Apêndice B

VETORES

B.1 Espaços Pontuais e Vetoriais

O *espaço geométrico* em consideração no estudo da mecânica do contínuo será sempre o *espaço euclidiano tridimensional* $\mathcal{E}$, sendo seus elementos denominados *pontos*. Como, intuitivamente, a soma de dois pontos não possui significado algum, o espaço $\mathcal{E}$ não é um espaço vetorial (vide definição de espaço vetorial a seguir). Entretanto, a diferença entre dois pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pode ser definida como sendo um *vetor*, ou seja,

$$\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{x} \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}. \tag{B.1}$$

$\mathbf{v}$ é um elemento de um *espaço vetorial* associado a $\mathcal{E}$, como mostrado na Figura B.1 para uma região $\mathcal{B}$ de $\mathcal{E}$. O espaço vetorial formado por todas as diferenças entre pontos pertencentes a $\mathcal{E}$ será chamado de espaço vetorial (real) $\mathcal{V}$ ($\mathcal{V} \equiv \Re^3$). Da mesma forma, a soma entre um ponto e um vetor, será definida como um novo *ponto*, i.e.,

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{v} \qquad \mathbf{x} \in \mathcal{E}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V} \tag{B.2}$$

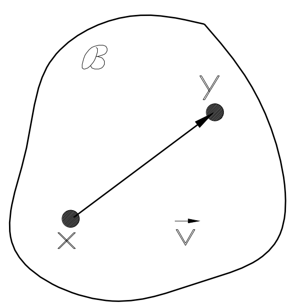


Figura B.1: Pontos e vetores numa região $\mathcal{B}$ do espaço euclidiano.

Um espaço vetorial é um conjunto de elementos no qual as operações básicas de soma e multiplicação por escalar estão definidas, isto é,

$$\begin{cases} \mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathcal{V} & \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} \\ \alpha\mathbf{v} \in \mathcal{V} & \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad \alpha \in \Re \end{cases} \tag{B.3}$$

Exemplo B.1 *O conjunto* $\mathcal{V} \equiv \Re^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \Re\}$ *é um espaço vetorial quando as operações de soma e multiplicação por escalar são definidas de forma usual, i.e., dados* $\mathbf{v} = (x_1, y_1, z_1)$ *e* $\mathbf{w} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2);$$
$$\alpha\mathbf{v} = \alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1).$$

□

Exemplo B.2 *O conjunto* $P_n = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n; a_i \in \Re\}$ *de todos os polinômios de grau* $\leq n$ *é um espaço vetorial se considerarmos as operações usuais de soma entre polinômios e multiplicação destes por constantes, ou seja,*

$$(p_1 + p_2)(t) = p_1(t) + p_2(t);$$
$$(\alpha p_1)(t) = \alpha p_1(t).$$

□

Em adição às operações básicas de soma e multiplicação por escalar, o espaço $\mathcal{V}$ possui ainda a operação de *produto interno*, denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, associando a um par de elementos de $\mathcal{V}$, um escalar α, ou seja,

$$\begin{aligned} \langle \ , \ \rangle : \quad & \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \Re \\ & \mathbf{u}, \mathbf{v} \longrightarrow \alpha = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \end{aligned} \tag{B.4}$$

de modo a respeitar as seguintes propriedades:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle ; \tag{B.5}$$

$$\langle a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle = a_1 \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle + a_2 \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle ; \tag{B.6}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0; \tag{B.7}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \qquad \text{se e somente se } \mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{B.8}$$

A partir dessas propriedades, diferentes tipos de produtos internos podem ser definidos[1]. Entretanto, o produto interno usual em $\mathcal{V}$, denominado produto escalar e denotado como $(\cdot, \cdot)$, é definido por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i = u_i v_i. \tag{B.9}$$

Exemplo B.3 *No espaço vetorial* $V = \Re^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \Re\}$, *a operação que associa a cada par de vetores* $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ *e* $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ *o escalar* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3x_1 x_2 + 4y_1 y_2$ *é um produto interno. De fato:*

- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3x_1 x_2 + 4y_1 y_2 = 3x_2 x_1 + 4y_2 y_1 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$;
- *Se* $\mathbf{w} = (x_3, y_3)$, *então:* $\langle a_1 \mathbf{u} + a_2 \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 3(a_1 x_1 + a_2 x_2) x_3 + 4(a_1 y_1 + a_2 y_2) y_3 = a_1(3x_1 x_3 + 4y_1 y_3) + a_2(3x_2 x_3 + 4y_2 y_3) = a_1 \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + a_2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$;
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 3x_1 x_1 + 4y_1 y_1 = 3x_1^2 + 4y_1^2 > 0$;
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Longrightarrow 3x_1^2 + 4y_1^2 = 0 \Longrightarrow x_1 = y_1 = 0$ *e portanto* $\mathbf{u} = (0, 0) = \mathbf{0}$.

□

[1] Em certos problemas pode ser conveniente definir outros tipos de produtos internos, como será visto posteriormente.

O módulo ou comprimento de um vetor $\mathbf{v}$ pode ser obtido calculando-se a sua *norma* a qual é definida por

$$\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}.$$

Dessa forma, o produto escalar dado pela relação B.9 pode ser escrito em termos das normas dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ da seguinte maneira:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos\theta \qquad 0 \leq \theta \leq \pi, \tag{B.10}$$

sendo θ o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Quando o produto interno entre dois vetores é nulo, diz-se que os mesmos são ortogonais, denotando-se,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Longrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v}. \tag{B.11}$$

Exemplo B.4 *Considere o produto escalar do* $\Re^3$*. Determinemos o ângulo entre os vetores* $\mathbf{u} = (2, 1, -5)$ *e* $\mathbf{v} = (5, 0, 2)$.

Solução*: Calulemos as normas de* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *e o produto escalar entre esses dois vetores.*
$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{30}$;
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$;
$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2(5) + 1(0) - 5(2) = 0$.
O ângulo entre $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *é dado por*

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} = \frac{0}{\sqrt{30}\sqrt{29}} = 0 \qquad e\ portanto \theta = \frac{\pi}{2}$$

Observa-se que se $\theta = \frac{\pi}{2}$ *então* $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.□

Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e $\mathcal{W}$ um subconjunto não vazio $\mathcal{V}$. O subconjunto $\mathcal{W}$ é denominado um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ se $\mathcal{W}$ é um espaço vetorial em relação às operações de adição e multiplicação por escalar definidas em $\mathcal{V}$. De forma concisa, é possível identificar subespaços vetoriais da seguinte maneira:

$$\mathcal{W} \qquad \text{é um subespaço de} \mathcal{V} \iff \begin{array}{l} (i)\ \mathbf{0} \in \mathcal{W}, \\ (ii)\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{W} \Longrightarrow \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \in \mathcal{W} \quad \forall \alpha, \beta \in \Re. \end{array} \tag{B.12}$$

Assim, a partir da definição de ortogonalidade entre vetores, pode-se escrever

$$\{\mathbf{v}\}^{\perp} = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0\} \tag{B.13}$$

para o subespaço de $\mathcal{V}$ consistindo de todos os vetores perpendiculares a $\mathbf{v}$.

Exemplo B.5 *Sejam* $\mathcal{V} \equiv \Re^3$ *e* $S = \{(x, y, z) \mid ax + by + cz = 0; x, y, z \in \Re\}$*, um plano qualquer passando pela origem. Verifiquemos que* S *é um subespaço vetorial de* $\Re^3$*. Com efeito, tomemos* $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ *e* $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2) \in S$*. Isso implica que*

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = 0;$$
$$ax_2 + by_2 + cz_2 = 0.$$

Somando essas duas igualdades temos

$$a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) = 0,$$

o que mostra que

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in S$$

uma vez que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ *satisfaz a equação* $ax + by + cz = 0$.

