As Figuras 1a) e b) ilustram uma passarela de pedestres construída por partes pré-moldadas unidas através de apoios constituindo uma rótula (Figura 1c)). Na Figura 1d) mostra a forma como a passarela está apoiada na rampa através de uma coluna. Deseja-se comparar o comportamento em termos da cortante, momento fletor, rotação e deflexão para os modelos sem e com rótula como mostrados na Figura 2.

Figura 1: Passarela de pedestres: a) e b) vista geral; c) detalhe da rótula; d) apoio na rampa.

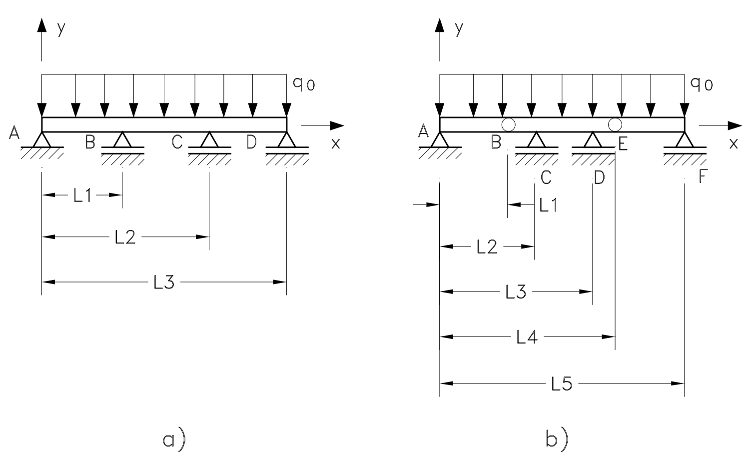

Figura 2: Modelos para a passarela: a) sem rótula; b) com rótula.

sem rótula : considera-se neste caso a viga da Figura 2a),

1. Equação de carregamento: $q(x) = -q_0 + R_{By} < x - L_1 >^{-1} + R_{Cy} < x - L_2 >^{-1}$

2. Condições de contorno
   $v(x=0)=v(x=L_3)=0$
   $M_z(x=0)=M_z(x=L_3)=0$
3. Restrições adicionais
   $v(x=L_1)=v(x=L_2)=0$
4. Integração da equação diferencial
   $EI_z\frac{d^4v}{dx^4}=-q_0+R_{By}<x-L_1>^{-1}+R_{Cy}<x-L_2>^{-1}$
   - 1^a integração: força cortante
     $V_y(x)=-q_0x+R_{By}<x-L_1>^0+R_{Cy}<x-L_2>^0+C_1$
   - 2^a integração: momento fletor
     $M_z(x)=-q_0\frac{x^2}{2}+R_{By}<x-L_1>^1+R_{Cy}<x-L_2>^1+C_1x+C_2$
   - 3^a integração: rotação
     $EI_z\Delta\theta(x)=-q_0\frac{x^3}{6}+\frac{R_{By}}{2}<x-L_1>^2+\frac{R_{Cy}}{2}<x-L_2>^2+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$
   - 4^a integração: deslocamento transversal
     $EI_zv(x)=-q_0\frac{x^4}{24}+\frac{R_{By}}{6}<x-L_1>^3+\frac{R_{Cy}}{6}<x-L_2>^3+C_1\frac{x^3}{6}+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4$
5. Determinação das constantes de integração
   - extremidades da viga (condições em termos de deslocamentos):
     $EI_zv(0)=-q_0\frac{(0)}{24}+\frac{R_{By}(0)}{6}+\frac{R_{Cy}(0)}{6}+C_1(0)+C_2(0)+C_3(0)+C_4=0$
     $EI_zv(L_3)=-q_0\frac{(L_3)^4}{24}+\frac{R_{By}}{6}(L_3-L_1)^3+\frac{R_{Cy}}{6}(L_3-L_2)^3+C_1\frac{(L_3)^3}{6}+C_2\frac{(L_3)^2}{2}+C_3(L_3)+C_4=0$
   - extremidades da viga (condições em termos de momentos):
     $M_z(0)=-q_0\frac{(0)}{2}+R_{By}(0)+R_{Cy}(0)+C_1(0)+C_2=0$
     $M_z(L_3)=-q_0\frac{(L_3)^2}{2}+R_{By}(L_3-L_1)^1+R_{Cy}(L_3-L_2)^1+C_1(L_3)+C_2=0$
   - apois intermediários da viga (restrições adicionais):
     $EI_zv(L_1)=-q_0\frac{(L_1)^4}{24}+\frac{R_{By}}{6}(L_1-L_1)^3+\frac{R_{Cy}}{6}(L_1-L_2)^3+C_1\frac{(L_1)^3}{6}+C_2\frac{(L_1)^2}{2}+C_3(L_1)+C_4=0$
     $EI_zv(L_2)=-q_0\frac{(L_2)^4}{24}+\frac{R_{By}}{6}(L_2-L_1)^3+\frac{R_{Cy}}{6}(L_2-L_2)^3+C_1\frac{(L_2)^3}{6}+C_2\frac{(L_2)^2}{2}+C_3(L_2)+C_4=0$

