EM505 - RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II
Profs. Euclides Mesquita Neto e Marco Lúcio Bittencourt
Exame - Data: 09/07/97

QUESTÃO 1 (Valor 3,0): Para a viga simplesmente apoiada e solicitada por um momento concentrado M_c aplicado na extremidade C, tal como mostrado na Figura 1, determine: a) a rotação θ_c no ponto de aplicação do momento através do princípio da conservação da energia; b) o deslocamento v_b no ponto central da viga utilizando o princípio das forças virtuais. Desconsidere a contribuição das tensões de cisalhamento nas deformações. Resolva o problema analiticamente.

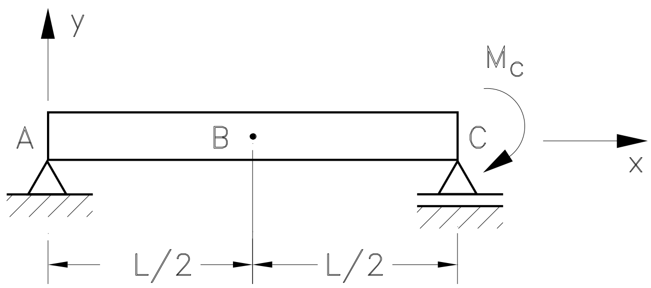

Figura 1: Questão 1.

Solução da questão 1:
Nesta questão, emprega-se o Método das Secções para a determinação dos esforços cortante e momento fletor na viga.

rotação no ponto C : a Figura 2 mostra o diagrama de corpo livre da viga, assim como o corte no trecho AC.

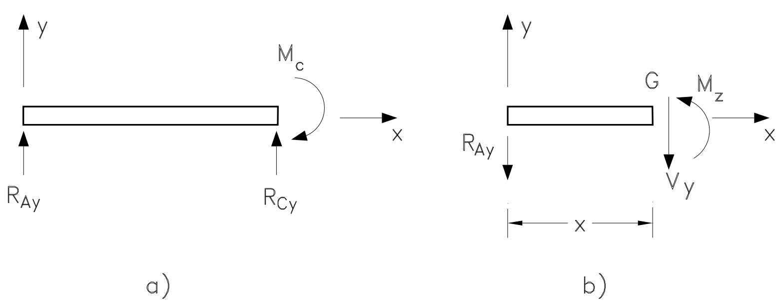

Figura 2: Viga: a) DCL; b) corte no trecho AC.

- Cálculo das reações de apoio

$$
\begin{array}{ll}
1)\sum F_y = 0: & R_{Ay} + R_{Cy} = 0 \rightarrow R_{Ay} = -R_{Cy} \\
2)\sum M_{zA} = 0: & R_{Cy}L - M_C = 0 \rightarrow R_{Cy} = \frac{M_C}{L} \rightarrow R_{Ay} = -\frac{M_C}{L}
\end{array}
$$

- Equilíbrio das secções

trecho AC $(0 < x < L)$:

$$1)\sum F_y = 0: \quad -R_{Ay} - V_y = 0 \rightarrow V_y = -\frac{M_C}{L} \rightarrow \begin{cases} V_y\left(x \rightarrow 0^+\right) = -\frac{M_C}{L} \\ V_y\left(x \rightarrow L^+\right) = -\frac{M_C}{L} \end{cases}$$

$$2)\sum M_{zG} = 0: \quad R_{Cy}x - M_z = 0 \rightarrow M_z = -\frac{M_C}{L}x \rightarrow \begin{cases} M_z\left(x \rightarrow 0^+\right) = 0 \\ M_z\left(x \rightarrow L^+\right) = -M_C \end{cases}$$

- Cálculo da energia de deformação

$$U = \frac{1}{2E}\int_0^L \frac{M_z^2(x)}{I_z(x)}dx = \frac{1}{2EI_z}\int_0^L \left(-\frac{M_C}{L}x\right)^2 dx$$

$$U = \frac{1}{2EI_z}\frac{M_C^2}{L^2}\int_0^L x^2 dx = \frac{M_C^2}{2EI_zL^2}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^L = \frac{M_C^2 L}{6EI_z}$$

- Aplicação do teorema da conservação da energia

$$W = U \rightarrow \frac{1}{2}M_C\theta_C = \frac{M_C^2 L}{6EI_Z} \rightarrow \theta_C = \frac{M_C L}{3EI_Z}$$

deflexão no ponto B : a Figura 3 mostra o diagrama de corpo livre do sistema auxiliar, assim como os cortes nos trechos AB e AC.