Por outro lado,

$$\alpha\mathbf{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \in S$$

pois, se $ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$ *então*

$$a(\alpha x_1) + b(\alpha y_1) + c(\alpha z_1) = \alpha 0 = 0,$$

mostrando que $\alpha\mathbf{u}$ *satisfaz a equação* $ax + by + cz = 0$. *Logo,* S *é um subespaço vetorial de* $\Re^3$.$\square$

A partir das operações básicas que caracterizam o espaço vetorial $\mathcal{V}$, é imediato definir o conceito de *combinação linear* de vetores,

$$\mathbf{w} = \sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i \qquad \mathbf{v}_i \in \mathcal{V}, \quad \alpha_i \in \Re \tag{B.14}$$

sendo $\mathbf{w}$ descrito pela combinação dos vetores $\mathbf{v}_i$.

Um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_i\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é dito linearmente independente se a combinação linear,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \tag{B.15}$$

é válida se e somente se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$. Caso contrário, o conjunto de vetores é dito *linearmente dependente*, ou seja, a condição (B.15) se verifica para algum $\alpha_i \neq 0$.

Exemplo B.6 *Sejam* $\mathbf{u} = (1, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$ *e* $\mathbf{w} = (7, -4, 1)$ *vetores do* $\Re^3$. *Mostremos que esses vetores são linearmente dependentes.*

Façamos uma combinação linear desses vetores e igual ao vetor nulo, usando como incógnitas os escalares α, β *e* γ. *Assim*

$$\alpha(1, -2, 1) + \beta(2, 1, -1) + \gamma(7, -4, 1) = (0, 0, 0).$$

Essa relação recai em

$$(\alpha, -2\alpha, \alpha) + (2\beta, \beta, -\beta) + (7\gamma, -4\gamma, \gamma) = (0, 0, 0),$$

ou ainda

$$(\alpha + 2\beta + 7\gamma, -2\alpha + \beta - 4\gamma, \alpha - \beta + \gamma) = (0, 0, 0).$$

Igualando as componentes em ambos os membros, chega-se ao seguinte sistema linear

$$\begin{aligned} &\alpha + 2\beta + 7\gamma = 0; \\ &-2\alpha + \beta - 4\gamma = 0; \\ &\alpha - \beta + \gamma = 0, \end{aligned}$$

o qual se reduz a

$$\begin{aligned} &\alpha + 2\beta + 7\gamma = 0; \\ &\beta + 2\gamma = 0. \end{aligned}$$

Esse sistema linear só possui duas equações não nulas nas três incógnitas e portanto admite solução não nula. Assim os vetores iniciais são linearmente dependentes.$\square$

O *span* de um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_i\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, denotado como $\mathrm{sp}\{\mathbf{v}_i\}$, é o subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ consistindo de todas as combinações lineares dos elementos $\{\mathbf{v}_i\}$. Logo, $\mathbf{w} \in \mathcal{W} \Rightarrow \mathbf{w} = \sum_i^n \alpha_i \mathbf{v}_i$. Diz-se que $\mathcal{W}$ é gerado por $\{\mathbf{v}_i\}$ ou que $\{\mathbf{v}_i\}$ gera $\mathcal{W}$.

O espaço $\mathcal{V}$ é dito tridimensional, ou seja tem dimensão três, pois dentro desse conjunto não é possível obter um subconjunto com mais de três vetores linearmente independentes. Daí se conclui que qualquer elemento de $\mathcal{V}$ pode ser expresso como uma única combinação linear destes três vetores. Assim, diz-se que qualquer conjunto de três vetores linearmente independentes *gera* $\mathcal{V}$. Tais conjuntos são chamados de *bases* de $\mathcal{V}$.

Exemplo B.7 *Sejam $\mathbf{v}_1 = (1,2,3)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,2)$ e $\mathbf{v}_3 = (0,0,1)$ vetores do $\Re^3$. Mostremos que o conjunto $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ forma uma base para $\Re^3$.*

Para tanto, é preciso provar que B é linearmente independente e ainda gera o $\Re^3$. Para provar a primeira condição façamos uma combinação linear dos vetores de B igual ao vetor nulo, i.e.,

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Essa relação resulta no sistema linear

$$\begin{aligned} &a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0; \\ &a_2 + 2a_3 = 0; \\ &a_3 = 0, \end{aligned}$$

cuja única solução é $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Logo B é linearmente independente.

