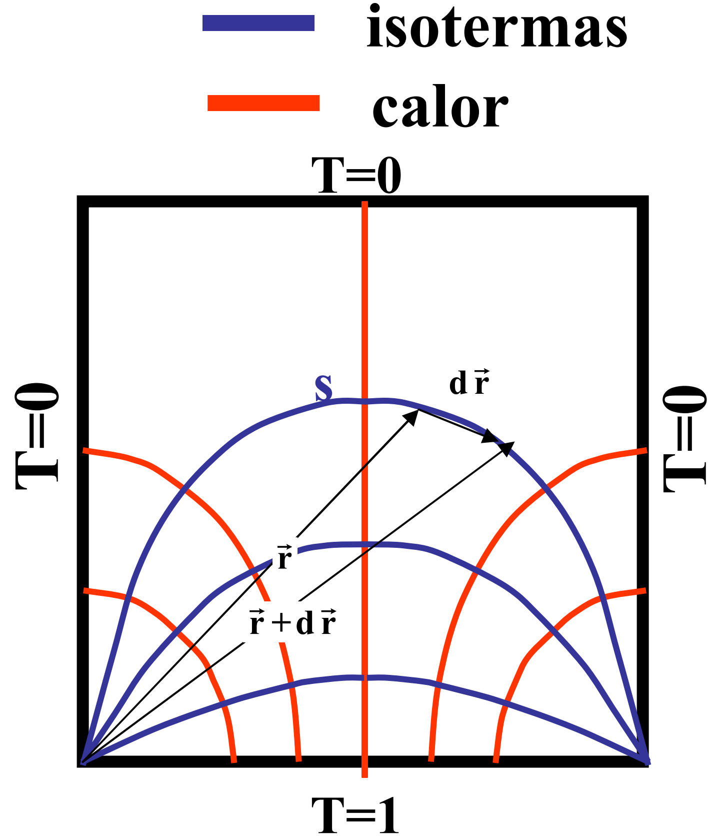
$$\frac{dT}{ds} = \nabla T \cdot \vec{s}$$

onde s é um vetor unitário tangente a curva s, definido por:

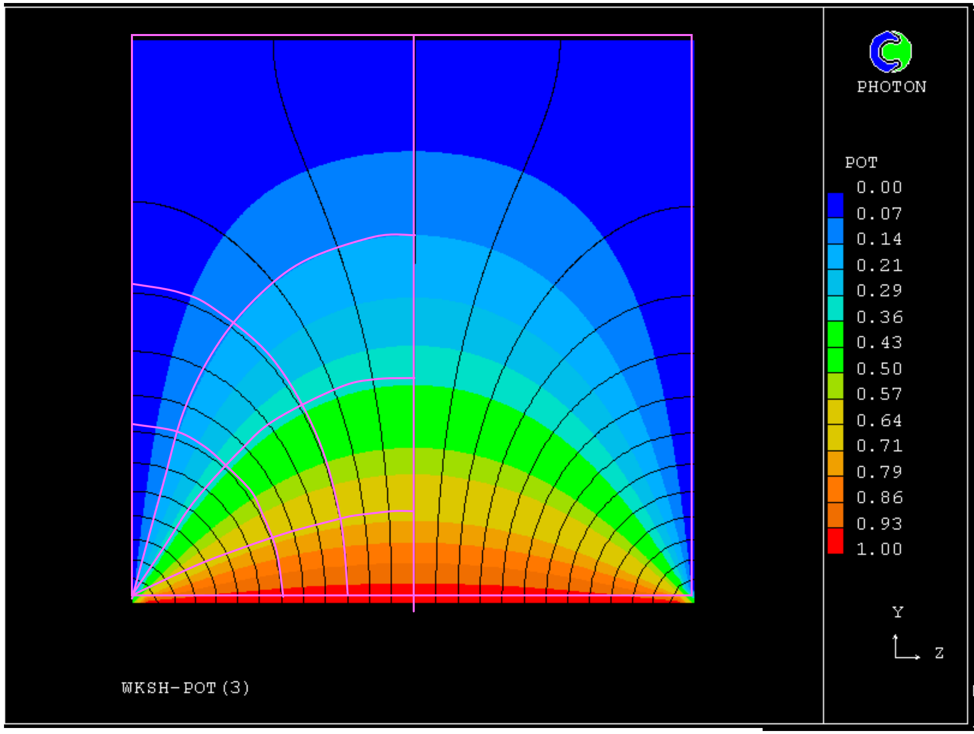
$$\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{i} \cdot \frac{dx}{ds} + \vec{j} \cdot \frac{dy}{ds}$$

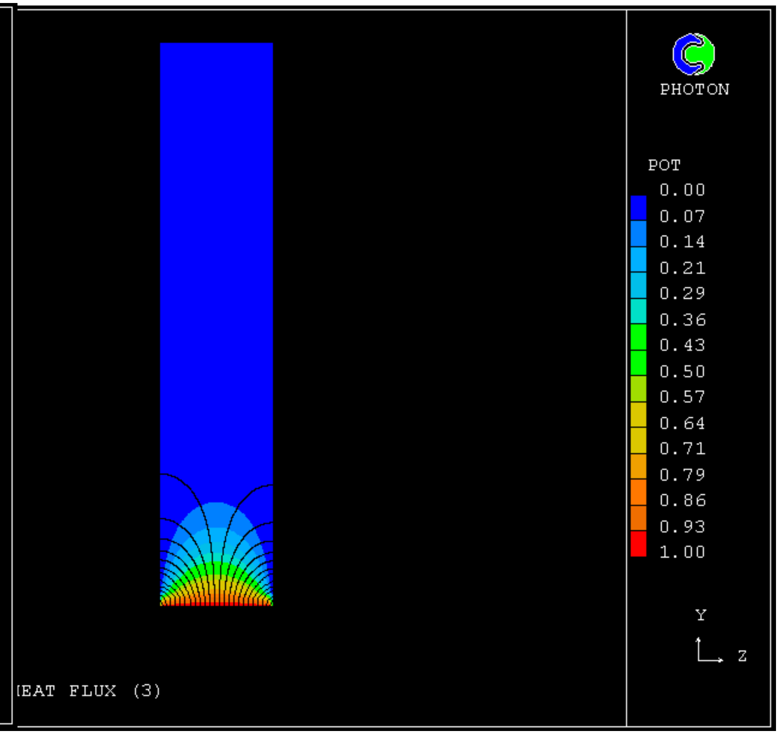
$$\frac{dT}{ds} = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} \equiv \nabla T \cdot \vec{s}$$

Quando dT/ds = 0 é pq a temperatura não varia, portanto dT/ds define uma isotérma.
As linhas de fluxo de calor são ortogonais às isotermas!



