EM505 - RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II
Profs. Euclides Mesquita Neto e Marco Lúcio Bittencourt
Segunda Prova - Data: 18/06/97

QUESTÃO 1 (Valor 2,0): Um certo corpo de prova de diâmetro $d = 2cm$ foi submetido a um ensaio de torção, verificando-se a falha, segundo o critério da máxima energia de distorção, para um torque máximo $T = 200N.m$, conforme ilustrado na Figura 1. Sabendo-se que uma certa viga bi-apoiada de mesmo material (ver Figura 1) foi submetida a uma carga distribuída qo, determinar o valor máximo de qo. Dados: $L = 2m$; $b = 10cm$; $h = 20cm$.

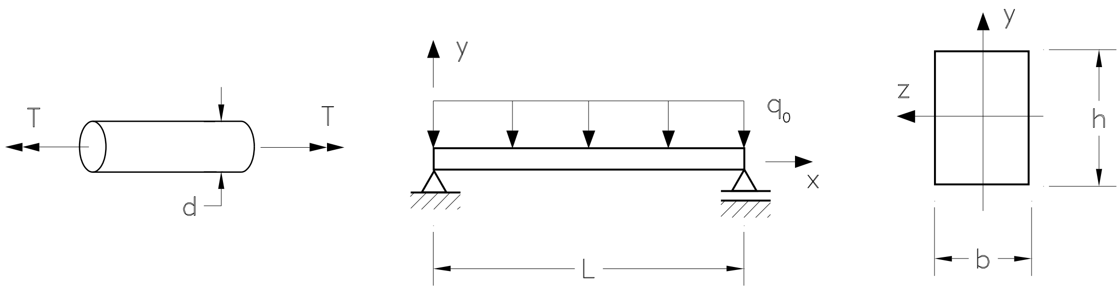

Figura 1: Questão 1.

Solução da questão 1:

- A tensão máxima de cisalhamento no corpo de prova é calculada como,

$$\tau = \frac{M_x}{I_p}.\frac{d}{2} = \frac{M_x}{\frac{\pi d^4}{32}}.\frac{d}{2} = \frac{16}{\pi}\frac{M_x}{d^3} = \frac{16}{\pi}\frac{200.10^2}{2^3} = 1,27 \times 10^4 N/cm^2$$

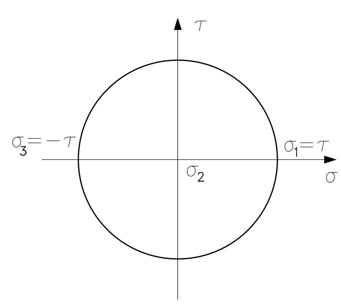

Figura 2: Círculo de Mohr para o corpo de prova da questão 1.

O respectivo estado de tensão está indicado no círculo de Mohr da Figura 2. A energia de distorção associada a este estado de cisalhamento puro ($\sigma_1 = \tau$; $\sigma_2 = -\tau$; $\sigma_3 = 0$) é dada por,

$$U_{dist} = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right]$$

$$U_{dist} = \frac{1}{12G}\left[4\tau^2 + \tau^2 + \tau^2\right] = \frac{6\tau^2}{12G} \tag{1}$$