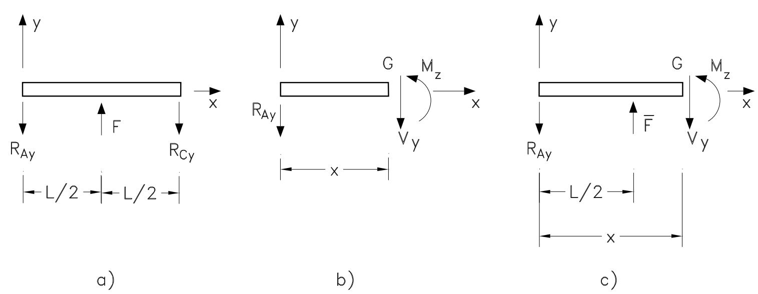

Figura 3: Sistema auxiliar: a) DCL; b) corte no trecho AB; c) corte no trecho BC.

- Cálculo das reações de apoio

$$1)\sum F_y = 0: \quad -R_{Ay} + \bar{F} - R_{Cy} = 0 \rightarrow R_{Ay} + R_{Cy} = \bar{F}$$
$$2)\sum M_{zA} = 0: \quad -F\frac{L}{2} + R_{Cy}L = 0 \rightarrow R_{Cy} = \frac{\bar{F}}{2} \rightarrow R_{Ay} = -\frac{\bar{F}}{2}$$

- Equilíbrio das secções

trecho AB $(0 < x < \frac{L}{2})$:

$$1)\sum F_y = 0: \quad -R_{Ay} - V_y = 0 \rightarrow V_y = -\frac{\bar{F}}{2} \rightarrow \begin{cases} V_y\left(x \rightarrow 0^+\right) = -\frac{\bar{F}}{2} \\ V_y\left(x \rightarrow L^-\right) = -\frac{\bar{F}}{2} \end{cases}$$

$$2)\sum M_{zG} = 0: \quad R_{Ay}x - M_z = 0 \rightarrow M_z = -R_{Ay}x - \frac{\bar{F}}{2}x \rightarrow \begin{cases} M_z\left(x \rightarrow 0^+\right) = 0 \\ M_z\left(x \rightarrow \frac{L}{2}^-\right) = -\frac{\bar{F}L}{4} \end{cases}$$

trecho BC ($\frac{L}{2} < x < L$):

$$1)\sum F_y = 0: \quad -R_{Ay} + \bar{F} - V_y = 0 \rightarrow V_y = -\frac{\bar{F}}{2} + \bar{F} \rightarrow V_y = \frac{\bar{F}}{2} \begin{cases} V_y\left(x \rightarrow \frac{L}{2}^+\right) = -\frac{\bar{F}}{2} \\ V_y\left(x \rightarrow L^-\right) = -\frac{\bar{F}}{2} \end{cases}$$

$$2)\sum M_{zG} = 0: \quad R_{Ay}x - \bar{F}\left(x - \frac{L}{2}\right) + M_z = 0 \rightarrow M_z = -\frac{\bar{F}}{2}x - \bar{F}x - \bar{F}\frac{L}{2}$$

$$M_z = \frac{\bar{F}}{2}(x - L) \rightarrow \begin{cases} M_z\left(x \rightarrow \frac{L}{2}^+\right) = -\frac{\bar{F}L}{4} \\ M_z\left(x \rightarrow L^-\right) = 0 \end{cases}$$

- Aplicação do Princípio das Forças Virtuais

$$\mu \bar{F} v_B = \mu \left[\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\bar{M}_z M_z(x)}{EI_z(x)} dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{\bar{M}_z M_z(x)}{EI_z(x)} dx\right]$$

$$\bar{F} v_B = \frac{1}{EI_z}\left[\int_0^{\frac{L}{2}} \left(-\frac{\bar{F}x}{2}\right)\left(-\frac{M_c}{L}x\right) dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \left(-\frac{\bar{F}}{2}(x-L)\right)\left(-\frac{M_c}{L}x\right) dx\right]$$

$$v_B = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{M_c}{2L}\int_0^{\frac{L}{2}} x^2 dx - \frac{M_c}{2L}\int_{\frac{L}{2}}^{L} x(x-L)\, dx\right]$$