Temperatura e Linhas de Fluxo de Calor
As dimensões do domínio afetam o campo de temperatura?



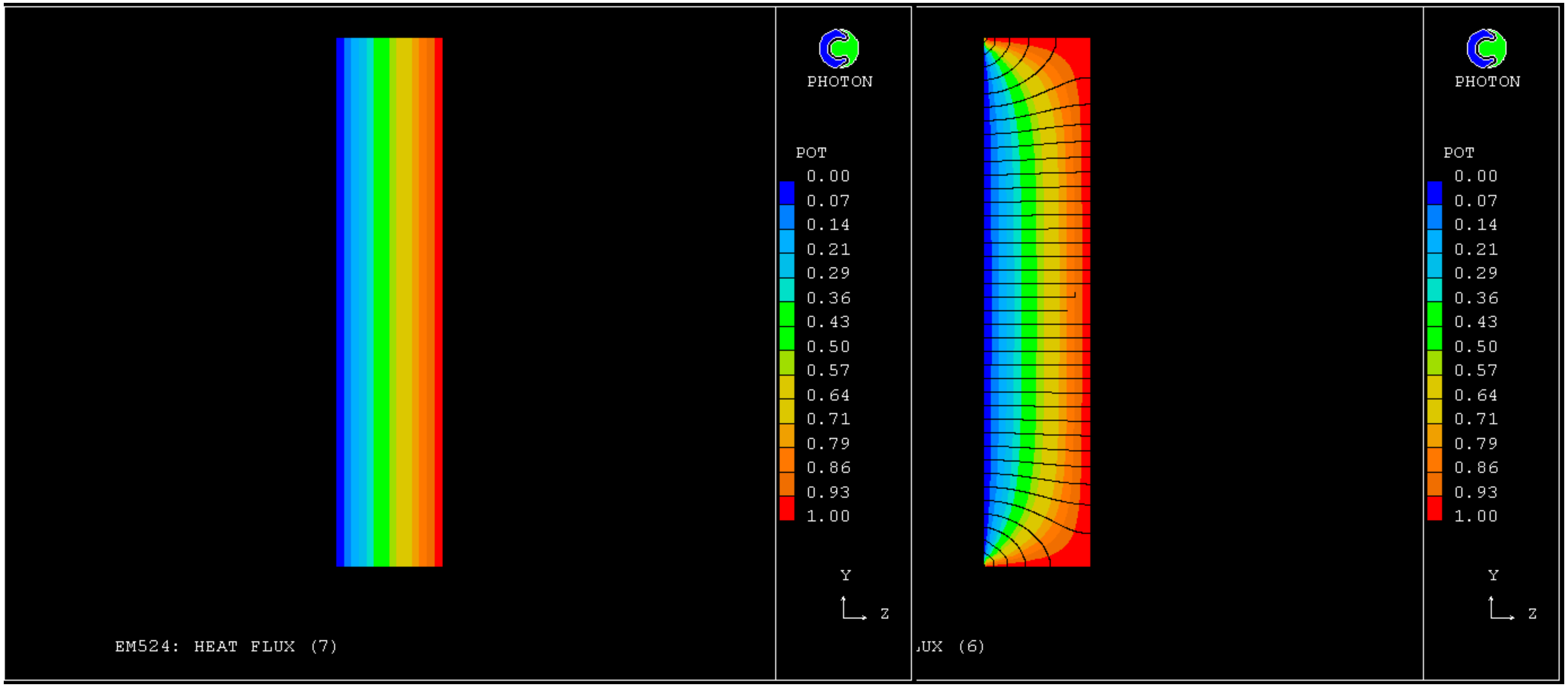


Bloco quadrado 1:1
temperatura nas faces
1,0,0,0

Bloco retangular 1:5
temperatura nas faces
1,0,0,0

Temperatura e Linhas de Fluxo de Calor

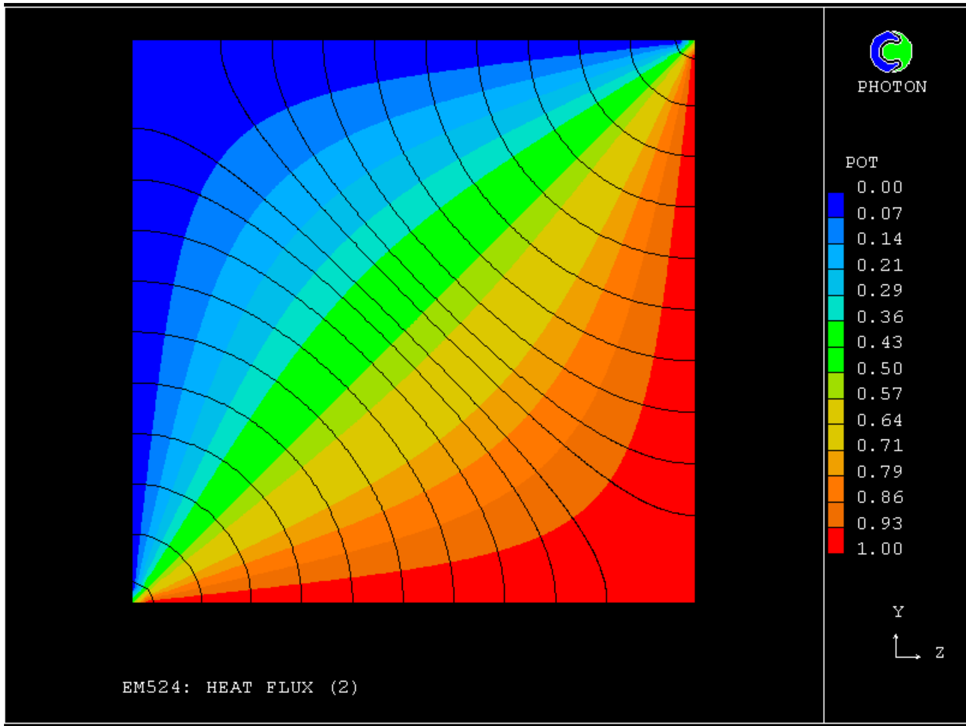
Uma condição 2D pode ser aproximada por uma solução 1D?