- Considerando agora a viga, utiliza-se a integração diferencial para determinar o momento máximo e consequentemente a tensão máxima.
  - Equação de carregamento: $q(x) = -q_0$
  - Condições de contorno
    $M_z(x=0) \qquad M_z(x=L)$
    $v(x=0) \qquad v(x=L)=0$
  - Integração da equação diferencial: $EI_z\frac{d^4v}{dx^4} = q(x) = -q_0$
    - 1^a integração: força cortante
      $$V_y = EI_z\frac{d^3v}{dx^3} = -q_0x + C_1$$
    - 2^a integração: momento fletor
      $$M_z = EI_z\frac{d^2v}{dx^2} = -q_0\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$$
    - 3^a integração: rotação
      $$EI_z\frac{dv}{dx} = -q_0\frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$$
    - 4^a integração: deslocamento transversal
      $$EI_zv = -q_0\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4$$
  - Determinação das constantes de integração
    $$M_z(x=0) = -q_0\frac{(0)^2}{2} + C_1(0) + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$
    $$M_z(x=L) = -q_0\frac{(L)^2}{2} + C_1(L) + 0 = 0 \rightarrow C_1 = \frac{q_0L}{2}$$
    $$EI_zv(x=0) = -q_0\frac{0^4}{24} + C_1\frac{0^3}{6} + C_2\frac{0^2}{2} + C_30 + C_4 = 0 \rightarrow C_4 = 0$$
    $$EI_zv(x=L) = -q_0\frac{L^4}{24} + q_0\frac{L^3}{6} + 0\frac{0^2}{2} + C_3L + 0 = 0 \rightarrow C_3 = -\frac{q_0L^3}{24}$$
  - Equações finais
    - força cortante: $V_y = -q_0x + \frac{q_0L}{2} = -q_0\left(x - \frac{L}{2}\right)$
    - momento fletor: $M_z(x) = -q_0\frac{x^2}{2} + q_0L\frac{x}{2} = -\frac{q_0}{2}\left(x^2 - Lx\right)$
    - rotação: $EI_z\frac{dv}{dx} = -q_0\frac{x^3}{6} + q_0L\frac{x^2}{4} - \frac{q_0L^3}{24}x$
    - deslocamento: $EI_zv(x) = -q_0\frac{x^4}{24} + q_0L\frac{x^3}{12} - q_0L^2\frac{x^2}{24}$
  - Ponto de máximo momento fletor:
    $V_y = -q_0x - \frac{q_0L}{2} = -q_0\left(x - \frac{L}{2}\right) = 0 \rightarrow x = \frac{L}{2}$
    O valor do momento em $x = L/2$ é dado por,
    $$M_z\left(x = \frac{L}{2}\right) = -\frac{q_0}{2}\left(\frac{L^2}{4} - L\frac{L}{2}\right) = -\frac{q_0L^2}{2}\left(\frac{1-2}{4}\right) = \frac{q_0L^2}{8}$$

– Tensão máxima na viga é dada por,

$$\sigma_{xx} = \frac{-M_z}{I_z} y \rightarrow \sigma_{xx}^{\max} = \frac{M_z^{\max}}{I_z}\frac{H}{2} = \frac{q_0 \frac{L^2}{8}}{\frac{bh^8}{12}}\frac{h}{2} = \frac{3}{4}\frac{q_0 L^2}{bh^2} = 7,5q_0$$

A energia de distorção para o estado de tensão na viga ($\sigma_1 = 7,5q_0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) será

$$U_{viga} = \frac{1}{12G}\left[2\sigma_1^2\right] = \frac{2\sigma_1^2}{12G} \tag{2}$$

– Igualando (1) e (2), tem-se,

$$\frac{2\tau^2}{12G} = \frac{2\sigma_1^2}{12G} \rightarrow \sigma_1^2 = 3\tau^2 \rightarrow \sigma_1^2 = \sqrt{3}\tau \rightarrow \frac{3}{4}\frac{q_0 L^2}{bh^2} = \sqrt{3}\tau \rightarrow q_0 = \frac{4\sqrt{3}\tau bh^2}{3L^2}$$

Substituindo os valores, obtém-se o valor de q_o,

$$q_0 = \frac{4\sqrt{3}1,27 \times 10^4 (10)(20)^2}{3(200)^2} = 2940,4N/cm$$

QUESTÃO 2 (Valor 2,0): Considere a viga hiperestática mostrada na Figura 3 constituída de duas seções transversais indicada por $E_1 Iz_1$ e $E_2 Iz_2$. Pede-se determinar as equações de cada trecho, bem como as equações de equilíbrio e compatibilidade cinemática possibilitando resolver o problema. Indique os números de equações e de incógnitas explicitamente.