   Tomando $q_o=1000N/m$, $l_1=2m$, $l_2=3,0m$, $l_3=5,0m$ e resolvendo o sistema formando pelas equações anteriores, obtém-se as constantes C_1 a C_4, assim como as reações de apoio R_{By} e R_{Cy}. A partir daí, tem-se as equações finais para a cortante, momento fletor, rotação e deflexão, estando os gráficos ilustrados na Figura 3. Os valores das reações de apoio são $R_{Ay}=R_{Dy}=839,28N$ e $R_{By}=R_{Cy}=1660,71N$. O ponto onde ocorre o máximo momento fletor é $x=0,8392m$.

com rótula :

1. Equação de carregamento
   $q(x)=-q_0+EI_z\Delta\theta_B<x-L_1>^{-3}+R_{Cy}<x-L_2>^{-1}+R_{Dy}<x-L_3>^{-1}+EI_z\Delta\theta_E<x-L_4>^{-3}$
2. Condições de contorno
   $v(x=0)=v(x=L_5)=0$
   $M_z(x=0)=M_z(x=L_5)=0$

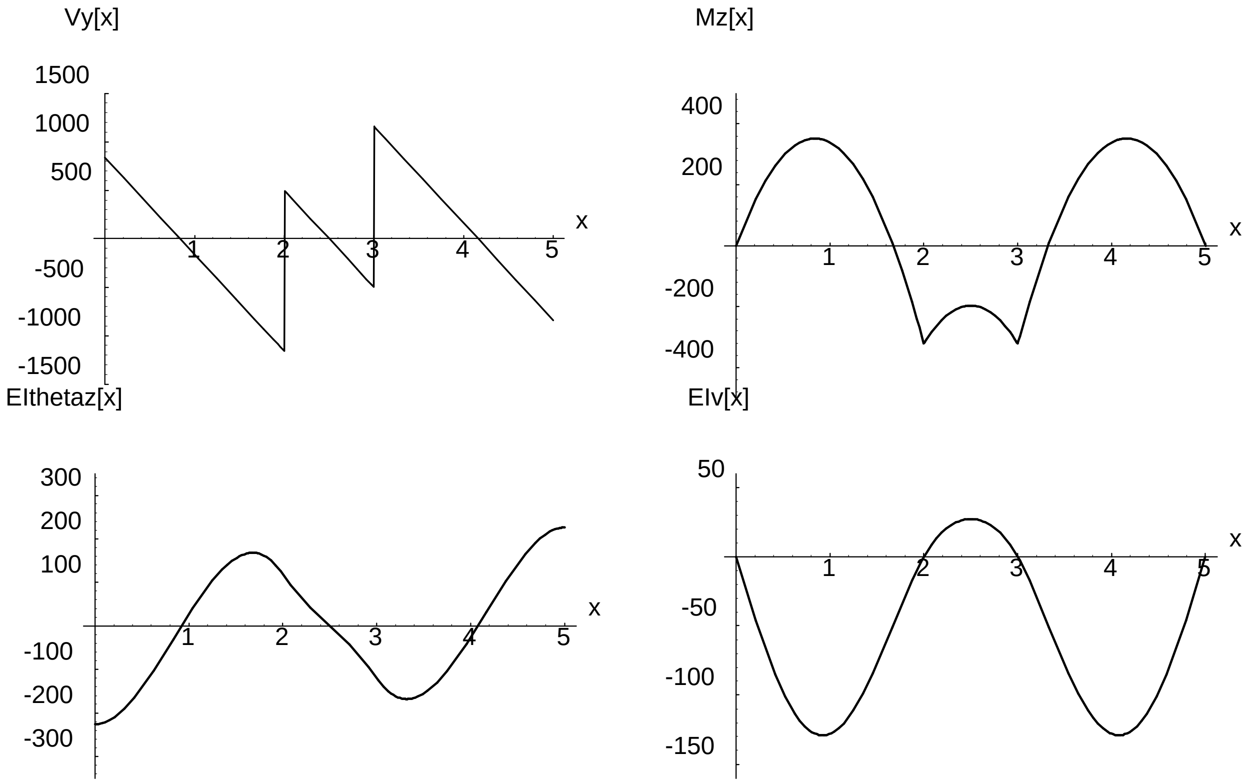

Figura 3: Passarela sem rótula: gráficos da cortante, momento fletor, rotação e deflexão.

3. Restrições adicionais
   $v(x = L_2) = v(x = L_3) = 0$
   $M_z(x = L_1) = M_z(x = L_4) = 0$
4. Integração da equação diferencial
   $EI_z \frac{d^4 v}{dx^4} = -q_0 + EI_z \Delta\theta_B < x - L_1 >^{-3} + R_{Cy} < x - L_2 >^{-1} + R_{Dy} < x - L_3 >^{-1} + EI_z \Delta\theta_E < x - L_4 >^{-3}$
   - 1^a integração: força cortante
