

## 0.1 Vigas com Vários Materiais

Torna-se interessante estender a análise de flexão pura para vigas compostas de vários materiais. A Figura 1(a) ilustra uma seção retangular constituída de dois materiais com módulos de elasticidade  $E_1$  e  $E_2$ , tal que  $E_1 > E_2$ . Neste caso, a linha neutra não passa pelo centro de gravidade da seção transversal, estando a uma distância  $y_0$  do eixo  $z$  do sistema de referência e mais próxima do material com maior módulo de elasticidade  $E_1$ . Observa-se que as mesmas hipóteses cinemáticas anteriores continuam válidas, implicando numa variação linear da deformação normal  $\epsilon_{xx}(x)$  na seção transversal  $x$ , como indicado na Figura 1(b). Entretanto, a tensão num material seguindo a Lei de Hooke depende do módulo de elasticidade. Assim, apesar da deformação ser a mesma na interface dos materiais, as tensões são diferentes, pois dependem dos valores de  $E_1$  e  $E_2$ , como pode ser visto na Figura 1(c).

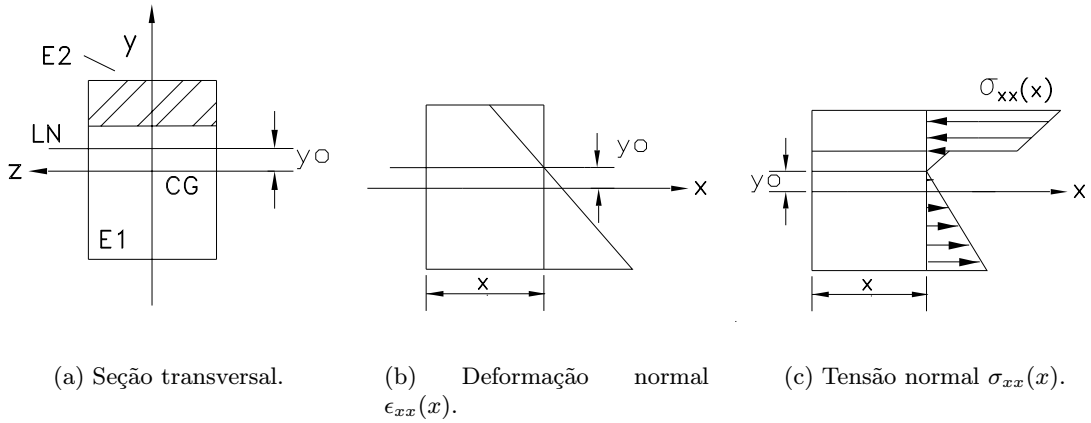


Figura 1: Viga com vários materiais.

Considere uma viga cuja seção transversal  $x$  é constituída por  $n$  materiais distintos. Seja  $E_i$  o módulo de Young para o  $i$ -ésimo material. Logo, a tensão  $\sigma_{xx_i}(x)$  no material  $i$  da seção  $x$  pode ser denotada de forma geral, a partir da Lei de Hooke (??), como

$$\sigma_{xx_i}(x) = E_i(x)\epsilon_{xx}(x) = -E_i(x)\frac{d^2v(x)}{dx^2}(y - y_0). \quad (1)$$

Observe que para  $y = y_0$ , tanto a tensão quanto a deformação são nulos indicando a linha neutra da seção  $x$ .

Para determinar a posição  $y_0$  da linha neutra, toma-se a condição que a resultante das forças na direção  $x$  é nula, pois forças axiais externas não são compatíveis num problema de flexão pura. Logo,

$$\sum F_x = 0.$$

A única força em  $x$  provem da distribuição de tensão normal  $\sigma_{xx}(x)$  nas seções transversais da viga. Portanto, da relação anterior vem que

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \int_A \sigma_{xx}(x) dA = 0.$$

Para o caso de  $n$  materiais a relação anterior se generaliza para

$$\sum_{i=1}^n \int_A \sigma_{xx_i}(x) dA = 0. \quad (2)$$

Substituindo (1) vem que

$$-\frac{d^2v(x)}{dx^2} \sum_{i=1}^n \int_A E_i(x)(y - y_0) dA = 0. \quad (3)$$

Considerando os dois materiais indicados na Figura 1(a), a expressão anterior pode ser reescrita como

$$-\frac{d^2v(x)}{dx^2} \left( \int_{A_1} E_1(x)(y - y_0) dA + \int_{A_2} E_2(x)(y - y_0) dA \right) = 0.$$