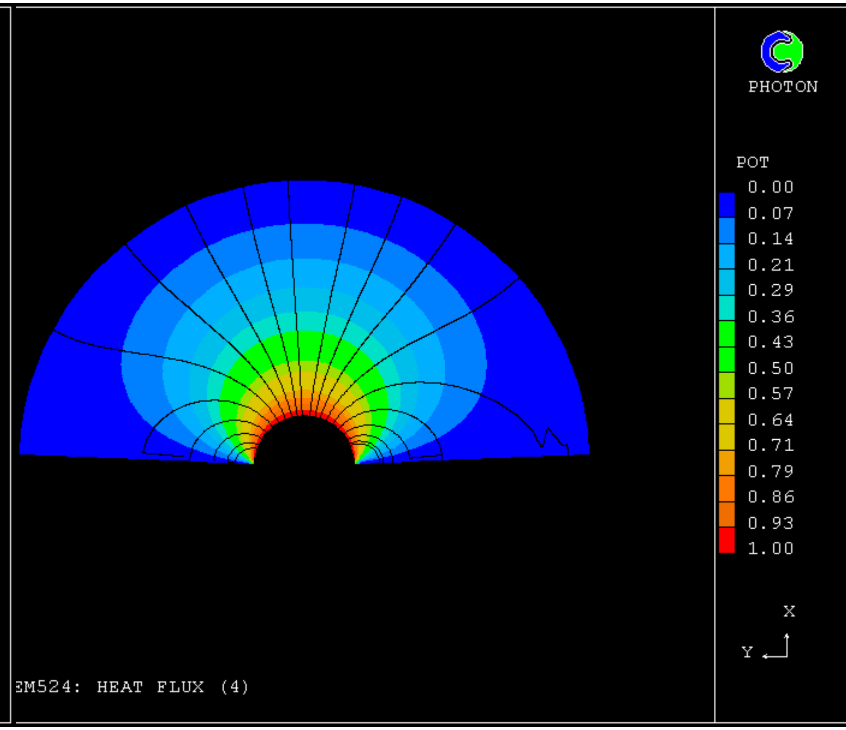


Campo Temp. Unidimensional temperatura nas faces: 1,0 demais faces isoladas

Campo Temp. Bidimensional temperatura nas faces 1,0,1,1

Temperatura e Linhas de Fluxo de Calor

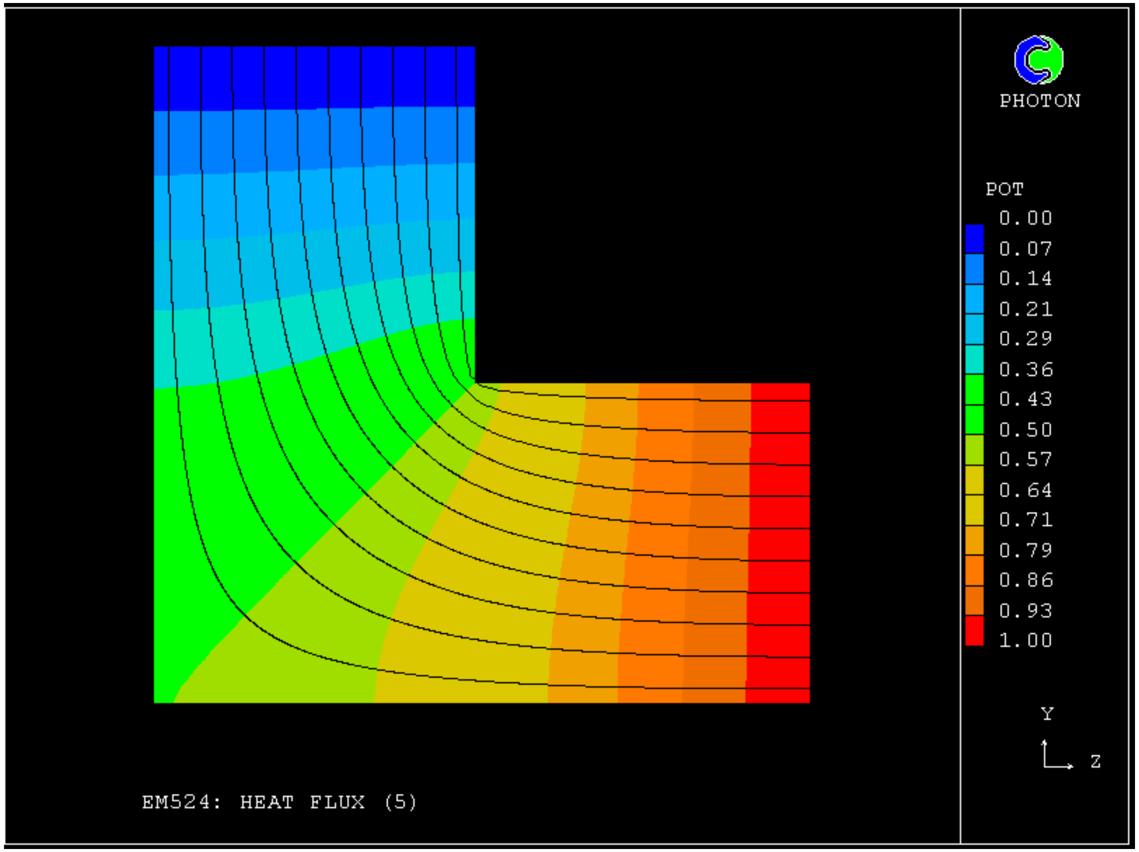




Bloco quadrado 1:1
temperatura nas faces
1,0,0,1

Coroa circular
temperatura nas faces
1,0,0,0

Temperatura e Linhas de Fluxo de Calor

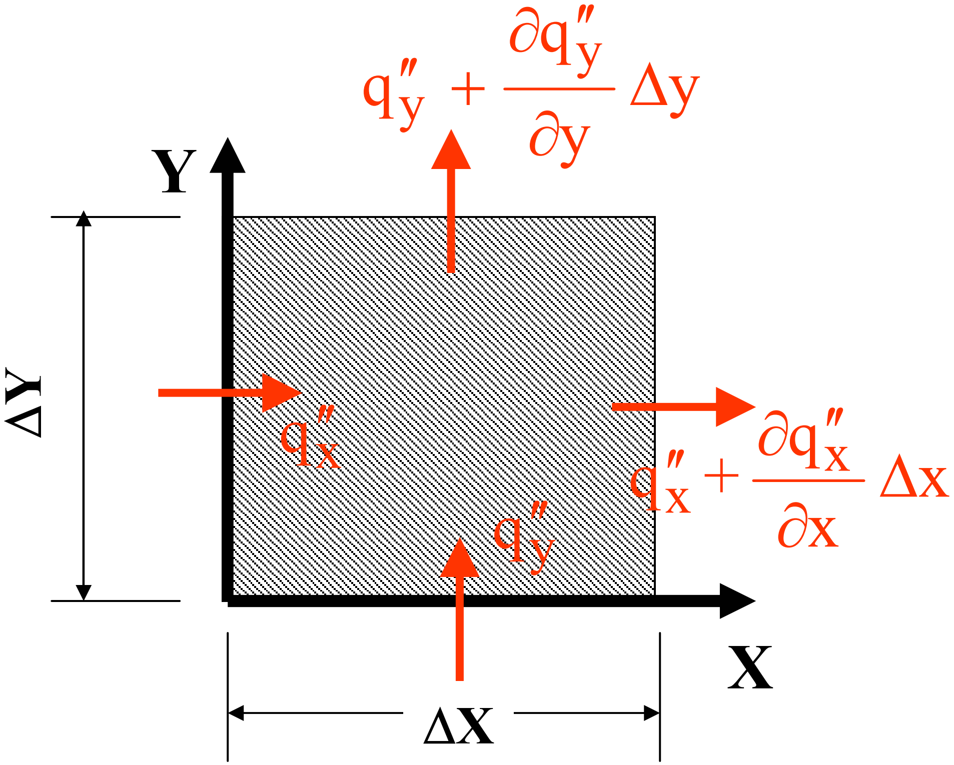


Viga L
Faces isoladas
Temperatura 1 & 0 nas extremidades

Equação da Condução: *Balanço Energia (1ª Lei)*

Considere um V.C. infinitesimal, ΔX e ΔY e a 1ª Lei:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int \rho C_v T \cdot dV}_{dU/dt} = \underbrace{\int \vec{\dot{q}''} \cdot \vec{n} \cdot dA}_{\dot{Q}}$$



Os fluxos de calor nas faces;

Balanço infinitesimal de calor:

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{\dot{q}''}$$