$$v_B = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{M_c}{2L}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\frac{L}{2}} - \frac{M_c}{2L}\left.\left(\frac{x^3}{3} - L\frac{x^2}{2}\right)\right|_{\frac{L}{2}}^{L}\right]$$

$$v_B = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{M_c}{2L}\frac{L^3}{24} - \frac{M_c}{2L}\left(\frac{L^3}{3} - \frac{L^2}{2} - \frac{L^3}{3} + \frac{L^3}{8}\right)\right]$$

$$v_B = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{M_c L^2}{48} - \frac{M_c L^3}{2L}\left(\frac{8 - 12 - 1 + 3}{24}\right)\right]$$

$$v_B = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{M_c L^2}{48} - \frac{M_c L^3}{2L}\left(-\frac{2}{24}\right)\right] = \frac{1}{EI_z}\frac{3M_c L^2}{48} = \frac{M_c L^2}{16EI_z}$$

QUESTÃO 1 (Valor 2,5): Uma viga foi construída a partir de duas chapas de dimensão $H \times t$ e de dois perfis U, como mostrado na Figura 4a). A junção das peças é feita com rebites de diâmetro $d = 10,0mm$. Os rebites estão colocados exatamente na linha que cruza o centro geométrico y_1 do perfil U. Esta seção é utilizada na viga mostrada na Figura 4b), a qual está engastada numa extremidade e sujeita a uma força concentrada $F = 120kN$ na outra extremidade. Sabe-se que o material dos rebites suporta uma tensão máxima de cisalhamento $\tau_{max} = 35N/mm^2$. Sob estas condições, pede-se qual o espaçamento homogêneo L_d entre os rebites, como mostrado na Figura 4b). Dados: $H = 400mm$; $t = 15mm$. Dados geométricos do perfil U: distância da base até o centro geométrico da seção $y_1 = 14,5mm$; área da seção transversal do perfil $A = 35,4cm^2$; momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo furo dos rebites $I_{zz} = 83,24cm^4$. Desprezar a retirada de material causada pelo furo do rebite.

Solução da questão 2:

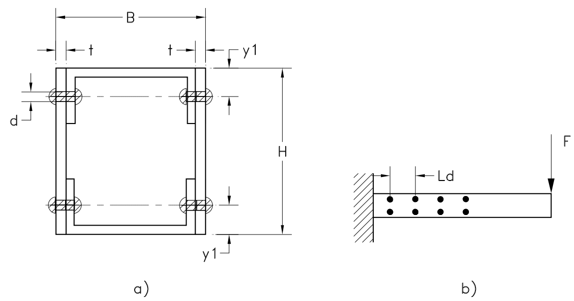

Figura 4: Questão 2: a) seção transversal; b) viga.

- Forca de cisalhamento que o rebite pode suportar (F_d) :

$$A_d = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}(1,0cm) = 0,7854cm^2$$

$$F_d = \tau_{\max}.A_d = 35\frac{N}{mm^2}\left(\frac{10mm}{1cm}\right)^2 0,7854cm^2 = 3500 \times 0,7854 = 2748,9N$$

- Cálculo do momento de inércia total (I_{zz}) da seção

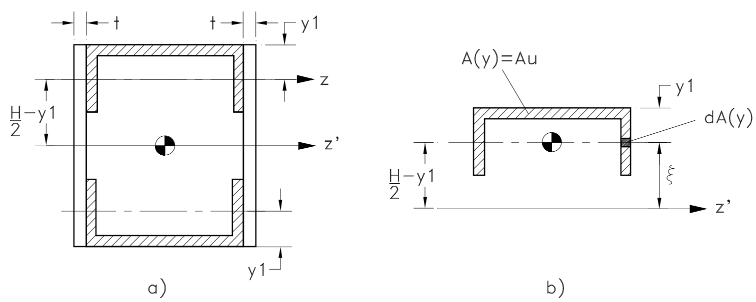

Figura 5: a) seção transversal; b) momento estático.