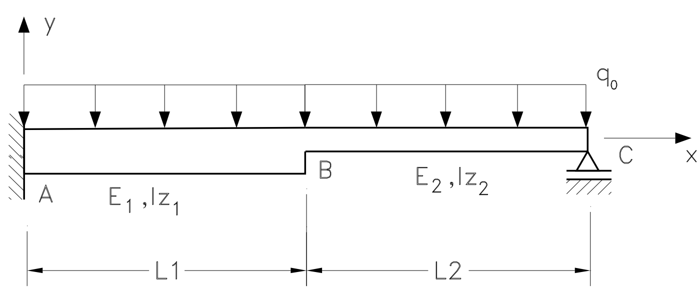

Figura 3: Questão 2.

Solução da questão 2:

Para a solução deste problema, considera-se a os trechos AB e BC da viga, assim como o equilibrio da interface entre os dois trechos, como ilustrado respectivamente nas Figuras 4a), c) e b).

Viga 1 (trecho AB) : neste caso tem-se como incógnitas as constantes de integração C_1, C_2, C_3, C_4, assim como os esforços cortante V_1 e momento fletor M_1 na interface dos dois trechos.

- Condições de contorno

$$\begin{array}{ll} v_1(x=0)=0 & \theta_{1z}(x=0)=0 \\ V_{1y}(x=L_1)=V_1 & M_z(x=L_1)=M_1 \end{array}$$

- Integração da equação diferencial: $E_1 I_{z_1}\frac{d^4 v}{dx^4} = q(x) = -q_0$

$$E_1 I_{z_1}\frac{d^3 v_1}{dx^3} = V_{1y} = -q_0 x + C_1$$

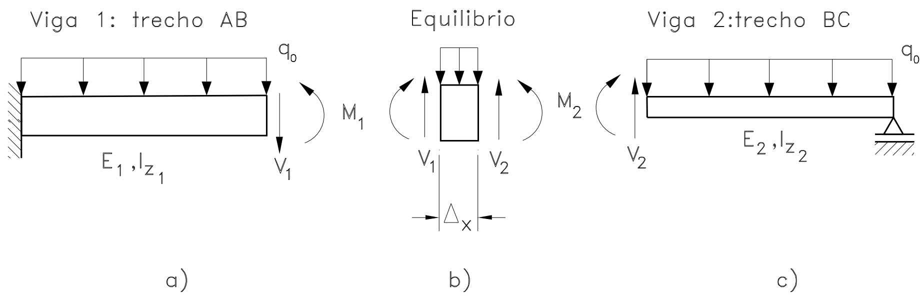

Figura 4: Viga da questão 2: a) trecho AB; b) equilíbrio entre os dois trechos; c) trecho BC.

$$E_1 I_{z_1} \frac{d^2 v_1}{dx^2} = M_{1z} = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$E_1 I_{z_1} \frac{dv_1}{dx} = -q_0 \frac{x^3}{6} + C_1 . \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$E_1 I_{z_1} v_1 = -q_0 \frac{x^4}{24} + C_1 . \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Substituindo as condições de contorno nas expressões anteriores, determinam-se 4 equações.

Viga 2 (trecho BC) : neste caso tem-se como incógnitas as constantes de integração D_1, D_2, D_3, D_4, assim como os esforços cortante V_2 e momento fletor M_2 na interface dos dois trechos.

- Condições de contorno

$$\begin{array}{ll} V_{2y}(x = L_1) = V_2 & M_z(x = L_1) = M_2 \\ v_2(x = L_1 + L_2) = 0 & M_z(x = L_1 + L_2) = M_1 \end{array}$$