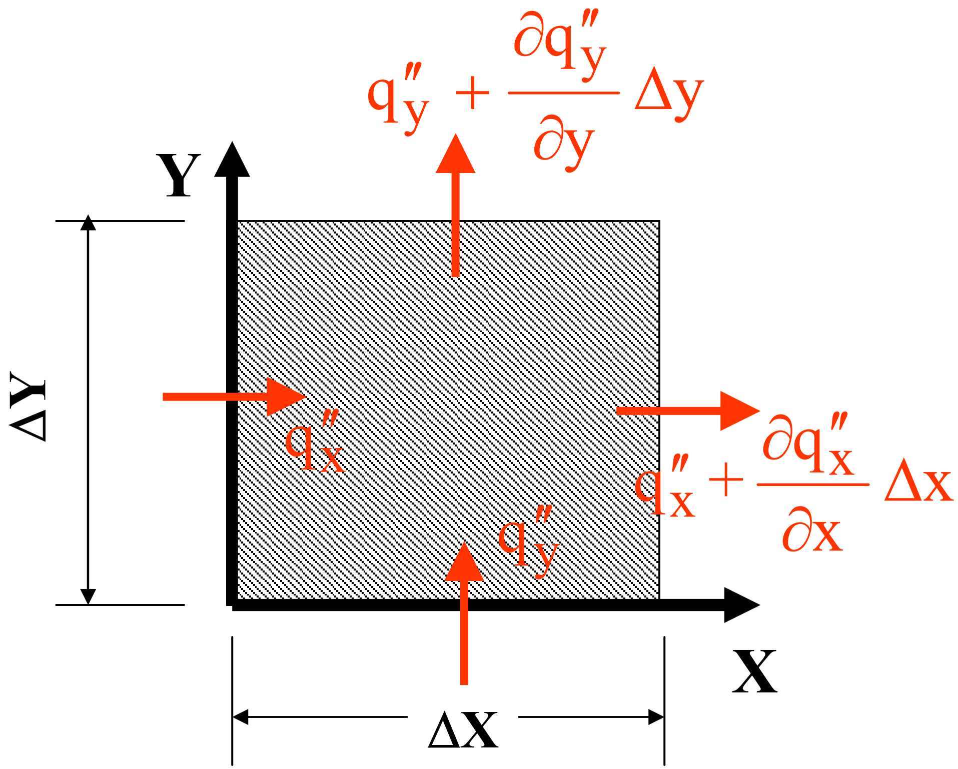
Se regime permanente:

$$\nabla \cdot \vec{\dot{q}''} = 0$$

Equação da Condução: *Balanço Energia (1ª Lei)*

Substituindo a definição da Lei de Fourier para a equação do calor:

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (k \nabla T)$$



para k constante:

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = -k \nabla^2 T$$

Se regime permanente

$$\nabla^2 T = 0$$

Analogia: Regime Permanente

- Campo elétrico E → fluxo de calor q”
- Potencial elétrico V → Temperatura T

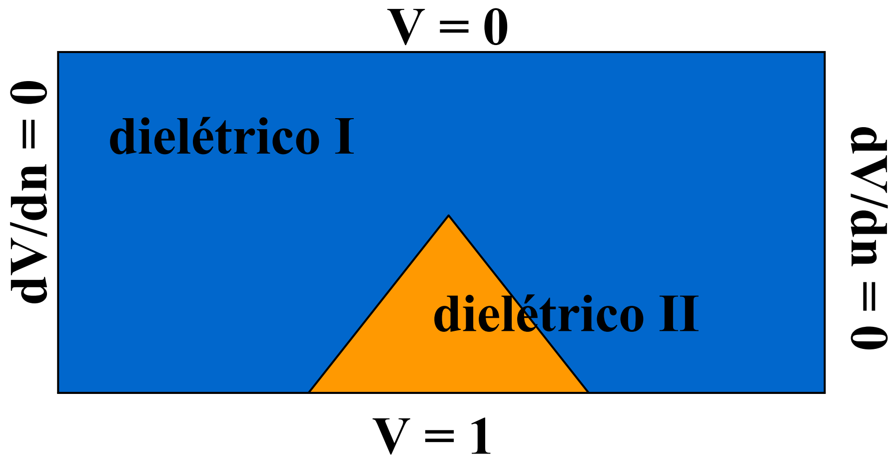
$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \qquad \rightarrow \qquad \nabla \cdot \overrightarrow{\dot{\mathbf{q}}''} = \mathbf{0}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \varepsilon \nabla \mathbf{V} \qquad \rightarrow \qquad \overrightarrow{\dot{\mathbf{q}}''} = -\mathbf{k} \nabla \mathbf{T}$$