A Figura 5a) ilustra a seção transversal da viga com as dimensões necessárias para o cálculo do momento de inércia da seção. Observa-se que,

$$I_{zz} = 2 \times I_{zz_C} + \left[I_{zzu} + A_u\left(\frac{H}{2} - y_1\right)^2\right] \times 2$$

onde $I_{zz_C} = tH^3/12$ é o momento de inércia das chapas; I_{zzu} e A_u representam, respectivamente, o momento de inércia e a área da seção obtidos de uma tabela de perfis U. Logo,

$$I_{zz_T} = 2x\frac{(1,5cm)(40cm)^3}{12} + x2\left[83,24cm^4 + \left(35,4cm^2\right)(20cm - 1,45cm)^2\right]$$

$$I_{zz} = 2x8000cm^4 + x2\left[83,24cm^4 + (35,4)(18,55)^2\right]$$

$$I_{zz} = 16000cm^4 + 2x\left[83,24 + 12181,23\right]cm^4 = 40528,94cm^4$$

- Fluxo de cisalhamento (força por unidade de comprimento) atuando em um perfil U:

$$q_c = -\frac{V_y}{I_{zz}} Q_z(y)$$

onde $V_y = F = 120KN = 120000N$.

- Cálculo do momento estático de área

Aqui testa-se o desbalanceamento de força normal atuando em uma secçãodo perfil U, como ilustrado na Figura 5b). Portanto,

$$Q_z = \int_{A(y)} \xi dA(\xi) = \int_{A_u} \xi dA_u = \left(\frac{H}{2} - y_1\right) A_u$$

$$Q_z = \left(\frac{H}{2} - y_1\right) A_u = (20 - 1,45)\left(35,4cm^2\right) = Q_z = 656,67cm^3$$

- Fluxo de cizalhamento, em todo o perfil U

$$q_c = -\frac{F}{I_{zz}}.Q_z(y) = -\frac{120000N}{40528,94cm^4} 656,67cm^3 = 1944,3\frac{N}{cm}$$

Metade deste fluxo deve ser suportado pelos rebites fixos em cada lado. Fazendo o balanço de forças:

$$F_d = \frac{q_c}{2} L_D \rightarrow L_D = \frac{2F_D}{q_c} = \frac{2 \times 2748,9N}{1944,3\frac{N}{cm}} \rightarrow L_D = 2,828cm$$

QUESTÃO 3 (Valor 2,5): Uma chapa de aço foi submetida ao carregamento indicado na Figura 6a), sendo $\sigma_a = -50N/mm^2$ e $\sigma_b = 18N/mm^2$. São ainda conhecidos $L_a = 500mm$ e $L_b = 250mm$. O material falha para este carregamento segundo o critério da máxima energia de distorção. Neste caso, pede-se quais as componentes do tensor de tensão ao longo da diagonal da peça σ_c, σ_d, τ, como indicado na Figura 6a). Pede-se também qual o momento torçor máximo M_t que este material pode suportar, quando for aplicado a uma barra de seção circular de diâmetro $D = 22cm$ mostrada na Figura 6b).

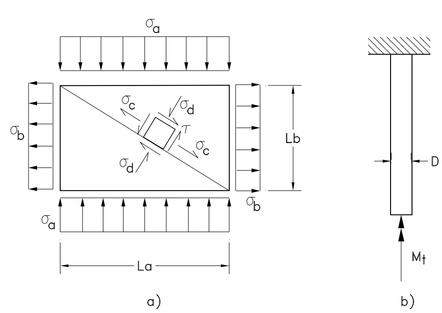

Figura 6: Questão 3: a) chapa solicitada; b) barra sob torção.

Solução da questão 3:

- Estado de tensão nos pontos da chapa: $\sigma_{xx} = \sigma_b = 18N/mm^2$; $\sigma_{yy} = \sigma_a = -50N/mm^2$; $\tau_{xy} = 0$. Tem-se então o seguinte tensor de tensões nos pontos da chapa,

$$[T] = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Componentes de tensão ao longo da diagonal

  O ângulo θ definido pela diagonal da chapa é dado por,

$$tg\theta = \frac{L_a}{L_b} = \frac{500}{250} = 2 \rightarrow \theta = 1,1011rad = 63,43^\circ$$