Para provar a segunda condição, deve-se mostrar que qualquer vetor $\mathbf{v} = (x,y,z) \in \Re^3$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores de B. Com efeito:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3,$$

ou ainda, em termos de componentes

$$(x,y,z) = a_1(1,2,3) + a_2(0,1,2) + a_3(0,0,1).$$

A última relação resulta no sistema linear

$$\begin{aligned} &a_1 = x; \\ &2a_1 + a_2 = y; \\ &3a_1 + 2a_2 + a_3 = z, \end{aligned}$$

o qual admite solução para quaisquer valores de x, y, z, ou seja, todo vetor $\mathbf{v} = (x,y,z)$ é combinação linear dos vetores de B. Resolvendo esse sistema chegamos a

$$(x,y,z) = x(1,2,3) + (-2x+y)(0,1,2) + (x-2y+z)(0,0,1).$$

Dessa maneira fica provado que B é uma base para $\Re^3$.$\square$

Observa-se que a definição de todos os conceitos feita até este ponto é completamente independente da escolha de qualquer sistema de referência. Esta noção será abordada a seguir.

Um sistema de referência (ou de coordenadas) é carcterizado por uma base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de $\mathcal{V}$ e uma *origem*, dada por um ponto $\mathbf{O}$, na qual serão aplicados os vetores da base.

Uma base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é denominada ortonormal se o produto escalar entre seus vetores satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 1 & i = j \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 & i \neq j \end{array} \right. \rightarrow \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \tag{B.16}$$

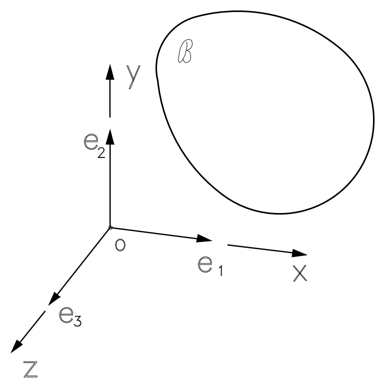


Figura B.2: Sistema de coordenadas cartesiano associado a $\mathcal{B}$.

Um *sistema de coordenadas ortogonal* consiste de uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ juntamente com o ponto $\mathbf{O}$. Assume-se daqui em diante que um sistema de coordenadas cartesiano fixo para uma região $\mathcal{B}$ é dado como ilustrado na Figura B.2.

Dada a base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, qualquer vetor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ pode ser escrito de forma única como

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i\mathbf{e}_i = v_i\mathbf{e}_i \tag{B.17}$$

O módulo $\|\mathbf{v}\|$ de $\mathbf{v}$ nesse caso é dado por

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \tag{B.18}$$

e dividindo-se $\mathbf{v}$ pelo seu módulo $\|\mathbf{v}\|$, tem-se o vetor unitário $\mathbf{e}_v$ na direção de $\mathbf{v}$, ou seja, $\mathbf{e}_v = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$.

Exemplo B.8 *A partir da base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ do $\Re^3$ dada por $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 1, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (0, -1, 1)$, pode-se obter uma base ortonormal em relação ao produto interno usual (produto escalar). Verifiquemos esta afirmativa.*

De fato, normalizando-se os vetores da base B chega-se a

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \tfrac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \tfrac{(1,1,1)}{\sqrt{1+1+1}} = (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}})\\
\mathbf{u}_2 &= \tfrac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_2\|} = \tfrac{(-2,1,1)}{\sqrt{4+1+1}} = (-\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}})\\
\mathbf{u}_3 &= \tfrac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_3\|} = \tfrac{(0,-1,1)}{\sqrt{0+1+1}} = (0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}})
\end{aligned}$$

donde é fácil verificar que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3 = 1;\\
&\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = 0,
\end{aligned}$$

e portanto

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij}.$$

□

Além do produto escalar, define-se ainda uma outra operação entre vetores de $\mathcal{V}$ denominada *produto vetorial*. Enquanto o produto interno de dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ fornece um escalar, o produto vetorial de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ fornece o vetor $\mathbf{w}$, indicado como $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. A magnitude (ou tamanho) de $\mathbf{w}$ é dada por

$\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\sin\theta \qquad 0\le\theta\le\pi$ sendo novamente θ o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Observa-se que $\mathbf{w}$ é perpendicular ao plano determinado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, de tal maneira que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ formam um sistema orientado segundo a regra da mão direita.