Expandindo a relação anterior vem que

$$-\frac{d^2v(x)}{dx^2} \left( E_1(x) \int_{A_1} y dA - E_1(x)y_0 \int_{A_1} dA + E_2(x) \int_{A_2} y dA - E_2(x)y_0 \int_{A_2} dA \right) = 0. \quad (4)$$

Denotando o momento estático em relação ao eixo  $z$  e a área da seção transversal  $x$  do material  $i$ , respectivamente, por

$$M_{sz_i}(x) = \int_{A_i} y dA, \quad (5)$$

$$A_i(x) = \int_{A_i} dA, \quad (6)$$

a expressão anterior é reescrita como

$$-\frac{d^2v(x)}{dx^2} [E_1(x)M_{sz_1}(x) + E_2(x)M_{sz_2}(x) - y_0(E_1(x)A_1(x) + E_2(x)A_2(x))] = 0.$$

Para que a expressão anterior seja válida para qualquer deslocamento transversal  $v(x)$ , o termo entre colchetes deve ser nulo, implicando que,

$$y_0 = \frac{E_1(x)M_{sz_1}(x) + E_2(x)M_{sz_2}(x)}{E_1(x)A_1(x) + E_2(x)A_2(x)}. \quad (7)$$

De forma geral, para  $n$  materiais, tem-se que a posição  $y_0$  da linha neutra é dada por

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^n E_i(x)M_{sz_i}(x)}{\sum_{i=1}^n E_i(x)A_i(x)} \quad (8)$$

Deseja-se agora obter uma relação para o termo  $\frac{d^2v(x)}{dx^2}$  em termos do momento fletor  $M_z(x)$ . No caso de  $n$  materiais, a expressão (1) para  $M_z(x)$  é generalizada como

$$M_z(x) = - \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \sigma_{xx_i}(x)y dA. \quad (9)$$

Para o caso de dois materiais, tem-se que

$$M_z(x) = - \left( \int_{A_1} \sigma_{xx_1}(x)y dA + \int_{A_2} \sigma_{xx_2}(x)y dA \right). \quad (10)$$

Substituindo a expressão (1) na relação anterior, tem-se que

$$\begin{aligned}
M_z(x) &= \frac{d^2v(x)}{dx^2} \left( \int_{A_1} E_1(x)(y - y_0)y \, dA + \int_{A_2} E_2(x)(y - y_0)y \, dA \right) \\
&= \frac{d^2v(x)}{dx^2} \left( E_1(x) \int_{A_1} y^2 \, dA - E_1(x)y_0 \int_{A_1} y \, dA + E_2(x) \int_{A_2} y^2 \, dA - E_2(x)y_0 \int_{A_2} y \, dA \right) \quad (11)
\end{aligned}$$

Denotando o momento de inércia da área relativa ao material  $i$  em relação ao eixo  $z$  do sistema de referência como

$$I_{z_i}(x) = \int_{A_i} y^2 \, dA, \quad (12)$$

e lembrando a equação (5) para o momento estático, a expressão anterior se simplifica para

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{E_1(x)I_{z_1}(x) + E_2(x)I_{z_2}(x) - y_0(E_1(x)M_{sz_1}(x) - E_2(x)M_{sz_2}(x))}. \quad (13)$$

Assim, para  $n$  materiais, a seguinte relação é válida,

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{\sum_{i=1}^n E_i(x)I_{z_i}(x) - y_0 \sum_{i=1}^n E_i(x)M_{sz_i}(x)}. \quad (14)$$

Substituindo a relação anterior na expressão de deformação

$$\epsilon_{xx}(x) = -\frac{d^2v(x)}{dx^2}(y - y_0) \quad (15)$$

obtem-se

$$\epsilon_{xx}(x) = -\frac{M_z(x)}{\sum_{i=1}^n E_i(x)I_{z_i}(x) - y_0 \sum_{i=1}^n E_i(x)M_{sz_i}(x)}(y - y_0) \quad (16)$$

