Considere o eixo ilustrado na Figura 1 de seção circular com diâmetro d submetido ao carregamento indicado. Pede-se: a) determinar o diâmetro mínimo d para que o eixo permaneça na fase elástica; b) determinar a equação do ângulo de torção; c) suponha agora que a seção do eixo seja circular vazada com diâmetros interno d_i e externo d_e, com $d_i/d_e = 0,8$. Pede-se determinar os diâmetros d_i e d_e; d) para esta nova seção, determinar a equação do ângulo de torção; e) baseado nos resultados obtidos, determinar qual eixo é mais pesado e qual sofre a maior rotação. Dados: $L = 2m$, $M_t = 1000Nm$, $\bar{\tau} = 50MPa$, $G = 80GPa$, $t_o = 1600Nm/m$.

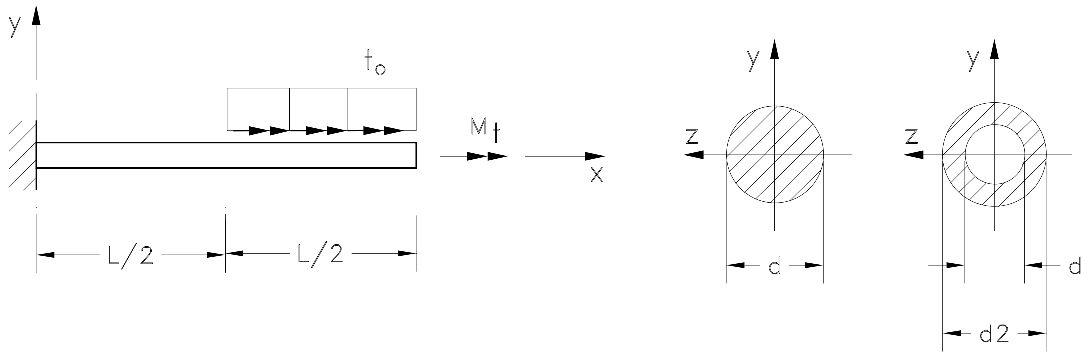


Figura 1: Eixo com seções circulares cheia e vazada.

1. Equação do carregamento: $t(x) = t_0 < x - \frac{L}{2} >^0$

2. Condições de contorno: $\theta(x = 0) = 0 \qquad M_x(x = L) = M_t$

3. Integração da equação diferencial: $GI_p \frac{d^2\theta}{dx^2} = -t(x) = -t_0 < x - \frac{L}{2} >^0$

   - 1^a integração: momento torçor
     $M_x(x) = GI_p \frac{d\theta(x)}{dx} = -t_0 < x - \frac{L}{2} >^1 + C_1$
   - 2^a integração: ângulo de torção
     $GI_p\theta(x) = -\frac{t_0}{2} < x - \frac{L}{2} >^2 + C_1 x + C_2$

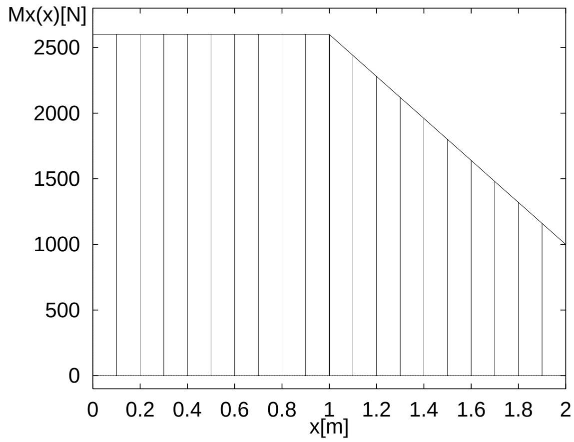
4. Determinação das constantes de integração
   $GI_p\theta(x = 0) = (0) + C_1(0) + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$
   $M_x(x = L) = -t_0 < L - \frac{L}{2} >^1 + C_1 = M_t \rightarrow C_1 = M_t + t_0\frac{L}{2}$

5. Equações finais

   - momento torçor
     $M_x(x) = -t_0 < x - \frac{L}{2} >^1 + M_t + t_0\frac{L}{2} = -1600 < x - 1 >^1 + 2600$
   - ângulo de torção
     $\theta(x) = \frac{1}{GI_p}(-\frac{t_0}{2} < x - \frac{L}{2} >^2 + M_t + t_0\frac{L}{2}x) = \frac{1}{GI_p}(-800 < x - 1 >^2 + 2600x)$

6. Diagrama do momento torçor
   $M_x(x \rightarrow 0^+) = 2600Nm \qquad M_x(x \rightarrow 1^-) = 2600Nm$

$M_x(x \rightarrow 1^+) = 2600Nm \qquad M_x(x \rightarrow 2^-) = 1000Nm$



7. Seção mais solicitada: $M_x(x \rightarrow 0^+) = 2600Nm$

8. Dimensionamento

   - Seção circular
     momento de inércia da seção: $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$
     dimensionamento a tensão: $\tau = (\frac{M_x}{I_p})(\frac{d}{2}) = M_x \frac{16}{\pi d^3} = \bar{\tau} \rightarrow d = (M_x \frac{16}{\pi \bar{\tau}})^{\frac{1}{3}} = 6,42cm$
   - Seção circular vazada (d_1, d_2= diâmetros interno e externo)
     dimensionamento a tensão: $\tau = (\frac{M_x}{I_p})(\frac{d_2}{2}) = \frac{M_x}{W_x} = \bar{\tau}$
     módulo de resistência à torção: $W_x = \frac{M_x}{\bar{\tau}} = 5,2 \times 10^{-5} m^3$