  Portanto,

$$\cos(2\theta) = -0,60 \qquad \sin(2\theta) = 0,80$$

  A partir daí, as componentes de tensão são calculadas como,

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \sigma'_{xx} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \frac{18 - 50}{2} + \left(\frac{18 + 50}{2}\right)(-0,60) + 0,80 \times 0 = -16 - 20,4 = -36,4N/mm^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \sigma'_{yy} = \sigma'_{xx}(\theta = \theta + 90^\circ) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \frac{18 - 50}{2} - \left(\frac{18 + 50}{2}\right)(-0,60) + 0,80 \times 0 = -16 + 20,4 = 4,4N/mm^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_{xy'} = -\frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ &= -\frac{(18 + 50)}{2}(0,80) + 0\,(-0,60) = -27,2N/mm^2 \end{aligned}$$

- Tensões principais: $\sigma_1 > \sigma_2, \sigma_3 = 0$

  Neste caso, o estado de tensão inicial na chapa está dado segundo as direções principais pois a tensão de cisalhamento é nula, restando apenas as componentes de tensão normal. Para comprovar tal fato, as tensões principais são dadas por,

$$\sigma_1 = a + R \qquad \sigma_2 = a - R$$

  onde,

$$a = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \frac{(18 - 50)}{2} = -16$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{18+50}{2}\right)^2 + 0} = 34$$

Susbtituindo os valores obtidos vem que,

$$\sigma_1 = a + R = -16 + 34 = 18N/mm^2$$

$$\sigma_2 = a - R = -16 - 34 = -50N/mm^2$$

A energia de distorção associada ao estado de tensão na placa é dada por,

$$U_{dist} = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right]$$

$$U_{dist} = \frac{1}{12G}\left[(68)^2 + (18)^2 + (50)^2\right] = \frac{7448}{12G} \quad (1)$$

- Tensão de cisalhamento no eixo

$$\tau = -\frac{M_t}{I_p}\frac{d}{2} = -\frac{M_t}{\frac{\pi d^4}{32}}\frac{d}{2} = -\frac{16M_t}{\pi d^3} = -\frac{16}{\pi\,(22)^2}M_t = -4,78 \times 10^{-4} M_t \left[N/mm^2\right] \quad (2)$$

As tensões principais neste estado de cisalhamento puro são $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = -\tau$ e $\sigma_3 = 0$. Por sua vez, a energia de distorção associada é dada por,

$$U_{dist} = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right]$$

$$U_{dist} = \frac{1}{12G}\left[(\tau + \tau)^2 + (-\tau - 0)^2 + (\tau - 0)^2\right]$$

$$U_{dist} = \frac{1}{12G}\left[4\tau^2 + \tau^2 + \tau^2\right] = \frac{6\tau^2}{12G} \quad (3)$$

Igualando as expressões (1) e (3) vem que,

$$\frac{7448}{12G} = \frac{6\tau^2}{12G} \rightarrow \tau = 35,23N/mm^2$$

Substituindo este valor de τ em (3), obtém-se o valor do momento torçor M_t,

$$35,23 = -4,78 \times 10^4 M_t \rightarrow M_t = 7,37 \times 10^4 Nmm = 73,7Nm$$

QUESTÃO 4 (Valor 2,0): Determine as forças normais (N_1,N_2) atuando em cada parte da coluna bi-engastada ilustrada na Figura 7 e sujeita a uma força $F = 1kN$. As seções transversais das barras são circulares com diâmetros $d_1 = 50mm$ e $d_2 = 125mm$. Dados: $L_1 = 300mm$; $L_2 = 400mm$; $E_1 = 1,5E_2$.

Solução da questão 4:

Para a solução deste problema, considera-se a os trechos AB e BC da barra, assim como o equilíbrio da interface entre os dois trechos, como ilustrado respectivamente nas Figuras 8a), c) e b).

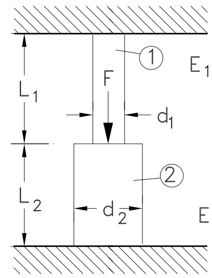

Figura 7: Questão 4.

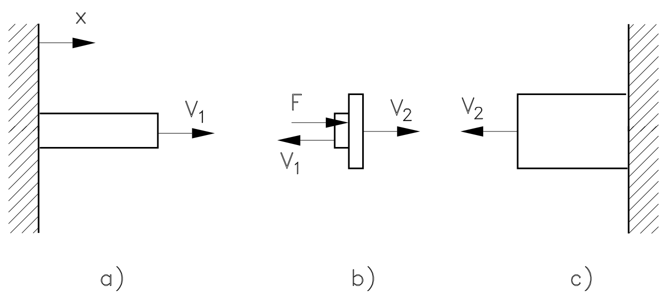

Figura 8: Barra: a) trecho AB; b) equilíbrio na interface; c) trecho BC.