A partir daí, a distribuição da tensão no material  $i$  é dada por,

$$\sigma_{xx_i}(x) = -\frac{M_z(x)}{I_{eq_i}(x)}(y - y_0), \quad (17)$$

sendo  $I_{eq_i}(x)$  o momento de inércia equivalente da área relativa ao material  $i$  da seção  $x$ , ou seja,

$$I_{eq_i}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n E_i(x)I_{z_i}(x) - y_0 \sum_{i=1}^n E_i(x)M_{sz_i}(x)}{E_i(x)}. \quad (18)$$

### 0.1.1 Exercícios resolvidos

**Exercício 0.1** A Figura 2 ilustra uma viga submetida a uma carga distribuída e com seção transversal de madeira e aço como indicado. Pedem-se: a) determinar a posição da linha neutra; b) as distribuições de deformação e c) tensão. Dados:  $L = 2m$ ,  $q_0 = 200N/m$ ,  $E_1 = 10GPa$  e  $E_2 = 200GPa$ .

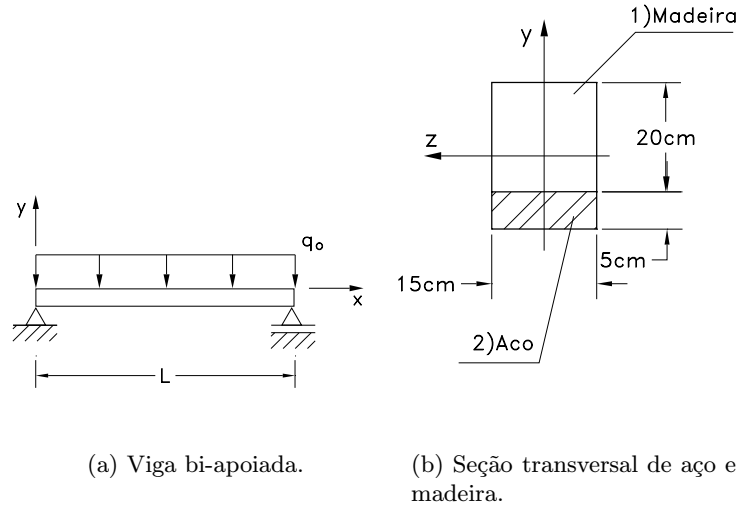


Figura 2: Viga com seção transversal de aço e madeira.

1. cálculo da posição da linha neutra

A Figura 2(a) mostra a seção transversal da viga com a indicação das posições do CG das partes de aço e madeira. A partir daí, a posição da linha neutra é determinada através de

$$y_0 = \frac{E_1 M_{sz_1} + E_2 M_{sz_2}}{E_1 A_1 + E_2 A_2},$$

sendo

$$\begin{aligned} E_1 M_{sz_1} &= (10 \times 10^9)(0,15)(0,20)(0,15 - 0,125) = 7,5 \times 10^6 Nm, \\ E_2 M_{sz_2} &= (200 \times 10^9)(0,15)(0,05)(0,025 - 0,125) = -150,0 \times 10^6 Nm, \\ E_1 A_1 &= (10 \times 10^9)(0,15)(0,20) = 300,0 \times 10^6 N, \\ E_2 A_2 &= (200 \times 10^9)(0,15)(0,05) = 1500,0 \times 10^6 N. \end{aligned}$$

Substituindo os valores na expressão anterior, obtém-se

$$y_0 = -0,0792m = 7,92cm.$$

A nova posição da linha neutra está ilustrada na Figura 3(a).