O produto vetorial satisfaz as seguintes propriedades:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -\left(\mathbf{v}\times\mathbf{u}\right) \tag{B.19}$$

$$\mathbf{u}\times\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}\right) = \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w} \tag{B.20}$$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{B.21}$$

$$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \tag{B.22}$$

$$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \tag{B.23}$$

$$k\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{u}\times k\mathbf{v} = k\left(\mathbf{u}\times\mathbf{v}\right) \tag{B.24}$$

$$\mathbf{u}\cdot\left(\mathbf{v}\times\mathbf{w}\right) = \mathbf{w}\cdot\left(\mathbf{u}\times\mathbf{v}\right) = \mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{w}\times\mathbf{u}\right) \tag{B.25}$$

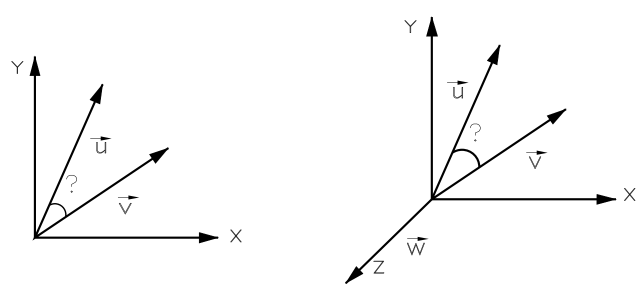
Em termos das componentes de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, tem-se que $\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ é dado pelo determinante,

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(u_2v_3 - u_3v_2\right)\mathbf{e}_1 + \left(u_3v_1 - u_1v_3\right)\mathbf{e}_2 + \left(u_1v_2 - u_2v_1\right)\mathbf{e}_3 \tag{B.26}$$

Observa-se que as seguintes relações em notação indicial são válidas,

$$\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j = e_{ijk}\mathbf{e}_k \qquad \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \left(a_i\mathbf{e}_i\right)\times\left(b_j\mathbf{e}_j\right) = a_ib_j\left(\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j\right) = a_ib_je_{ijk}\mathbf{e}_k \tag{B.27}$$

A Figura B.3 ilustra os produtos escalar e vetorial entre dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.



(a) Produto escalar. (b) Produto vetorial.

Figura B.3: Produtos entre vetores.

Exemplo B.9 *Procuremos o vetor* $\mathbf{w}$ *perpendicular a ambos os vetores* $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ *e* $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$*, dados em termos da base ortonormal* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *do* $\Re^3$*. Em seguida calculemos o volume* $\mathbf{V}$ *do paralelepípedo gerado pelos vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *e o vetor unitário* $\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_3$*.*

Solução*: O vetor perpendicular a* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *simultaneamente é dado pelo produto vetorial* $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. *Em termos de componentes temos*

$$\mathbf{w} = (2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \times (\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3).$$

Pelas propriedades do produto vetorial temos

$$\mathbf{w} = -4\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 + 3\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 + 9\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2,$$

ou ainda

$$\mathbf{w} = -4\mathbf{e}_3 - 6\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3 + 9\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1 = 7\mathbf{e}_1 - 7\mathbf{e}_2 - 7\mathbf{e}_3.$$

O volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *e o vetor unitário* $\mathbf{n}$ *é dado pelo produto misto*

$$\mathbf{V} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_3 \right) \cdot (7\mathbf{e}_1 - 7\mathbf{e}_2 - 7\mathbf{e}_3).$$

Pelas propriedades do produto escalar temos

$$\mathbf{V} = -\frac{7}{\sqrt{3}} + \frac{7}{\sqrt{3}} + \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

□

B.2 Exercícios Resolvidos

Exercício B.1 *Seja* $V = \{f : [0,1] \to \Re; f \text{ é contínua}\}$ *o espaço vetorial das funções contínuas no intervalo* $[0,1]$.