   Portanto,
   $W_x = \frac{I_p}{\frac{d_2}{2}} = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4)\frac{2}{d_2} = \frac{\pi}{16 d_2}(d_2^4 - d_1^4)$
   Por sua vez, a relação entre os diâmetros é dada por $\frac{d_1}{d_2} = 0,8$. Substituindo na expressão anterior vem que,
   $W_x = \frac{\pi}{16 d_2}[d_2^4 - (0,8 d_2)^4] = 5,2 \times 10^{-5}$
   Logo, $d_2 = 7,65cm$ e $d_1 = 6,12cm$.

9. Equação do ângulo de torção

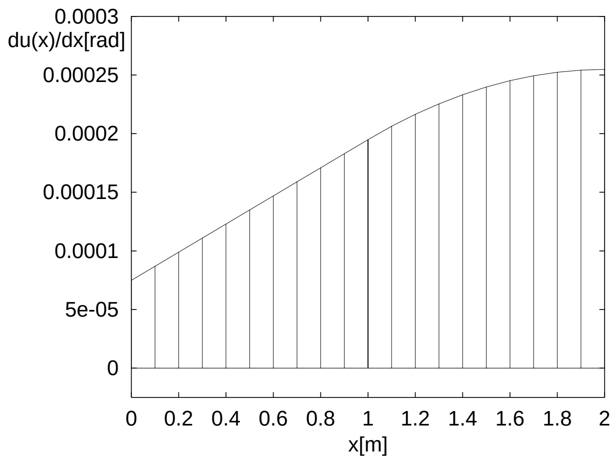
   - Seção circular
     momento de inércia: $I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32}(6,42 \times 10^{-2})^4 = 1,67 \times 10^{-6} m^4$

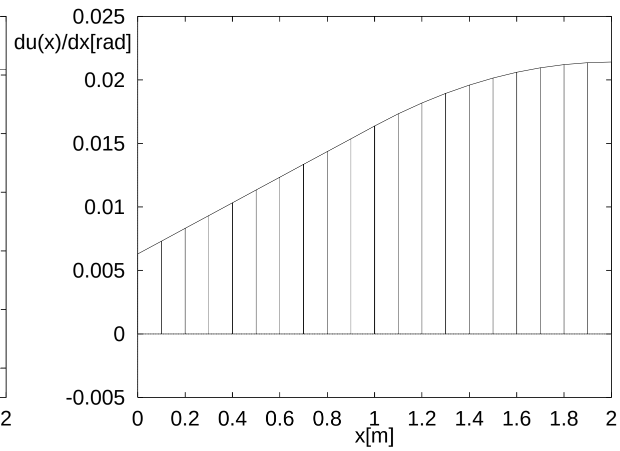
   Por sua vez, tem-se que $GI_p = 133422,78$. Logo,
   $\theta_c(x) = 7,49 \times 10^{-6}(-800 < x - 1 >^2 + 2600x)$

   - Seção circular vazada
     momento de inércia: $I_p = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4) = \frac{\pi}{32}[(7,65 \times 10^{-2})^4 - (6,12 \times 10^{-2})^4 = 1,98 \times 10^{-6} m^4$

   Neste caso, $GI_p = 158811,51$. Portanto,
   $\theta_v(x) = 6,30 \times 10^{-6}(-800 < x - 1 >^2 + 2600x)$

Abaixo ilustram-se os gráficos dos ângulos de torção para os casos de seção cheia e vazada.





10. Relação entre os pesos

As massas m_c e m_v dos eixos de seções circulares cheia e vazada são dadas, respectivamente, por $m_c = \rho V_c$ e $m_v = \rho V_v$, sendo ρ a densidade do material; V_c e V_v os volumes das seções. Desta maneira, a relação entre as massas é a seguinte,

$$\frac{m_c}{m_v} = \frac{V_c}{V_v} = \frac{L(\frac{\pi}{4})d^2}{L(\frac{\pi}{4})(d_2^2 - d_1^2)} = \frac{d^2}{(d_2^2 - d_1^2)} = \frac{6,42^2}{7,65^2 - 6,12^2} = 1,95$$

onde L é o comprimento dos eixos. Desta maneira, como esperado, a massa do eixo de seção cheia é superior a do eixo com seção vazada.

11. Relação entre as rotações

A partir das expressões para as rotações tem-se a seguinte relação:

$$\frac{\theta_c}{\theta_v} = \frac{7,49}{6,30} = 1,19$$

Assim, apesar da massa do eixo com seção cheia ser superior ao eixo vazado, a sua rotação é cerca de 20% superior.