     $V_y(x) = -q_0 x + EI_z \Delta\theta_B < x - L_1 >^{-2} + R_{Cy} < x - L_2 >^0 + R_{Dy} < x - L_3 >^0 + EI_z \Delta\theta_E < x - L_4 >^{-2} + C_1$
   - 2^a integração: momento fletor
     $M_z(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + EI_z \Delta\theta_B < x - L_1 >^{-1} + R_{Cy} < x - L_2 >^1 + R_{Dy} < x - L_3 >^1 + EI_z \Delta\theta_E < x - L_4 >^{-1} + C_1 x + C_2$
   - 3^a integração: rotação
     $EI_z \frac{dv}{dx}(x) = -q_0 \frac{x^3}{6} + EI_z \Delta\theta_B < x - L_1 >^0 + \frac{R_{Cy}}{2} < x - L_2 >^2 + \frac{R_{Dy}}{2} < x - L_3 >^2 + EI_z \Delta\theta_E < x - L_4 >^0 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$
   - 4^a integração: deflexão
     $EI_z v(x) = -q_0 \frac{x^4}{24} + EI_z \Delta\theta_B < x - L_1 >^1 + \frac{R_{Cy}}{6} < x - L_2 >^3 + \frac{R_{Dy}}{6} < x - L_3 >^3 + EI_z \Delta\theta_E < x - L_4 >^1 + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$
5. Determinação das constantes de integração
   - extremidades da viga (condições em termos de deslocamentos):
     $EI_z v(0) = -q_0 \frac{(0)}{24} + EI_z \Delta\theta_B(0) + \frac{R_{Cy}}{6}(0) + \frac{R_{Dy}}{6}(0) + EI_z \Delta\theta_E(0) + C_1 \frac{(0)}{6} + C_2 \frac{(0)}{2} + C_3(0) + C_4 = 0$

