A viga bi-engastada mostrada na Figura 1 deverá ser construída com um material cuja tensão normal admissível de trabalho é no máximo $\bar{\sigma} = 200N/mm^2$. O material do qual a viga será construída possue um módulo de elasticidade longitudinal (Young) $E = 2,0x10^6N/mm^2$. A viga deve suportar uma carga uniformemente distribuída $q_o = 10.000N/m$ ao longo de um vão $L = 5m$. Outro dado de projeto é que a flecha máxima não deve ultrapassa $v_{max} = L/1000$. Por razões construtivas a seção transversal de viga deverá ser um retângulo com dimensões $Bx3B$, tal como mostrado. Para esta viga solicita-se: a) as equações e os diagramas de esforço cortante, momento fletor, deflexão angular (rotação) e deflexão linear (flecha), b) as reações de apoio, c) a dimensão mínima B para que os requisitos de tensão e deslocamento máximo sejam respeitados.

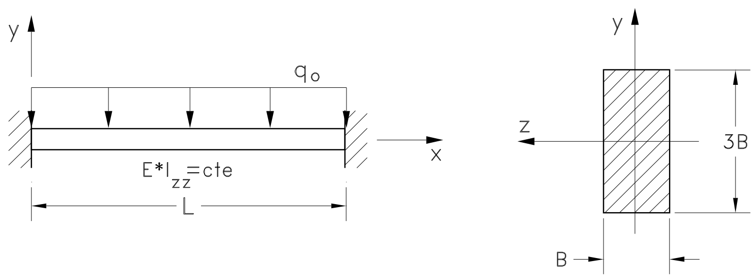


Figura 1: Viga bi-engastada.

1. Equação do carregamento: $q(x) = -q_0$

2. Condições de contorno

   $v(x=0) = 0 \qquad v(x=L) = 0$

   $\theta_z(x=0) = 0 \qquad \theta_z(x=L) = 0$

3. Integração da equação diferencial: $EI_z \frac{d^4 v}{dx^4} = -q_0$

   - 1^a integração: força cortante
     $EI_z \frac{d^3 v}{dx^3} = V_y(x) = -q_0 x + C_1$
   - 2^a integração: momento fletor
     $EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = M_z(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$
   - 3^a integração: rotação
     $\theta_z(x) = -q_0 \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$
   - 4^a integração: deslocamento transversal
     $EI_z v(x) = -q_0 \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$

4. Determinação das constantes de integração

   $EI_z v(0) = -q_0 \frac{(0)^4}{24} + C_1 \frac{(0)^3}{6} + C_2 \frac{(0)^2}{2} + C_3(0) + C_4 = 0 \rightarrow C_4 = 0$

   $\theta_z(0) = -q_0 \frac{(0)^3}{6} + C_1 \frac{(0)^2}{2} + C_2(0) + C_3 = 0 \rightarrow C_3 = 0$

   $EI_z v(L) = -q_0 \frac{L^4}{24} + C_1 \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} + C_3 L + C_4 = 0 \rightarrow -q_0 \frac{L^4}{24} + C_1 \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} = 0$

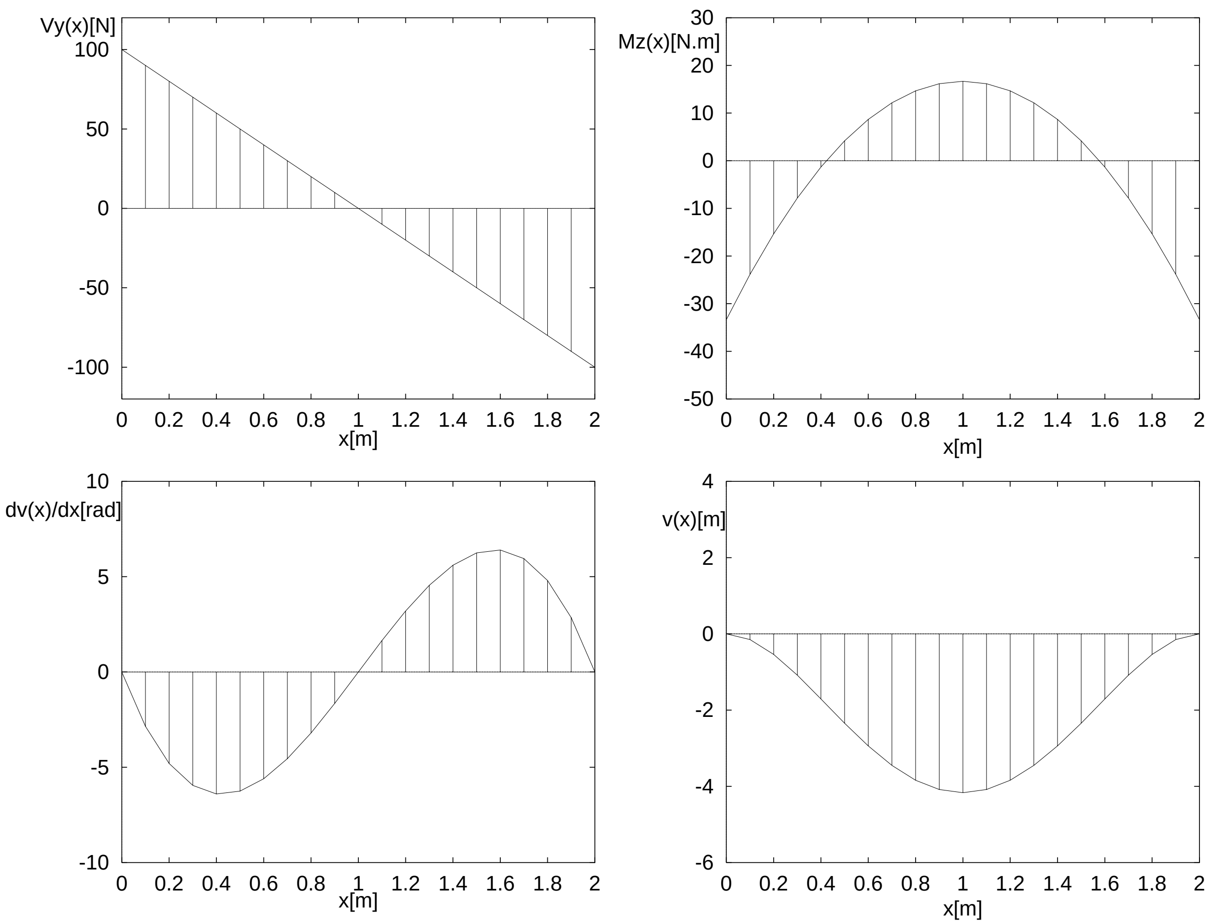
   $\theta_z(L) = -q_0 \frac{L^3}{6} + C_1 \frac{L^2}{2} + C_2 L + C_3 = 0 \rightarrow -q_0 \frac{L^3}{6} + C_1 \frac{L^2}{2} + C_2 L = 0$