2. cálculo da deformação

A seção mais solicitada ocorre em  $x = \frac{L}{2}$ , onde o momento fletor é  $M_z = \frac{3}{8}q_0L^2$ . Para  $q_0 = 200N/m$  e  $L = 2m$ , tem-se  $M_z = 300Nm$ . A deformação  $\epsilon_{xx}$  é dada pela seguinte expressão

$$\epsilon_{xx} = -\frac{M_z}{E_1 I_{z_1} + E_2 I_{z_2}} (y - y_0).$$

Os momentos de inércia  $I_{z_1}$  e  $I_{z_2}$  das partes de madeira e aço em relação ao CG da seção são calculados empregando-se o teorema dos eixos paralelos, ou seja,

$$I_{z_1} = \frac{(0,15)(0,20)^3}{12} + (0,15)(0,20)(0,15 - 0,125)^2 = 1,1875 \times 10^{-4} m^4,$$

$$I_{z_2} = \frac{(0,15)(0,05)^3}{12} + (0,15)(0,05)(0,025 - 0,125)^2 = 7,6563 \times 10^{-5} m^4.$$

Portanto, a deformação é dada por

$$\epsilon_{xx} = -\frac{300}{(10 \times 10^9)(1,1875 \times 10^{-4}) + (200 \times 10^9)(7,6563 \times 10^{-5})} (y - y_0)$$

$$= -1,82 \times 10^{-5} (y - y_0),$$

estando ilustrada na Figura 3(b). Observe que a deformação é contínua e varia linearmente ao longo da seção da viga.

### 3. cálculo da distribuição de tensão

A distribuição de tensão na parte de madeira é determinada por

$$\sigma_{xx_1} = E_1 \epsilon_{xx} = -1,82 \times 10^5 (y - y_0)$$

$$= \begin{cases} -3,72 \times 10^4 N/m^2 & (y - y_0) = (0,125 - (-0,0792))m \\ -7,64 \times 10^2 N/m^2 & (y - y_0) = (-0,075 - (-0,0792))m \end{cases}.$$

Por sua vez, a tensão na parte de aço é dada por

$$\sigma_{xx_2} = E_2 \epsilon_{xx} = -3,64 \times 10^6 (y - y_0)$$

$$= \begin{cases} -1,53 \times 10^4 N/m^2 & y = (-0,075 - (-0,0792)) \\ 1,67 \times 10^5 N/m^2 & y = (-0,125 - (-0,0792)) \end{cases}.$$

A Figuras 3(c) indica a distribuição de tensão na seção transversal da viga. Como observado anteriormente, a tensão é descontínua na interface dos dois materiais.

□

**Exercício 0.2** Deseja-se projetar uma peça de um equipamento mecânico para exercer uma função cujos vínculos e carregamentos podem ser modelados tal como mostrado na Figura 4(a). O material do qual a peça deve ser feita é uma resina plástica. Os resultados de um teste de tração e compressão axial feitos com esta resina plástica podem ser vistos na Figura 4(b). O que fica evidente neste ensaio é que os limites de tensão para os quais o material plástico ( $p$ ) apresenta comportamento elástico linear na tração ( $\sigma_{pt}$ ) e na compressão ( $\sigma_{pc}$ ) são distintos. Como a peça será produzida em grande escala, seu projeto deverá ser aprimorado de forma que quando submetida ao carregamento máximo, as tensões de tração e de compressão atinjam seus limites elásticos ao mesmo tempo. Para tal dispõe-se de fios de aço que serão colocados na parte inferior da viga, a uma distância  $d_A$  do centro geométrico (CG) da seção, ver Figura 4(c). A seção transversal de cada um destes fios, designadas  $A_{1a}$ , tem uma área de  $2mm^2$  ( $A_{1a} = 2mm^2$ ). O material do qual os fios de aço são feitos tem um módulo de Young  $E_a = 1400kN/mm^2$ .

Deseja-se saber:

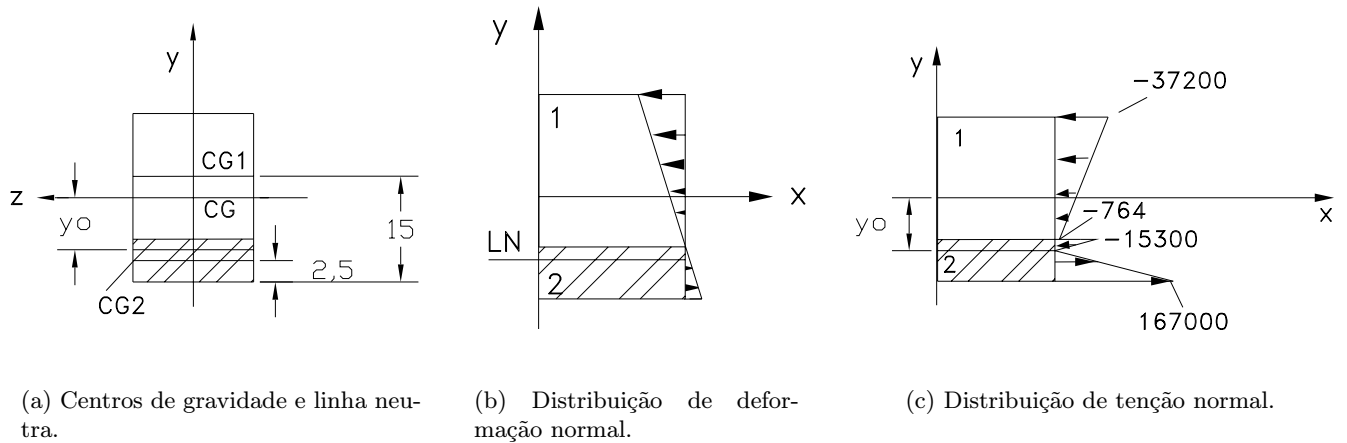


Figura 3: Viga com seção transversal de aço e madeira.

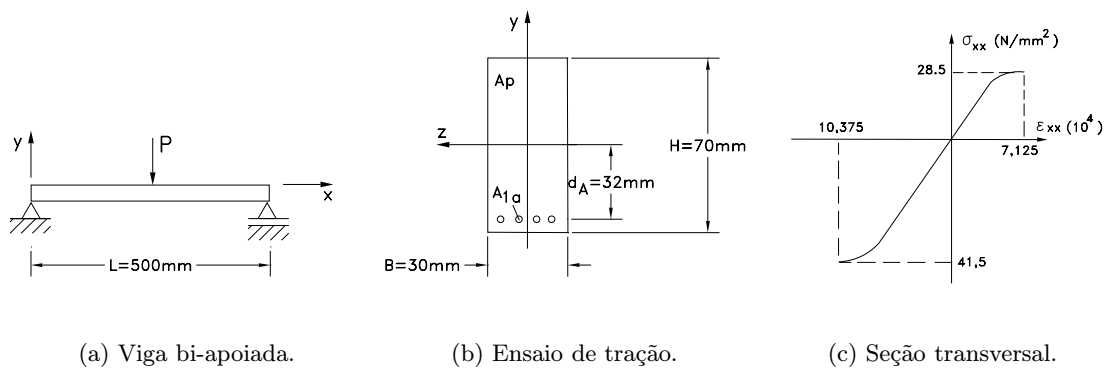


Figura 4: Viga com seção de resina plástica.

1. quantos fios de aço deverão ser colocados na peça de plástico para que os valores limites das tensões  $\sigma_{pt}$  e  $\sigma_{pc}$  sejam atingidos simultaneamente?
2. sob esta circunstância, determine qual o momento máximo ( $M_{max}$ ) que a peça pode suportar.
3. quais as tensões normais máximas ( $\sigma_{at}$ ) que os fios de aço deverão suportar?
4. quais são as tensões de cisalhamento ( $\tau_a$ ) máximas que ocorrem na interface aço/plástico? Determinar o fluxo de cisalhamento máximo ( $q_{ca}$ ) atuando em um fio de aço.

**Solução:**

1. Inicialmente, determina-se a posição  $y_0$  da linha neutra. Do enunciado do problema, tem-se que as tensões normais máxima e mínima são iguais, respectivamente, aos valores limites de tração  $\sigma_{pt} = 28,5 \text{ N/mm}^2$  e compressão  $\sigma_{pc} = 41,5 \text{ N/mm}^2$ . A partir da Figura 5(b), tem-se por semelhança de triângulos retângulos

$$\frac{\sigma_{pt}}{b} = \frac{\sigma_{pc}}{a} \quad e \quad a + b = 70.$$

Resolvendo as duas expressões anteriores, obtem-se  $a = 41,5\text{mm}$  e  $b = 28,5\text{mm}$ . Logo,  $|y_0| = |\frac{H}{2} - b| = |35 - 28,5| = 6,5\text{mm}$ . De acordo com a referência adotada, tem-se,  $y_0 = -6,5\text{mm}$ .