$EI_z v(L_5) = -q_0 \frac{(L_5)^4}{24} + EI_z \Delta\theta_B (L_5 - L_1)^1 + \frac{R_{Cy}}{6}(L_5 - L_2)^3 + \frac{R_{Dy}}{6}(L_5 - L_3)^3 + EI_z \Delta\theta_E (L_5 - L_4)^1 + C_1 \frac{(L_5)^3}{6} + C_2 \frac{(L_5)^2}{2} + C_3(L_5) + C_4 = 0$

- extremidades da viga (condições em termos de momentos):
  $M_z(0) = -q_0 \frac{(0)}{2} + EI_z \Delta\theta_B(0) + R_{Cy}(0) + R_{Dy}(0) + EI_z \Delta\theta_E(0) + C_1(0) + C_2 = 0$
  $M_z(L_5) = -q_0 \frac{(L_5)^2}{2} + EI_z \Delta\theta_B(0)^{-1} + R_{Cy}(L_5 - L_2)^1 + R_{Dy}(L_5 - L_3)^1 + EI_z \Delta\theta_E(0)^{-1} + C_1(L_5) + C_2 = 0$
- rótulas (restrições adicionais):
  $M_z(L_1) = -q_0 \frac{(L_1)^2}{2} + EI_z \Delta\theta_B(0)^{-1} + R_{Cy}(L_1 - L_2)^1 + R_{Dy}(L_1 - L_3)^1 + EI_z \Delta\theta_E(0)^{-1} + C_1(L_1) + C_2 = 0$
  $M_z(L_4) = -q_0 \frac{(L_4)^2}{2} + EI_z \Delta\theta_B(0)^{-1} + R_{Cy}(L_4 - L_2)^1 + R_{Dy}(L_4 - L_3)^1 + EI_z \Delta\theta_E(0)^{-1} + C_1(L_4) + C_2 = 0$
- apois intermediários da viga (restrições adicionais):
  $EI_z v(L_2) = -q_0 \frac{(L_2)^4}{24} + EI_z \Delta\theta_B (L_2 - L_1)^1 + \frac{R_{Cy}}{6}(L_2 - L_2)^3 + \frac{R_{Dy}}{6}(0) + EI_z \Delta\theta_E(0) + C_1 \frac{(L_2)^3}{6} + C_2 \frac{(L_2)^2}{2} + C_3(L_2) + C_4 = 0$
  $EI_z v(L_3) = -q_0 \frac{(L_3)^4}{24} + EI_z \Delta\theta_B (L_3 - L_1)^1 + \frac{R_{Cy}}{6}(L_3 - L_2)^3 + \frac{R_{Dy}}{6}(L_3 - L_3)^3 + EI_z \Delta\theta_E(0) + C_1 \frac{(L_3)^3}{6} + C_2 \frac{(L_3)^2}{2} + C_3(L_3) + C_4 = 0$

Tomando $q_o = 1000N/m$, $l_1 = 1,5m$, $l_2 = 2,0m$, $l_3 = 3,0m$, $l_4 = 3,5m$, $l_5 = 5,0m$ e resolvendo o sistema formando pelas equações anteriores, obtém-se as constantes C_1 a C_4, as reações de apoio R_{By} e R_{Cy}, assim como as descontinuidades de rotação $EI_z\Delta_B$ e $EI_z\Delta_E$. A partir daí, tem-se as equações finais para a cortante, momento fletor, rotação e deflexão, estando os gráficos ilustrados na Figura 4. Os valores das reações de apoio são $R_{Ay} = R_{Dy} = 750,0N$ e $R_{By} = R_{Cy} = 1750,0N$, enquanto $EI_z\Delta_B = EI_z\Delta_E = 277,78$.