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{V} = \nabla^2 \mathbf{V} = \mathbf{0} \qquad \rightarrow \qquad \nabla \cdot \left(-\mathbf{k} \nabla \mathbf{T}\right) = \nabla^2 \mathbf{T} = \mathbf{0}$$

ε – dielétrico do meio

Mapeadores de Fluxo de Calor (1949)



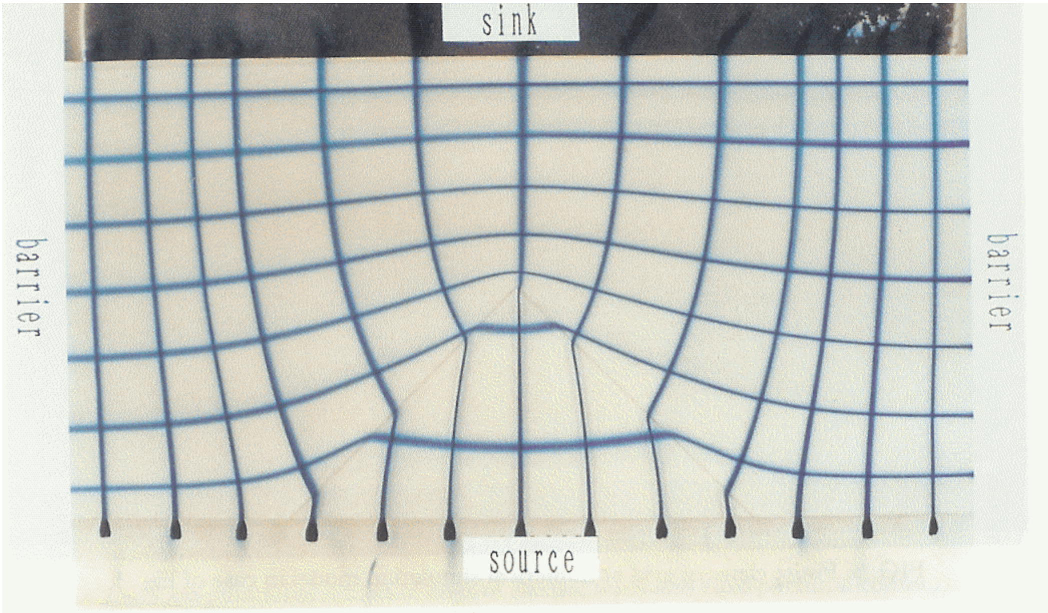


FIG. 4. Visualized streamlines representing lines of electrical force and equi-potential contours.

Atlas of Visualization, Ed. The visualization society of Japan, Pergamon Press, 1992

Formas da Eq. Condução: $\nabla^2 T=0$

Propriedades Constantes

- **Cartesiano:**

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]$$

- **Cilíndrico**

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]$$

Regime Permanente: $\nabla^2 T=0$

- O laplaciano da temperatura é uma E.D.P Elípitca. Para resolvê-la é necessário informação em todo o <u>contorno!</u>

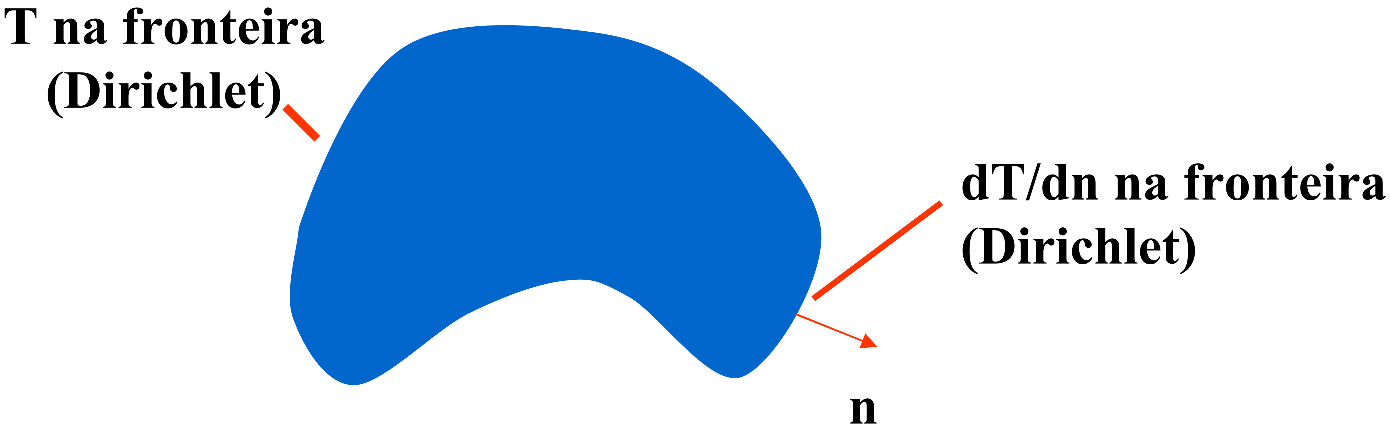


Tabela 8-1 Tipos de Condições de Contorno

Classificação	
I. **Temperatura especificada**	$T = T_s$
II. Fluxo de calor constante	$-k\dfrac{\partial T}{\partial \eta} = \dot{q}_p''$
III. Adiabático	$-k\dfrac{\partial T}{\partial \eta} = 0$
IV. Dois sólidos	$-k_1\dfrac{\partial T}{\partial \eta} = -k_2\dfrac{\partial T}{\partial \eta}$
V. Convecção	$-k\dfrac{\partial T}{\partial \eta} = h(T_\infty - T)$
VI. Radiação	$-k\dfrac{\partial T}{\partial \eta} = \dot{q}_{\mathrm{rad}}''$
VII. Radiação e convecção combinadas	$-k\dfrac{\partial T}{\partial \eta} = h(T_\infty - T) + \dot{q}_{\mathrm{rad}}''$