- Integração da equação diferencial: $E_2 I_{z2} \frac{d^4 v_2}{dx^4} = -q_0 < x - L_1 >^0$

$$V_{2y} = E_2 I_{z2} \frac{d^3 v_2}{dx^3} = -q_0 < x - L_1 >^1 + D_1$$

$$M_{2z} = E_2 I_{z_2} \frac{d^2 v_2}{dx^2} = -q_0 < x - L_1 >^2 + D_1 x + D_2$$

$$E_2 I_{z2} \frac{dv_2}{dx} = -\frac{q_0}{6} < x - L_1 >^3 + D_1 \frac{x^2}{2} + D_2 x + D_3$$

$$E_2 I_{z_2} v_2 = -\frac{q_0}{24} < x - L_1 >^4 + D_1 \frac{x^3}{6} + D_2 \frac{x^2}{2} + D_3 x + D_4$$

Substituindo as condições de contorno nas expressões anteriores, determinam-se mais 4 equações.

Equilíbrio : considera-se o equilíbrio dos esforços presentes na interface dos dois trechos, como mostrado na Figura 4b). As condições de equilíbrio são as seguintes:

1. $\sum F_y = 0 : V_1 + V_2 - q_0 \Delta x = 0 \rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} V_1 + V_2 = 0 \rightarrow V_1 = -V_2$
2. $\sum M_{z4} = 0 : -M_1 - V_1 \Delta x + q_0 \frac{\Delta x^2}{2} + M_2 = 0 \rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -M_1 + M_2 = 0 \rightarrow M_1 = M_2$

O equilíbrio fornece duas equações adicionais relacionando os esforços na interface dos dois trechos.

Compatibilidade cinemática : tem-se que os deslocamentos v_1, v_2 e rotações θ_{1z}, θ_{2z} na interface dos dois trechos devem ser iguais. Logo,

$$v_1(L_1) = v_2(L_1)$$
$$\theta_{1z}(L_1) = \theta_{2z}(L_1)$$

chegando-se a mais duas equações.

Solução : a partir do desenvolvimento anterior tem-se 12 incógnitas, ou seja, as constantes do trecho AB (C_1, C_2, C_3, C_4), do trecho BC (D_1, D_2, D_3, D_4) e os esforços na interface (V_1, V_2, M_1, M_2). Da mesma maneira, tem-se 12 equações a partir da integração das expressões dos trechos AB e BC, assim como do equilíbrio e das condições de compatibilidade da interface dos trechos AB e BC.

QUESTÃO 3 (Valor 4,0): Para a viga ilustrada na Figura 5, pede-se determinar:

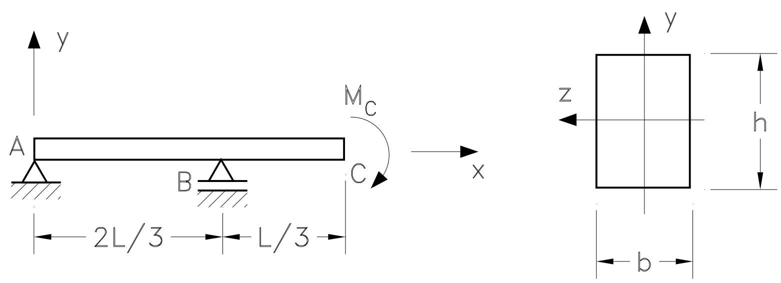

Figura 5: Questão 3.

1. a rotação no ponto C utilizando o princípio da conservação da energia;
2. a rotação no ponto B através do princípio das forças virtuais.

Solução da questão 3:

Neste questão, emprega-se o Método das Secções para a determinação dos esforços cortante e momento fletor na viga.

rotação no ponto C : a Figura 6 mostra o diagrama de corpo livre da viga, assim como os cortes nos trechos AB e BC.