   Reolvendo o sistema constituído das duas equações anteriores, tem-se $C_1 = q_0 \frac{L}{2}$ e $C_2 = q_0 \frac{L^2}{12}$.

5. Equações finais

- força cortante: $V_y(x) = -q_0 x + q_0 \frac{L}{2}$
- momento fletor: $M_z(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 L \frac{x}{2} - q_0 \frac{L^2}{12}$
- rotação: $\theta_z(x) = -q_0 \frac{x^3}{6} + q_0 L \frac{x^2}{4} - q_0 L^2 \frac{x}{12}$
- deslocamento: $EI_z v(x) = -q_0 \frac{x^4}{24} + q_0 L \frac{x^3}{12} - q_0 L^2 \frac{x^2}{24}$

6. Diagramas da força cortante, momento fletor, rotação e deflexão



7. Reações nos apoios

Forças:	$R_{Ay} = V_y(x=0) = 25000N$	$R_{By} = V_y(x=L) = 25000N$
Momentos:	$M_{Az} = M_z(x=0) = -20833,4Nm$	$M_{Bz} = M_z(x=L) = -20833,4Nm$

8. Dimensionamento

- Dimensionamento à tensão

  O módulo de resistência da seção é dado por $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$. Por sua vez, $I_z = \frac{BH^3}{12} = \frac{B(3B)^3}{12} = \frac{9}{4}B^4$ e $y_{\max} = \frac{3}{2}B$. Logo, $W_z = \frac{3}{2}B^3$. No dimensionamento da seção, considera-se o módulo do momento fletor máximo. Logo,

$$\bar{\sigma} = \frac{M_{z\,\max}}{W_z} = \frac{M_{z_{max}}}{\frac{3}{2}B^3} \rightarrow B = \left(\frac{2M_{z_{max}}}{3\sigma_{zz_{max}}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{(2)(20833,4)(10^3)}{(3)(200)}\right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow B = 41,1mm$$

- Dimensionamento à flecha máxima

  Do diagrama, tem-se que a flexa máxima ocorre em $x = \frac{L}{2}$. O valor da deflexão linear máxima é dado por,

$$EI_z v(x = \frac{L}{2}) = -q_0 \frac{(\frac{L}{2})^4}{24} + q_0 L \frac{(\frac{L}{2})^3}{12} - q_0 L^2 \frac{(\frac{L}{2})^2}{24} = -q_0 \frac{L^4}{384} \rightarrow v_{\max} = -q_0 \frac{L^4}{384 E I_z}$$

  Igualando o módulo deste resultado com a expressão da flexa máxima admissível, tem-se,

$$\frac{L}{1000} = q_0 \frac{L^4}{384 E I_z} \rightarrow I_z = 1000 q_0 \frac{L^3}{384 E}$$

  Substituindo a expressão para I_z em função de B, obtém-se,

$$I_z = \frac{9}{4} B^4 = 1000 q_0 \frac{L^3}{384 E} \rightarrow B = 29,16mm$$

Desta maneira, observa-se que, para este caso, deve-se tomar o valor da altura da seção dado pelo dimensionamento à tensão, ou seja, $B = 41,1mm$.