A partir daí, emprega-se a expressão para calcular a posição da linha neutra, ou seja,

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^2 E_i M_{sz_i}}{\sum E_i A_i} = \frac{E_a M_{sz_a} + E_p M_{sz_p}}{E_a A_a + E_p A_p}, \quad (19)$$

sendo o momento estático  $M_{sz_a}$  e área  $A_a$  dos fios de aço incógnitas dadas em função do número  $n$  de fios de aço.

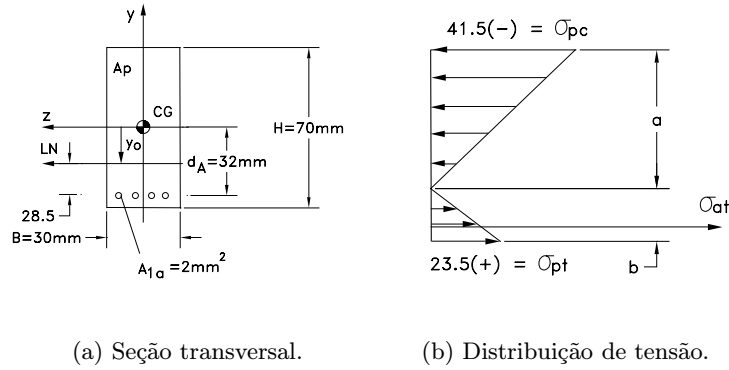


Figura 5: Distribuição de tensão na seção.

Sendo  $A_{1a} = 2\text{mm}^2$  a área da seção transversal de cada fio de aço e  $n$  o número de fios, as seguintes expressões são válidas

$$\begin{aligned} A_a &= nA_{1a} = 2n \text{ mm}^2, \\ M_{sz_a} &= ndAA_{1a} = n(-32)(2) = -64n \text{ mm}^3, \\ A_p &= BH - A_a = 3070 - 2n = (2100 - 2n) \text{ mm}^2, \\ M_{sz_p} &= -M_{sz_a} = 64n \text{ mm}^3, \\ E_a &= 1400 \text{ KN/mm}^2, \\ E_p &= 40 \text{ KN/mm}^2. \end{aligned}$$

Substituindo as relações anteriores em (??) e resolvendo para  $n$ , vem que

$$-6,5 = \frac{1400 \times 10^3(-64n) + 40 \times 10^3(64n)}{1400 \times 10^3(2n) + 40 \times 10^3(2100 - n^2)} \rightarrow n = 7,87.$$

Logo, o número mínimo de fios que satisfaz o problema é  $n = 8$ .

2. A tensão normal na flexão pura é dada por  $\sigma_{xx} = -\frac{M_z}{I_z}y$ . Logo, o momento máximo  $M_z^{\max}$  suportado pela seção é função da tensão máxima no material plástico  $\sigma_{xx}^{\max} = \sigma_{xx}^p(y = y^{\max})$  com  $y^{\max} = 35\text{mm}$ .

Para uma seção composta de dois materiais, a tensão no material  $i$  é dada por

$$\sigma_{xx}^i(y) = -\frac{M_z E_i (y - y_0)}{\sum E_i I_i - y_0 \sum E_i M_{sz_i}} = -\frac{M_z}{I_{eq_i}} (y - y_0), \quad (20)$$

sendo o momento de inércia equivalente  $I_{eq_i}$  da porção relativa ao material  $i$  dada por

$$I_{eq_i} = \frac{\sum E_i I_i - y_0 \sum E_i M_{sz_i}}{E_i} \quad (21)$$

As grandezas  $A_a, A_p, M_{sz_a}, M_{sz_p}, I_a, I_p$  são calculada por

$$\begin{aligned} A_a &= 2(n) = 16mm^2 & A_p &= 2100 - 16 = 2084mm^4 \\ M_{sz_a} &= (-32)16 = -512mm^3 & M_{sz_p} &= -M_{sz_a} = +512mm^3 \\ I_a &\approx A_a d A^2 = 16(32)^2 = 16384mm^4 & I_p &= \frac{B(H)^3}{12} - I_a = 841116mm^4 \end{aligned}$$

