

A Figura 1 ilustra duas vigas hiperestáticas engastadas nas extremidades submetida a uma carga distribuída q_0 . Deseja-se comparar a rotação na metade da viga para os casos com e sem rótula.

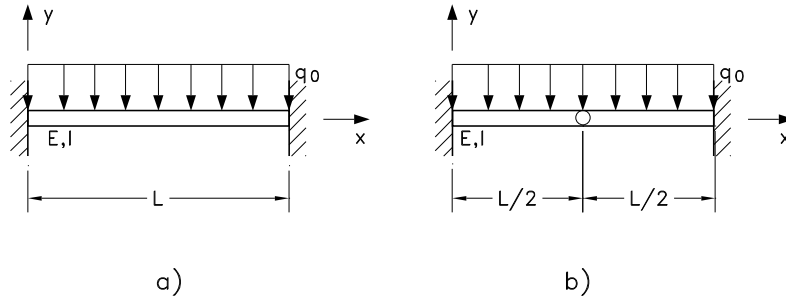


Figura 1: Vigas a) sem rótula; b) com rótula.

sem rótula : considera-se neste caso a viga da Figura 1a), tomando-se apenas o trecho $0 < x < L/2$.

1. Equação do carregamento: $q(x) = -q_0 < x - 0 >^0$
2. Condições de contorno

$$v(x = 0) = 0 \quad V_y(x = \frac{L}{2}) = 0$$

$$\frac{dv}{dx}(x = 0) = 0 \quad M_z(x = \frac{L}{2}) = 0$$
3. Integração da equação diferencial: $EI_z \frac{d^4v}{dx^4} = -q_0 < x - 0 >^1 + C_1$
 - 1ª integração: força cortante

$$EI_z \frac{d^3v}{dx^3} = V_y = -q_0$$
 - 2ª integração: momento fletor

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = M_z = -\frac{q_0}{2} < x - 0 >^2 + C_1x + C_2$$
 - 3ª integração: rotação

$$EI_z \frac{dv}{dx} = -\frac{q_0}{6} < x - 0 >^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$$
 - 4ª integração: deslocamento transversal

$$EI_z v = -\frac{q_0}{24} < x - 0 >^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$$
4. Determinação das constantes de integração

$$EI_z v(0) = -\frac{q_0}{24}(0) + \frac{C_1}{6}(0) + \frac{C_2}{2}(0) + C_3 + C_4 = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

$$EI_z \frac{dv(0)}{dx} = -\frac{q_0}{6}(0) + \frac{C_1}{2} \cdot 0 + C_2(0) + C_3 = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

$$V_y(\frac{L}{2}) = -q_0(\frac{L}{2}) + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = q_0 \frac{L}{2}$$

$$M_z(\frac{L}{2}) = -\frac{q_0}{2}(\frac{L}{2})^2 + \frac{q_0 L}{2}(\frac{L}{2}) + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = -q_0 \frac{L^2}{8}$$
5. Equações finais:
 - força cortante: $V_y = -q_0 < x - 0 >^1 + q_0 \frac{L}{2} = -q_0(x - \frac{L}{2})$
 - momento fletor: $M_z = -q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 \frac{L}{2}x - q_0 \frac{L^2}{8}$
 - rotação: $EI_z \theta_z(x) = EI_z \frac{dv}{dx} = -q_0 \frac{x^3}{6} + q_0 \frac{Lx^2}{4} - q_0 \frac{L^2x}{8}$
 - deslocamento: $EI_z v = -q_0 \frac{x^4}{24} + q_0 \frac{Lx^3}{12} - q_0 \frac{L^2x^2}{16}$

6. Rotação em $x = \frac{L}{2}$

$$EI_z \theta_1(x) = EI_z \frac{dv(x=\frac{L}{2})}{dx} = -q_0 \frac{1}{6} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + q_0 \frac{L}{4} \left(\frac{L}{2}\right)^2 - q_0 \frac{L^2}{8} \left(\frac{L}{2}\right)$$

Logo,

$$\theta_1(x) = -\frac{q_0 L^3}{48 EI_z}$$

Tomando-se o trecho $L/2 < x < L$, a rotação será a mesma, mas com sinal trocado, ou seja $\theta_2(x) = \frac{q_0 L^3}{48 EI_z}$, de tal forma que a rotação total em $x = L/2$ seja nula.

com rótula : considera-se neste caso a viga da Figura 1b). A rótula induz a uma descontinuidade de rotação $\Delta\theta$ em $x = L/2$. Esta descontinuidade deve ser incluída na equação do carregamento através de um termo de singularidade com um expoente igual -3 . Deve-se multiplicar este termo por EI_z para ficar compatível com a equação da rotação a ser obtida pela terceira integral da equação diferencial da viga. Observa-se que $\Delta\theta$ constitui-se numa incógnita a ser obtida impondo-se a condição de restrição que o momento fletor na rótula é nulo, pois não há transmissão de momento entre os dois trechos separados pela rótula.