- Cálculo das reações de apoio

$$1)\sum F_y = 0: \quad R_{Ay} + R_{By} = 0 \rightarrow R_{Ay} = -R_{By}$$
$$2)\sum M_{zA} = 0: \quad R_{By}\frac{2}{3}L - M_c = 0 \rightarrow R_{By} = \frac{2}{3}\frac{M_c}{L} \rightarrow R_{Ay} = -\frac{3}{2}\frac{M_c}{L}$$

- Equilíbrio das secções

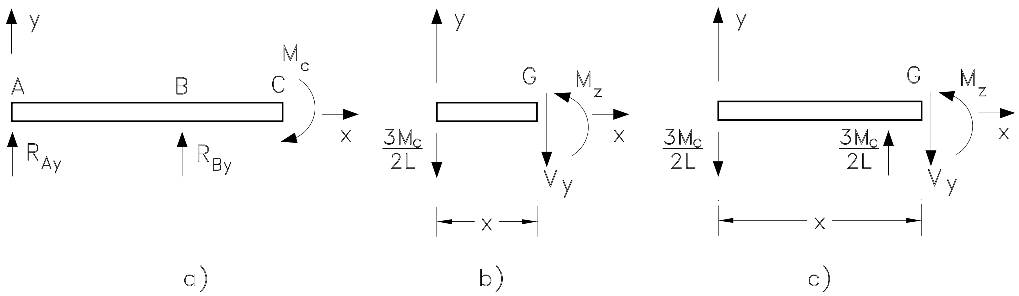

Figura 6: Viga: a) DCL; b) corte no trecho AB; c) corte no trecho BC.

trecho AB ($0 < x < \frac{2}{3}L$):

$$1) \sum F_y = 0: \quad -\frac{3}{2}\frac{M_c}{L} - V_y = 0 \rightarrow V_y = -\frac{3}{2}\frac{M_c}{L} \rightarrow \begin{cases} V_y\left(x \rightarrow 0^+\right) = -\frac{3}{2}\frac{M_c}{L} \\ V_y\left(x \rightarrow \frac{2}{3}L^-\right) = -\frac{3}{2}\frac{M_c}{L} \end{cases}$$

$$2) \sum M_{zA} = 0: \quad M_{zA} + \frac{3}{2}\frac{M_c}{L}x = 0 \rightarrow M_z = -\frac{3}{2}\frac{M_c}{L}x \rightarrow \begin{cases} M_z\left(x \rightarrow 0^+\right) = 0 \\ M_z\left(x \rightarrow \frac{2}{3}L^-\right) = M_c \end{cases}$$

trecho BC ($\frac{2}{3}L < x < L$):

$$1) \sum F_y = 0: \quad -\frac{3}{2}\frac{M_c}{L} + \frac{3}{2}\frac{M_c}{L}x = 0 \rightarrow V_y = 0$$

$$2) \sum M_{zG} = 0: \quad M_z + \frac{3}{2}\frac{M_c}{L}x - \frac{3}{2}\frac{M_c}{L}\left(x - \frac{2}{3}L\right) = 0 \rightarrow M_z = -M_c$$

- Energia de Deformação:

$$U = \frac{1}{2E}\int_0^L \frac{M_z^2(x)}{I_z(x)}dx + \frac{1}{2G}\int_0^L \xi(x)\frac{V_y^2(x)}{A(x)}dx$$

para $A(x) = bh$, $I_z(x) = \frac{bh^3}{12}$, $\xi(x) = \frac{6}{5}$. Como são dois trechos na viga, as integrais na expressão anterior devem ser tomadas para os trechos AB e BC. Logo,

$$U = \frac{1}{2E\frac{bh^3}{12}}\left(\int_0^{\frac{2}{3}L}\frac{9}{4}\frac{M_c^2}{L^2}x^2dx + \int_{\frac{2}{3}L}^{L} M_c^2dx\right) + \frac{1}{2Gbh}\frac{6}{5}\left(\int_0^{\frac{2}{3}L}\frac{9}{4}\frac{M_c^2}{L^2}dx + \int_{\frac{2}{3}L}^{L} 0dx\right)$$

$$U = \frac{6}{Ebh^3}\left(\frac{9}{4}\frac{M_c^2}{L^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\frac{2}{3}L} + M_c^2x\bigg|_{\frac{2}{3}L}^{L}\right) + \frac{3}{5Gbh}\left(\frac{9}{4}\frac{M_c^2}{L^2}\,x\big|_0^{\frac{2}{3}L}\right)$$

$$U = \frac{6M_c^2}{Ebh^3}\left(\frac{2}{9}L + \frac{L}{3}\right) + \frac{9M_c^2}{10GbhL} = \frac{10M_c^2}{3Ebh^3} + \frac{9M_c^2}{10GbhL}$$