Observa-se que para o cálculo de  $I_a$ , emprega-se o teorema dos eixos paralelos, desprezando a parcela relativa ao momento de inércia dos fios de aço em relação ao centróide, pois o diâmetro dos fios é de apenas 2mm. Além disso, tem-se que

$$\begin{aligned} \sum E_i M_{sz_i} &= 1400 \times 10^3(-512) + 40 \times 10^3(512) = -6,963 \times 10^5 kNmm, \\ \sum E_i I_i &= 1400 \times 10^3(16384) + 40 \times 10^3(841116) = 5,658 \times 10^7 kNmm^2. \end{aligned}$$

Logo, substituindo os valores anteriores em (21) para o material plástico  $i = p$  vem que,

$$I_{eq_p} = \frac{5,658 \times 10^7 - (-6,963)(-6,963 \times 10^5)}{40} = 1,301 \times 10^6 mm^4.$$

Verifica-se que  $\sigma_{xx}^{\max} = \sigma_{xx}^p(y = 35mm) = -41,5kN/mm^2$  e a partir de (20)

$$\sigma_{xx}^{\max} = -41,5 = -\frac{M^{\max}(41,5)}{1,301 \times 10^6} \rightarrow M^{\max} = 1,301 \times 10^6 Nmm.$$

Por sua vez, o momento máximo ocorre em  $x = L/2$ , possibilitando calcular a força máxima  $P^{\max}$  aplicada na viga da seguinte forma

$$M^{\max} = \frac{L}{4} P^{\max} \rightarrow P^{\max} = \frac{4}{L} M^{\max} = 10,41kN. \quad (22)$$

3. A tensão máxima nos fios de aço é determinada através de (20) com  $i = a$ . Logo,

$$\sigma_{xx}^a(y) = -\frac{M_z}{I_{eq_a}}(y - y_0) \quad (23)$$

sendo

$$I_{eq_a} = \frac{\sum E_i I_i - y_0 \sum E_i M_{sz_i}}{E_a} = I_{eq_p} \frac{E_p}{E_a}.$$

Substituindo os valores, tem-se

$$I_{eq_a} = 1,301 \times 10^6 \frac{40}{1400} = 37,17 \times 10^3 mm^4.$$

No casos dos fios de aço, a tensão máxima ocorre para  $y = -32mm$ . Assim, a partir de (23)

$$\sigma_{xx}^a(y = -32) = -\frac{-1,301 \times 10^6}{37,17 \times 10^3}(-32 + 6,5) = 892,5N/mm^2.$$

Verifica-se então que a tensão máxima nos fios de aço é cerca de 40 vezes maior que a tensão máxima no material plástico.



4. O fluxo de cisalhamento para um fio de aço é dado pela seguinte expressão

$$q_{c_a} = -\frac{V_y}{I_{eq_a}} M_{sz_{1a}}, \quad (24)$$

sendo  $I_{eq_a}$  o momento de inércia equivalente da parte de aço e  $M_{sz_{1a}}$  o momento estático de um fio de aço, o qual deve ser calculado agora em relação a linha neutra pois esta não mais coincide com o eixo  $z$  no caso de uma viga de material composto. Assim, tem-se que

$$M_{sz_{1a}} = A_{1a} (dA - y_0) = 2[-32 - (-6.5)] = -51mm^2$$

A força cortante máxima para uma viga bi-apoiada como uma força concentrada  $P^{\max}$  no centro é dada por

$$V_y^{\max} = \frac{P^{\max}}{2} = 5,205kN.$$

Logo, o fluxo de cisalhamento é calculado como

$$q_{c_a} = -\frac{(5,205)(-51)}{37,17 \times 10^3} = 7,142Nmm$$

O raio de cada furo é dado por

$$A_{1a} = \pi R^2 \rightarrow R = 0,8mm.$$

A área do fio de aço que está em contato com a parte plástica por unidade de comprimento da viga é corresponde a área de um cilindro

$$A = 2\pi RL = 2\pi(0,8)(1) = 5,08mm^2.$$

Assim, a tensão de cisalhamento média é calculada como

$$\tau_{medio} = \frac{q_{c_a}}{A} = \frac{7,142}{5,08} = 1,406N/mm^2.$$

□