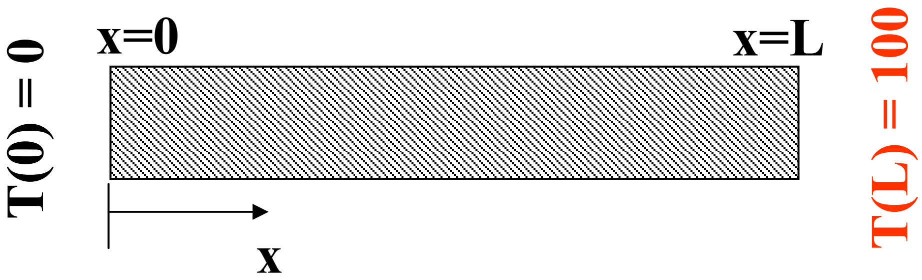
Condução 1D, Regime Permanente

- **Equação Geral** $$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

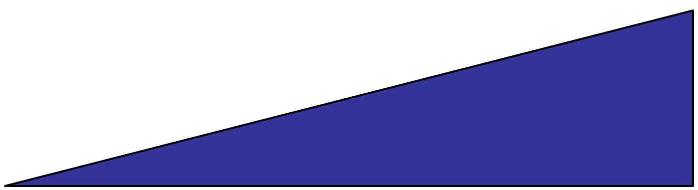
- **Solução Geral** $$T(x) = A \cdot x + B$$

PERFIL LINEAR DE TEMPERATURA

Solução: Temperatura Especificada



$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

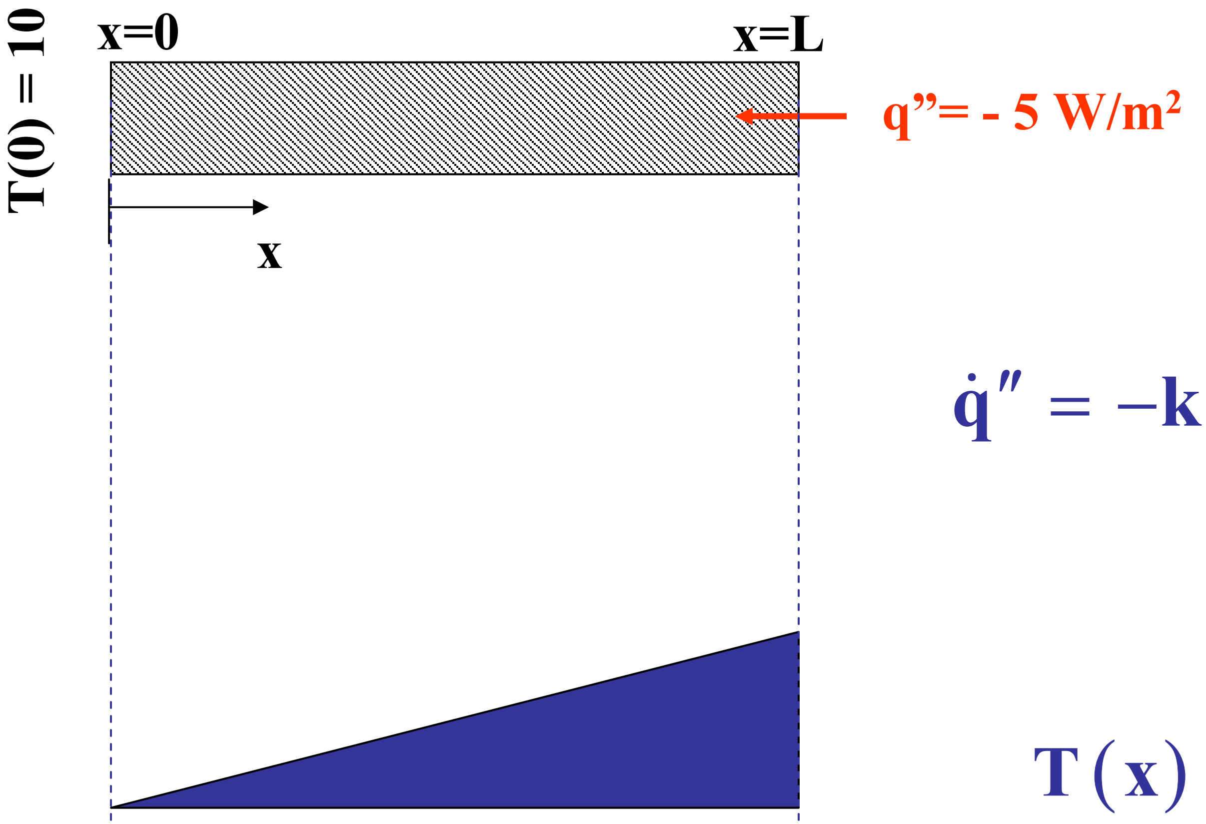


$$T(x) = \frac{100}{L} \cdot x + 0$$

GRADIENTE TEMPERATURA = 100/L

q"=-k(100/L)

Solução: Fluxo Calor Especificado



$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

$$\dot{q}'' = -k\frac{dT}{dx} \rightarrow \frac{dT}{dx} = \frac{\dot{q}''}{k}$$

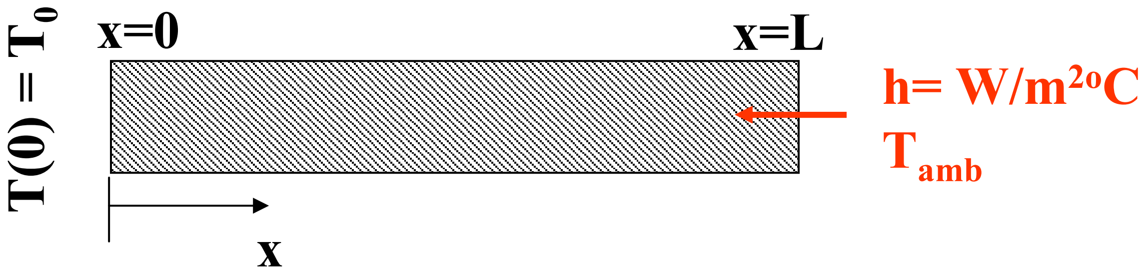
$$T(x) = \left(\frac{\dot{q}''}{k}\right) \cdot x + 10$$

GRADIENTE TEMPERATURA = q”/k

q” =-k(q” /k) = q”