- Principio da Conservação da Energia:

$$W_c = U \rightarrow \frac{1}{2}M_c\theta_c = \frac{10M_c^2L}{3Ebh^3} + \frac{9M_c^2}{10GbhL}$$

Assim, a rotação θ_c no ponto C é dada por,

$$\theta_c = \frac{20M_cL}{3Ebh^3} + \frac{9M_c}{5GbhL}$$

rotação no ponto B : neste caso, emprega-se o sistema auxiliar mostrado na Figura 7a) com o momento $\bar{M}$ aplicado em $x = 2L/3$. Emprega-se o método das seções para a determinação de V_y e M_z nos trechos AB e BC, empregando, respectivamente, os cortes ilustrados nas Figuras 7b) e c).

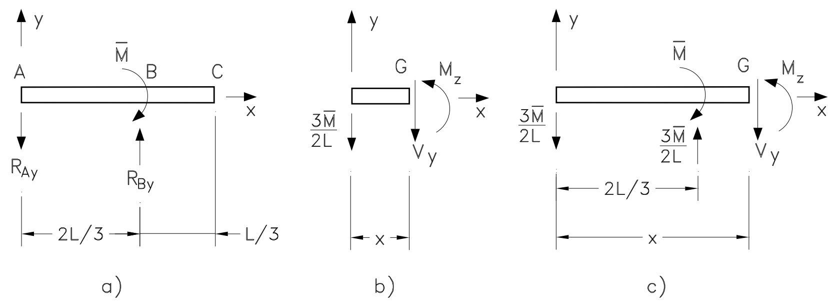

Figura 7: Sistema auxiliar: a) DCL; b) corte no trecho AB; c) corte no trecho BC.

- As reações de apoio são iguais ao caso anterior, estando, no entanto, dadas em função de $\bar{M}$, ou seja, $R_{Ay} = -\frac{3}{2}\frac{\bar{M}}{L}$ e $R_{Ay} = \frac{3}{2}\frac{\bar{M}}{L}$.
- Equilíbrio das secções

  trecho AB $(0 < x < \frac{2}{3}L)$:

$$\begin{array}{ll} 1) \sum F_y = 0: & -V_y - \frac{3}{2}\frac{\bar{M}}{L} = 0 \rightarrow V_y = -\frac{3}{2}\frac{\bar{M}}{L} \\ 2) \sum M_{zG} = 0: & M_z + \frac{3}{2}\frac{\bar{M}}{L}x = 0 \rightarrow M_z = -\frac{3}{2}\frac{\bar{M}}{L}x \end{array}$$

  trecho BC $(\frac{2}{3}L < x < L)$:

$$\begin{array}{l} 1) \sum F_y = 0: -\frac{3}{2}\frac{\bar{M}}{L} - \frac{3}{2}\frac{\bar{M}}{L} = 0 \rightarrow V_y = 0 \\ 2) \sum M_{zG} = 0: \frac{3}{2}\frac{\bar{M}}{L}x - \bar{M} - \frac{3}{2}\frac{\bar{M}}{L}\left(x - \frac{3}{2}L\right) + M_z = 0 \rightarrow M_z = 0 \end{array}$$