1. Equação do carregamento: $q(x) = -q_0 \langle x - 0 \rangle^0 + EI_z \Delta\theta \langle x - \frac{L}{2} \rangle^{-3}$

2. Condições de contorno

$$v(x=0) = v(x=L) = 0$$

$$\frac{dv}{dx}(x=0) = \frac{dv}{dx}(x=L) = 0$$

3. Restrição adicional: $M_z(x = \frac{L}{2}) = 0$

4. Integração da equação diferencial:

- 1ª integração: força cortante

$$EI_z \frac{d^3 v}{dx^3} = V_y = -q_0 \langle x - 0 \rangle^1 + EI_z \Delta\theta \langle x - \frac{L}{2} \rangle^{-2} + C_1$$

- 2ª integração: momento fletor

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = M_z = -\frac{q_0}{2} \langle x - 0 \rangle^2 + EI_z \Delta\theta \langle x - \frac{L}{2} \rangle^{-1} + C_1 x + C_2$$

- 3ª integração: rotação

$$EI_z \frac{dv}{dx} = -\frac{q_0}{6} \langle x - 0 \rangle^3 + EI_z \Delta\theta \langle x - \frac{L}{2} \rangle^0 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

- 4ª integração: deslocamento transversal

$$EI_z v = -\frac{q_0}{24} \langle x - 0 \rangle^4 + EI_z \Delta\theta \langle x - \frac{L}{2} \rangle^1 + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4$$

5. Determinação das constantes de integração

$$EI_z v(0) = -\frac{q_0}{24}(0) + \frac{C_1}{6}(0) + \frac{C_2}{2}(0) + C_3 + C_4 = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

$$EI_z \frac{dv(0)}{dx} = -\frac{q_0}{6}(0) + \frac{C_1}{2}(0) + C_2(0) + C_3 = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

$$EI_z \frac{dv(L)}{dx} = -\frac{q_0 L^3}{6} + EI_z \Delta\theta + \frac{C_1 L^2}{2} + C_2 L = 0$$

$$EI_z v(L) = -\frac{q_0 L^4}{24} + EI_z \Delta\theta \frac{L}{2} + \frac{C_1 L^3}{6} + \frac{C_2 L^2}{2} = 0$$

$$M_z\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{q_0}{2} \left(\frac{L}{2}\right)^2 + C_1 \left(\frac{L}{2}\right) + C_2 = 0$$

As 3 últimas equações anteriores podem ser reescritas como um sistema de equações da seguinte maneira,

$$\begin{bmatrix} \frac{L^2}{2} & L & EI_z \\ \frac{L^3}{6} & \frac{L^2}{2} & \frac{EI_z}{2} \\ \frac{L}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ EI_z \Delta\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q_0 L^3}{6} \\ \frac{q_0 L^4}{24} \\ \frac{q_0 L^2}{8} \end{Bmatrix}$$

A solução deste sistema fornece as constantes C_1 e C_2 , assim como a descontinuidade de rotação $\Delta\theta$.

$$C_1 = \frac{q_0 L}{2} \quad C_2 = -\frac{q_0 L^2}{8} \quad \Delta\theta = \frac{q_0 L^3}{24 EI_z}$$

Observa-se que $\Delta\theta$ é igual a duas vezes a rotação obtida para a viga sem rótula em $x = L/2$, mostrando que a rotação é descontínua nesta seção. A Figura 2 ilustra as rotações θ_1 e θ_2 , assim como a descontinuidade $\Delta\theta$.

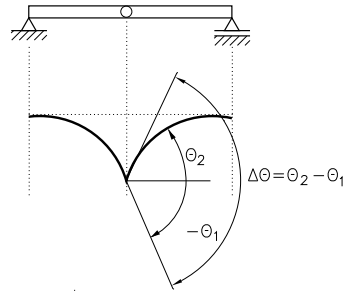


Figura 2: Rotações θ_1 e θ_2 ; descontinuidade $\Delta\theta$.