<u>Obs.:</u> *q” < 0 pq. está no sentido contrário ao eixo x*

Solução: Coef. Transf Calor Especificado



$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

$$h\left(T_L - T_{amb}\right) = -k\,\frac{dT}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{dx} = A = -\frac{h\left(T_L - T_{amb}\right)}{k}$$

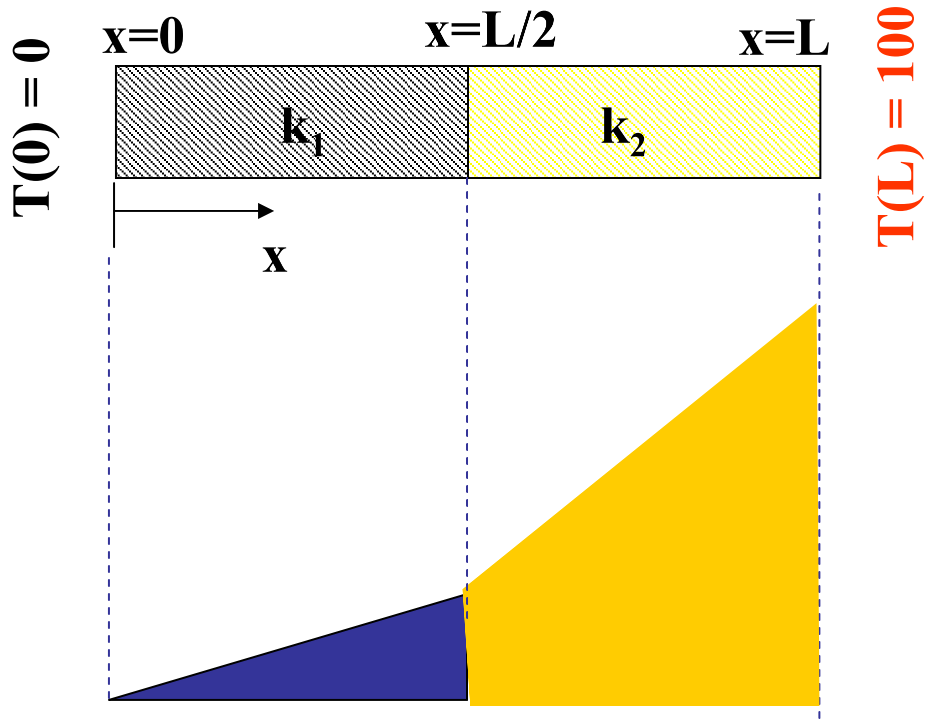
$$T(0) = T_0 = B \quad \rightarrow \quad T(L) = T_L = A \cdot L + T_0$$

GRADIENTE TEMPERATURA $= A = \dfrac{\left(T_{amb} - T_0\right)}{\left(k/h - L\right)} \equiv \dfrac{\left(T_{amb} - T_0\right)/L}{\left(k/hL - 1\right)}$

FLUXO DE CALOR = $\dfrac{\left(T_{amb} - T_0\right)}{\left(1/h - L/k\right)}$

A definição $q''=h(T_L-T_{amb})$ está de acordo com o sentido do eixo x. Note que se $T_L > T_{amb}$ $q''>0$ e $T_L < T_{amb}$, $q''<0$.

Solução: Temperatura Especificada & Dois Materiais, $k_1 > k_2$



$$d^2T/dx^2 = 0$$

Condições Contorno

$x=0 \rightarrow T=0$

$x=L \rightarrow T=100$

$x=L/2 \rightarrow k_1 dT_1/dx = k_2 dT_2/dx$

Equações

$x=0 \rightarrow T_0=B_1$

$x=L \rightarrow T_L=B_2.L+A_2$

$x=L/2 \rightarrow k_1.A_1= k_2A_2$

$x=L/2 \rightarrow A_1(L/2)+B_1= A_2 (L/2)+ B_1$

$$\dot{q}'' = \frac{T_L - T_0}{\left(L/2k_1 + L/2k_2\right)}$$

$$\dot{Q} = kA\frac{\Delta T}{L} \quad \text{ou} \quad \dot{Q} = hA\Delta T$$

Tabela 8-2 Analogia entre o fluxo de calor e a corrente para uma seção unidimensional

	Elétrico	Calor
Fluxos	i	$\dot{Q}$
Diferença de potencial	Δe	ΔT
Resistência ao fluxo	R	$R_t = \frac{L}{kA}$

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R} \quad \text{onde} \quad R_k = \frac{L}{kA} \quad \text{ou} \quad R_h = \frac{1}{kA}$$

$$i = \Delta e / R$$

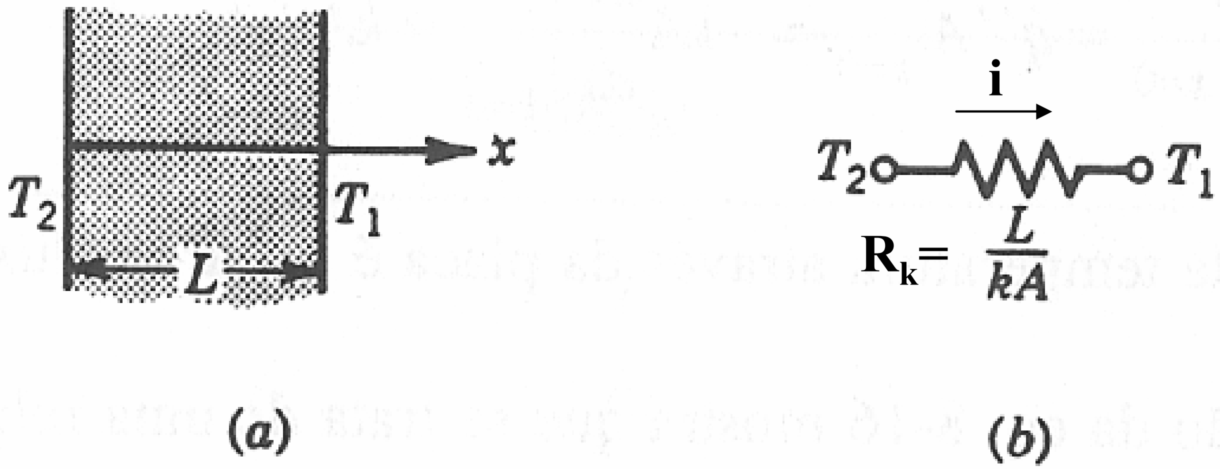


Figura 8-5 Transferência de calor unidimensional. (a) Placa unidimensional. (b) Circuito térmico equivalente.