- Energia de deformação

$$\delta U = \int_0^L \left[\frac{\bar{M}_z(x)\, M_z(x)}{EI_z(x)} + \xi(x)\frac{\bar{V}_y(x)\, V_y(x)}{GA(x)}\right] dx$$

$$\delta U = \frac{12}{Ebh^3}\int_0^{\frac{2}{3}L}\left(-\frac{3}{2}\frac{\bar{M}}{L}x\right)\left(-\frac{3}{2}\frac{\bar{M}_c}{L}x\right)dx + \frac{8}{Gbh}\int_0^{\frac{2}{3}L}\left(-\frac{3}{2}\frac{\bar{M}}{L}\right)\left(-\frac{3}{2}\frac{\bar{M}_c}{L}\right)dx$$

$$\delta U = \frac{12}{Ebh^3}\frac{9\bar{M}\bar{M}_c}{4L^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\frac{2}{3}L} + \frac{\xi}{Gbh}\frac{9\bar{M}\bar{M}_c}{4L^2}x\bigg|_0^{\frac{2}{3}L}$$

$$\delta U = \frac{12}{Ebh^3}\frac{9\bar{M}\bar{M}_c}{4L^2}\frac{8L^3}{(3)(27)} + \frac{\xi}{Gbh}\frac{9\bar{M}\bar{M}_c}{4L^2}\frac{2L}{3}$$

$$\delta U = \frac{8}{3}\frac{\bar{M}\bar{M}_c L}{Ebh^3} + \frac{3}{2}\frac{\bar{M}\bar{M}_c}{GbhL}\xi$$

- Aplicando o Princípio das Forças Virtuais, tem-se a rotação θ_B no ponto B,

$$\delta W = \bar{M}\theta_B = \delta U \rightarrow \theta_B = \frac{8M_cL}{3Ebh^3} + \frac{3M_c}{2GbhL}\xi$$

QUESTÃO 4 (Valor 2,0): Para a coluna de seção retangular $b \times h$ mostrada abaixo calcule a carga crítica de flambagem. Sabendo-se que o material da coluna tem um comportamento frágil e analisando a curva tensão/deformação da Figura 8, determine o comprimento abaixo do qual não haverá falha por flambagem, mas sim por fratura. Dados: $b = 5cm$; $h = 10cm$; $L = 2m$; $E = 20 \times 10^6 N/cm^2$; $\sigma_{ult} = 250MPa$.

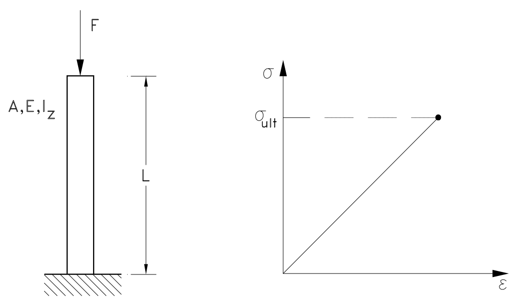

Figura 8: Questão 4.

Solução da questão 4:

- Caso a viga apresente flambagem será em relação ao eixo de menor momento de inércia I_z^{min}. Para este caso, tem-se,

$$I_z^{min} = \frac{hb^3}{12} = \frac{(10)(5)^3}{12} = 104,17cm^4$$

A carga crítica de flambagem é calculada como,

$$F_{crit} = \frac{\pi^2 E I_z^{min}}{L_{eq}^2}$$

devendo-se observar que o comprimento equivalente para as condições de contorno dadas é calculado como $L_{eq} = 2L = 2(2) = 4m = 400cm$. Logo,

$$F_{crit} = \frac{\pi^2(20 \times 10^6)(104,17)}{(400)^2} = 1,28 \times 10^5 N$$

- A falha por fratura acoontecerá caso

$$F_{ult} > F_{crit}$$

ou seja,

$$\bar{\sigma}_{ult}A > \frac{\pi^2 E I_z}{L_{eq}^2} \rightarrow (2L)^2 > \frac{\pi^2 E I_z}{\bar{\sigma}_{ult}A} \rightarrow L > \sqrt{\frac{\pi^2 E I_z}{4\bar{\sigma}_{ult}A}}$$

Portanto,

$$L > \sqrt{\frac{\pi^2 20 \times 10^6 (104,17)}{4(2500)(5)(10)}} \rightarrow L > 64,13cm$$

Logo, o comprimento mínimo onde ocorrerá flambagem será $64,13cm$.