Comparando-se os gráficos das Figuras 3 e 4 verifica-se que as reações de apoio são semelhantes para os dois modelos. Já para o momento fletor, tem-se um crescimento dos valores no trecho entre as rótulas. Deve-se observar, como esperado, a descontinuidade das rotações nos pontos onde estão as rótulas. Finalmente, os deslocamentos transversais são mais pronunciados no modelo considerando as rótulas.

A partir do gráfico do momento fletor da Figura 3, conclui-se que as rótulas deveriam estar colocadas nos pontos de momento máximo, ou seja, $x = 0,8392m$ e $x = 4,1608m$. Refazendo o caso com a rótula nestas posições, tem-se os diagramas ilustrados na Figura 5. Observa-se o decrescimento nos valores das reações nos apoios da viga. No entanto, o momento fletor e a deflexão crescem sensivelmente na região entre as rótulas e os apoios intermediários.

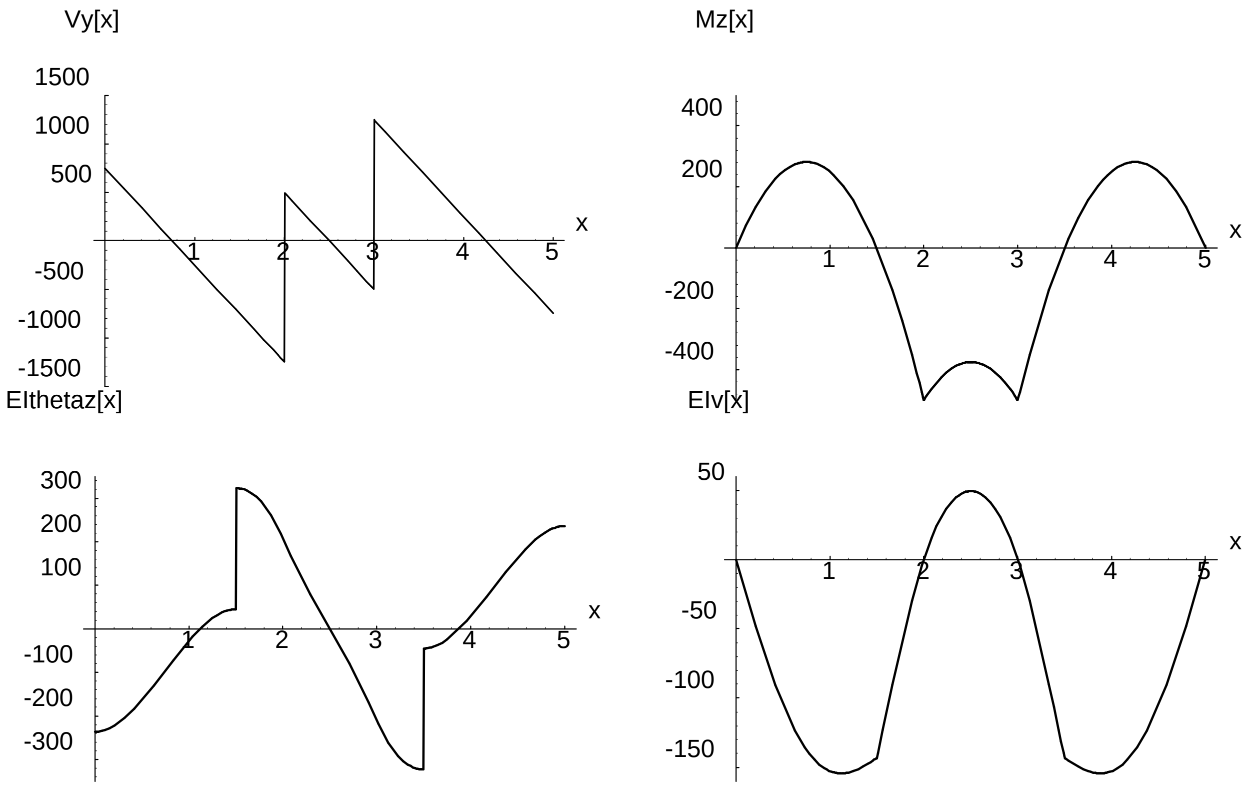

Figura 4: Passarela com rótula: gráficos da cortante, momento fletor, rotação e deflexão.