Mostre que $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ *define um produto interno em* V. *Determine* $\langle h_1, h_2 \rangle$ *e* $\langle h_1, h_1 \rangle$ *quando* $h_1(t) = t$ *e* $h_2(t) = t^2$.

Solução:

Para mostrar que $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ *define um produto interno em* V, *é preciso verificar se este operador obedece às 4 propriedades do produto interno. Assim,*

(i) $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 g(t)f(t)dt = \langle g, f \rangle$,

(ii) Sejam $f, g, h \in V$ *e* $\alpha, \beta \in \Re$.

$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \int_0^1 (\alpha f + \beta g)(t)h(t)dt = \int_0^1 (\alpha f(t) + \beta g(t))h(t)dt = \alpha \int_0^1 f(t)h(t)dt + \beta \int_0^1 g(t)h(t)dt = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$,

(iii) $\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(t)f(t)dt = \int_0^1 f^2(t)dt \Rightarrow \langle f, f \rangle > 0$,

(iv) $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow \int_0^1 f^2(t)dt = 0 \iff f \equiv 0$.

Portanto $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ *é um produto interno de* V.

Calculemos $\langle h_1, h_2 \rangle$ *e* $\langle h_1, h_1 \rangle$.

(a) $\langle h_1, h_2 \rangle = \int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt = \int_0^1 t \cdot t^2 dt = \int_0^1 t^3 dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$.

(b) $\langle h_1, h_1 \rangle = \int_0^1 h_1(t)h_1(t)dt = \int_0^1 t \cdot t dt = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Exercício B.2 *Seja* $V = \Re^3$. *Mostre que* W *é subespaço de* V, *sendo*

(i) $W = \{(a, b, 0) : a, b \in \Re\}$, *isto é,* W *é o plano* xy, *constituído por aqueles vetores cuja terceira componente é* 0;

(ii) $W = \{(a, b, c) : a + b + c = 0\}$, *isto é,* W *consiste nos vetores com a propriedade de que a soma de suas componentes é* 0.

Solução:

(i) $\mathbf{0} = (0,0,0) \in W$*, pois a terceira componente de* $\mathbf{0}$ *é* 0*. Para quaisquer vetores* $\mathbf{v} = (a,b,0)$, $\mathbf{w} = (c,d,0)$ *em* W*, e quaisquer escalares (números reais)* k *e* k',

$k\mathbf{v} + k'\mathbf{w} = k(a,b,0) = k'(c,d,0) = (ka,kb,0) + (k'c,k'd,0) = (ka+k'c, kb+k'd, 0)$

Assim, $k\mathbf{v} + k'\mathbf{w} \in W$*; logo,* W *é subespaço de* V*.*

(ii) $\mathbf{0} = (0,0,0) \in W$ *pois* $0+0+0=0$*. Suponha que* $\mathbf{v} = (a,b,c)$, $\mathbf{w} = (a',b',c')$ *pertencem a* W*, isto é,* $a+b+c=0$ *e* $a'+b'+c'=0$*.*

Assim, para quaisquer escalares k *e* k',

$k\mathbf{v} + k'\mathbf{w} = k(a,b,c) + k'(a',b',c') = (ka,kb,kc) + (k'a',k'b',k'c') = (ka+k'a', kb+k'b', kc+k'c')$

e, além disso,

$(ka+k'a') + (kb+k'b') + (kc+k'c') = k(a+b+c) + k'(a'+b'+c') = k0 + k'0 = 0$

Assim, $k\mathbf{v} + k'\mathbf{w} \in W$*; logo,* W *é subespaço de* V*.*

Exercício B.3 *Escreva o polinômio* $\mathbf{v} = t^2+4t-3$ *como combinação linear dos polinômios* $\mathbf{e}_1 = t^2-2t+5$, $\mathbf{e}_2 = 2t^2-3t$ *e* $\mathbf{e}_3 = t+3$*.*