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R} = \frac{kA}{L}\left(T_2 - T_1\right)$$

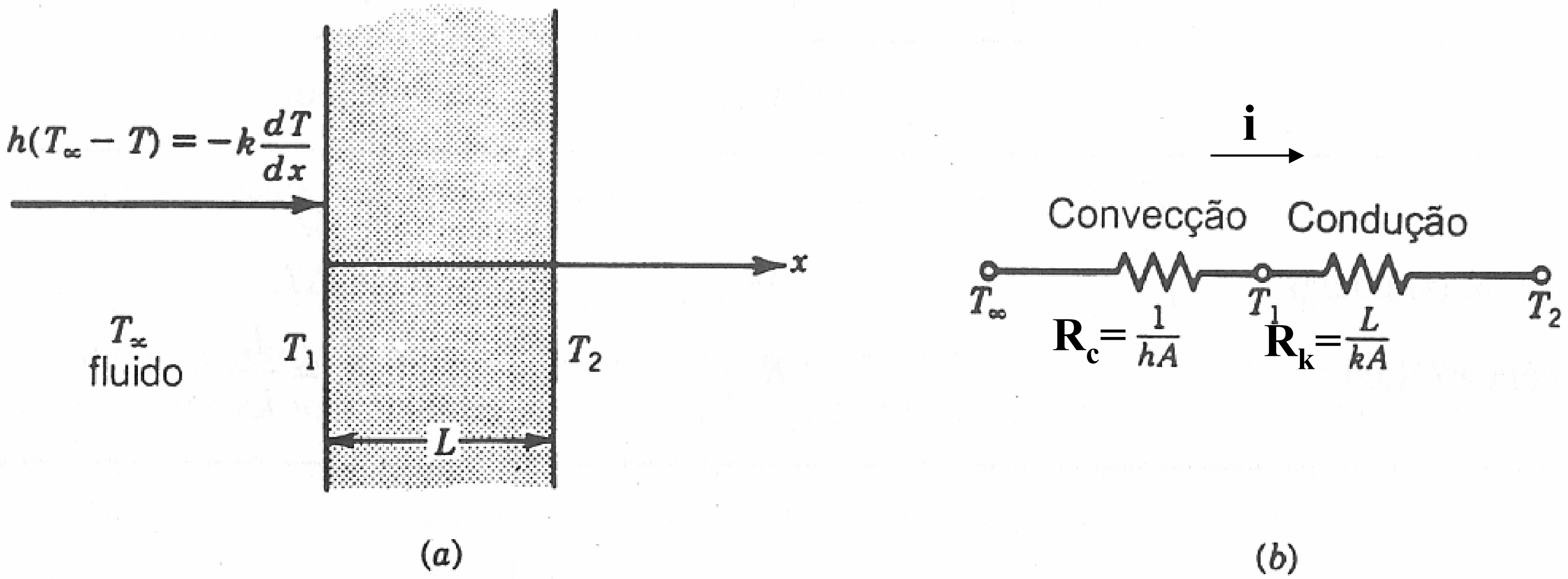
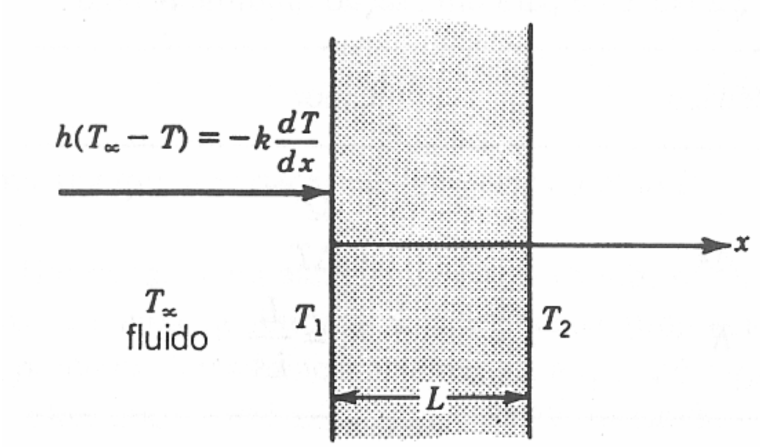


Figura 8-6 Placa semi-infinita com convecção como condição de contorno na fronteira. (a) Placa semi-infinita. (b) Circuito equivalente para a placa.

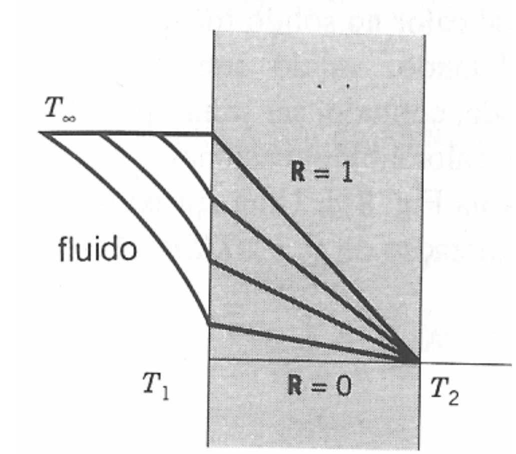
$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{\sum R} = \frac{(T_\infty - T_2)}{\left(\frac{1}{hA} + \frac{L}{kA}\right)}$$

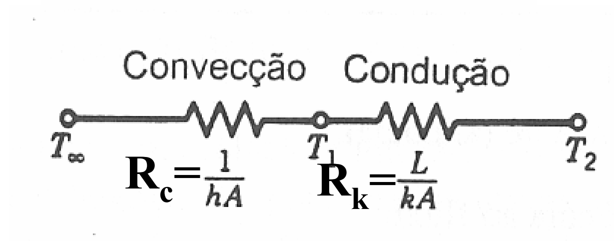
$$\frac{(T_\infty - T_1)}{\frac{1}{hA}} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{L}{kA}} = \dot{Q}$$

Relação entre as Resistências $R = R_k/(R_c+R_k)$



(a)





$$\text{Biot,} \quad Bi = \frac{R_k}{R_c} = \frac{hL}{k}$$

$$R_c >> R_k \quad \rightarrow \quad R = 0 \quad \& \quad Bi << 1$$

$$R_c << R_k \quad \rightarrow \quad R = 1 \quad \& \quad Bi >> 1$$

Materiais Compostos