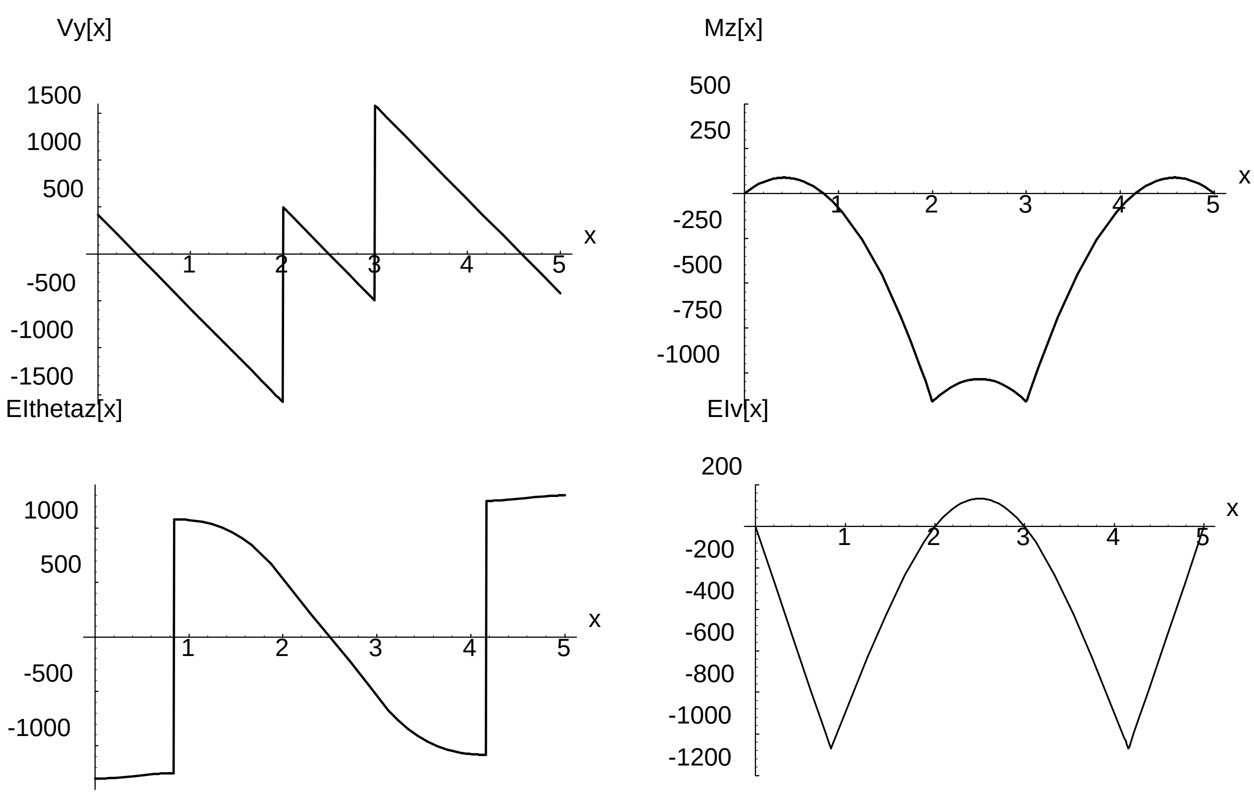

Figura 5: Passarela com rótula nos pontos de máximo momento: gráficos da cortante, momento fletor, rotação e deflexão.