Solução:

Escreva $\mathbf{v}$ *como combinação linear dos* $\mathbf{e}_i$ *usando as incógnitas* x*,* y *e* z*:* $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$

$t^2+4t-3 = x(t^2-2t+5) + y(2t^2-3t) + z(t+3) = xt^2-2xt+5x+2yt^2-3yt+zt+3z = (x+2y)t^2 + (-2x-3y+z)t + (5x+3z)$

Faça os coeficientes das mesmas potências de t *iguais entre si e reduza o sistema à forma escalonada*

$$\begin{aligned} x+2y &= 1, \\ -2x-3y+z &= 4, \\ 5x+3z &= -3, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x+2y &= 1, \\ y+z &= 6, \\ -10y+3y &= -8, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x+2y &= 1, \\ y+z &= 6, \\ 13z &= 52. \end{aligned}$$

Note que o sistema é consistente; logo, tem solução. Resolva em relação às incógnitas para obter $x=-3$*,* $y=2$*,* $z=4$*. Assim,* $\mathbf{v} = -3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$*.*

Exercício B.4 *Seja* V *o espaço vetorial dos polinômios de grau* ≤ 3*. Detrmine se* $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ *são linearmente independentes ou dependentes, sendo*

$\mathbf{u} = t^3-3t^2+5t+1$, $\mathbf{v} = t^3-t^2+8t+2$, $\mathbf{w} = 2t^3-4t^2+9t+5$

Solução:

Faça uma combinação linear dos polinômios $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *igual ao polinômio nulo, usando incógnitas escalares* x*,* y*,* z*, isto é, faça* $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = \mathbf{0}$*. Assim,*

$x(t^3-3t^2+5t+1) + y(t^3-t^2+8t+2) + z(2t^3-4t^2+9t+5) = \mathbf{0}$

ou $xt^3-3xt^2+5xt+x+yt^3-yt^2+8yt+2y+2zt^3-4zt^2+9zt+5z = \mathbf{0}$

ou $(x+y+2z)t^3 + (-3x-y-4z)t^2 + (5x+8y+9z)t + (x+2y+5z) = \mathbf{0}$

Os coeficientes das potências de t *devem ser iguais a* 0

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 0, \\ -3x-y-4z &= 0, \\ 5x+8y+9z &= 0, \\ x+2y+5z &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo o sitema homogêneo acima, obtemos somente a solução nula $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; portanto $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *são linearmente independentes.*

B.3 Exercícios Propostos

1. Seja V o espaço dos polinômios de grau $p \leq 2$, com produto interno dado por $\langle p_1, p_2 \rangle = \int_0^1 p_1(t)p_2(t)dt$. Sejam $p_1(t) = t + 2$ e $p_2(t) = t^2 - 2t - 3$. Encontre (i) $\langle p_1, p_2 \rangle$ e (ii) $\|p_1\|$.

2. Seja $V = \Re^3$. Mostre que W não é subespaço de V, sendo

   (i) $W = \{(a, b, c) : a \geq 0\}$, isto é, W consiste nos vetores cuja primeira componente é não negativa;

   (ii) $W = \{(a, b, c) : a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$, isto é, W consiste nos vetores cujo comprimento não excede 1;

   (iii) $W = \{(a, b, c) : a, b, c \in Q\}$, isto é, W consiste nos vetores cujas componentes são números racionais.

3. Sejam U e W os seguintes subespaços do $\Re^4$

$$U = \{(a, b, c, d) : b + c + d = 0\},$$
$$W = \{(a, b, c, d) : a + b = 0, c = 2d\}.$$

   Encontre a dimensão e uma base de (i) U, (ii) W e (iii) $U \cap W$.

4. Encontre o vetor coordenada de $\mathbf{v}$ em relação à base $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ do $\Re^3$ nos casos

   (i) $\mathbf{v} = (4, -3, 2)$,

   (ii) $\mathbf{v} = (a, b, c)$.