Barra 1 ($0 < x < L_1$): neste caso tem-se como incógnitas as constantes de integração C_1, C_2, assim como a força normal N_1 interface dos dois trechos.

- Equação diferencial: $E_1 A_1 \frac{d^2 u_1}{dx^2} = 0$
- Condições de contorno
  $u_1\,(x = 0) = 0 \qquad N_{x1}\,(x = L_1) = N_1$
  - primeira integração: força normal
    $N_{x1} = C_1$
  - segunda integração: deslocamento axial
    $E_1 A_1 u_1 = C_1 x + C_2$
- Determinação de C_1 e C_2

$$N_{x1}\,(x = L_1) = C_1 = N_1 \rightarrow C_1 = N_1$$

$$E_1 A_1 u_1\,(x = 0) = C_1(0) + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

- Equações finais
  - força normal: $N_{x1}\,(x) = N_1$
  - deslocamento axial: $u_1\,(x) = \frac{N_1}{E_1 A_1} x$

Barra 2 ($L_1 < x < L_2$): neste caso tem-se como incógnitas as constantes de integração D_1, D_2, assim como a força normal N_2 interface dos dois trechos.

- Equação diferencial: $E_2 A_2 \frac{d^2 u_2}{dx^2} = 0$

- Condições de contorno
  $u_2\,(x = L_1 + L_2) = 0 \qquad N_{x2}\,(x = L_1) = N_2$
  - primeira integração: força normal
    $N_{x2} = D_1$
  - segunda integração: deslocamento axial
    $E_2A_2u_2 = D_1x + D_2$
- Determinação de D_1 e D_2

$$N_{x2}\,(x = L_1) = D_1 = N_2$$

$$E_2A_2u_2\,(x = L_1 + L_2) = D_1\,(L_1 + L_2) + D_2 = 0 \rightarrow D_2 = -N_2\,(L_1 + L_2)$$

- Equações finais
  - força normal: $N_{x2}\,(x) = N_2$
  - deslocamento axial: $u_2\,(x) = \frac{1}{E_2A_2}\,[N_2x - N_2\,(L_1 + L_2)]$

Equilíbrio da descontinuidade : onsidera-se o equilíbrio da força normal presente na interface dos trechos AB e BC, como mostrado na Figura 8b). A condição de equilíbrio é a seguinte:

$$\sum F_x = 0: \quad -N_1 + F + N_2 = 0 \rightarrow N_1 - N_2 = F \tag{4}$$

Condição de compatibilidade : tem-se que os deslocamentos axiais u_1 e u_2 devem ser iguais. Logo,

$$u_1\,(x = L_1) = u_2\,(x = L_1)$$

Tomando as equações anteriores determinadas para os deslocamentos u_1 e u_2, vem que,

$$\frac{N_1}{E_1A_1}L_1 = \frac{1}{E_2A_2}\,[N_2L_1 - N_2L_1 - N_2L_2]$$

$$N_1 = -\frac{E_1A_1}{E_2A_2}\frac{L_2}{L_1}N_2 = -kN_2 \tag{5}$$

Substituindo (5) em (4) vem que,

$$-kN_2 - N_2 = F \rightarrow N_2\,(1 + k) = -F \rightarrow N_2 = -\frac{F}{1 + k}$$

Logo,

$$N_1 = -k\left(-\frac{F}{1 + k}\right) \rightarrow N_1 = \frac{k}{1 + k}F$$

Calculando k, tem-se que,

$$k = \frac{E_1}{E_2}\frac{A_1}{A_2}\frac{L_2}{L_1} = \frac{1,5E_2}{E_2}\frac{\left(\frac{\pi}{4}d_1^2\right)}{\left(\frac{\pi}{4}d_2^2\right)}\frac{L_2}{L_1} = 1,5\frac{d_1^2}{d_2^2}\frac{L_2}{L_1} \rightarrow k = 1,5\frac{50^2}{125^2}\frac{400}{300} = 0,32$$

Portanto,

$$N_1 = \left(\frac{0,32}{1 + 0,32}\right)1 = 0,24KN$$

$$N_2 = \left(-\frac{1}{1 + 0,32}\right)1 = -0,76KN$$