

Mecânica dos Sólidos Deformáveis

Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt Eng. Wallace Gusmão Ferreira

1 de Junho de 2001

Conteúdo

1	Sólidos	3
1.1	Introdução	3
1.2	Definição da Cinemática	4
1.3	Deformação	5
1.4	Movimento de Corpo Rígido	9
1.5	Trabalho Interno	9
1.6	Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)	12
1.7	Lei de Hooke Generalizada	13
1.8	Aplicação da Equação Constitutiva	16
1.9	Formulação Empregando Tensores	17
1.9.1	Corpo	17
1.9.2	Vetores	18
1.9.3	Cinemática	19
1.9.4	Deformação	19
1.9.5	Movimentos de Corpo Rígido	27
1.9.6	Trabalho Interno	29
1.9.7	Aplicação do PTV	33
1.9.8	Aplicação da Equação Constitutiva	33
2	Casos Particulares	35
2.1	Barra	35
2.1.1	Cinemática	35
2.1.2	Deformação	35
2.1.3	Trabalho Interno	36
2.1.4	PTV	36
2.1.5	Aplicação da Equação Constitutiva	36
2.2	Flexão Pura em Vigas Prismáticas	37
2.2.1	Cinemática	37
2.2.2	Deformação	38
2.2.3	Trabalho Interno	38
2.2.4	PTV	39
2.2.5	Aplicação da Equação Constitutiva	39
2.3	Torção de Eixos Circulares Prismáticos	40

2.3.1	Cinemática	40
2.3.2	Deformação	41
2.3.3	Trabalho Interno	41
2.3.4	PTV	42
2.3.5	Aplicação da Equação Constitutiva	42
2.4	Estado Plano de Tensões	43
2.5	Estado Plano de Deformações	44
3	Solução Aproximada	46
3.1	Forma Forte	46
3.2	Forma Fraca	46
3.3	Aproximação	50
4	Aplicações	53
4.1	Métodos Analíticos	53
4.1.1	Equações de Compatibilidade	53
4.1.2	Barra - Solução 3D	56
4.1.3	Torção de Eixos Circulares Prismáticos - Solução 3D	61
4.1.4	Viga - Solução 3D	63
4.2	Métodos Numéricos	66
4.2.1	Estudo de Casos	69
	Bibliografia	72

Capítulo 1

Sólidos

1.1 Introdução

O propósito deste texto é a apresentação de uma metodologia para o tratamento e análise de tensões e deformações em corpos sólidos. Inicialmente será descrita a cinemática do problema, permitindo estabelecer o conceito geral de deformação. Através do conceito de Trabalho Interno e da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais serão deduzidas as equações diferenciais para o equilíbrio tridimensional, após a introdução do conceito de tensão. Finalmente serão deduzidas as equações de Navier, através das aplicação do modelo constitutivo (relações entre tensão e deformações em função do tipo de material), nesse caso a lei de Hooke, para materiais elásticos, homogêneos e isotrópicos. A fim de permitir uma notação mais compacta e generalizada para a formulação dos modelos, as equações serão reescritas utilizando o conceito matemático de tensores, seguindo-se os mesmos passos descritos anteriormente.

Com o intuito de exemplificar e aplicar os resultados obtidos com a formulação geral para a análise de tensões e deformações em sólidos tridimensionais, serão formulados os modelos unidimensionais de problemas de barra, viga, torção e estados planos (tensão e deformação), deduzidos do modelo mais geral, levando-se em conta as hipóteses cinemáticas simplificadoras para cada caso.

A formulação apresentada será baseada na mecânica dos meios contínuos que é o ramo da mecânica que trata do estudo de tensões em sólidos, líquidos e gases, bem como a deformação e o fluxo desses materiais. O termo contínuo aqui utilizado significa que são desconsiderados os efeitos decorrentes da estrutura molecular da matéria, imaginando-a como sendo isenta de vazios e discontinuidades. Do ponto de vista matemático isso implica em dizer que as funções empregadas na modelagem devem ser suaves e possuir derivadas contínuas em todo o domínio analisado.

O conceito de contínuo permite o uso de artifícios matemáticos do cálculo diferencial, possibilitando o estudo de distribuições complexas e não uniformes de tensão e deformação dos corpos e, ao mesmo tempo, definir modelos físicos considerados aceitáveis na descrição do comportamento matéria como um todo. Esta metodologia permite que ramos da mecânica como elasticidade, plasticidade e mecânica dos fluidos estabeleçam previsões quantitativas bastante razoáveis para uma larga faixa de problemas de análise de tensões, deformações e fluxo material no campo da engenharia.

Considerando-se que atualmente o uso de ferramentas computacionais é uma realidade cada vez mais presente no cotidiano da engenharia, para a solução de problemas envolvendo grande complexidade, como a solução analítica de equações diferenciais, será apresentada uma proposta de aproximação da solução das equações de equilíbrio, permitindo o uso de ferramentas numéricas, como o já consagrado Método dos Elementos Finitos (MEF), entre outros. De forma simplificada, o método utilizado consiste em, partindo-se da forma forte das equações diferenciais, através da integração por partes deve-se obter uma forma fraca para o modelo, ou seja, a redução da ordem de diferenciabilidade das funções incógnitas, permitindo a obtenção de uma solução aproximada, através de modelos discretos,

mais fáceis de serem implementados computacionalmente. Ao final serão demonstrados alguns exemplos de aplicação das soluções, de forma analítica, utilizando o equacionamento desenvolvido e de forma numérica, utilizando o programa de elementos finitos ANSYS.

1.2 Definição da Cinemática

Considere um corpo tridimensional \mathcal{B} e um sistema de referência cartesiano ilustrados na Figura 1.1. Seja P_1 um ponto qualquer do corpo \mathcal{B} com coordenadas (x, y, z) segundo o sistema de referência adotado, denotando-se $P_1(x, y, z)$. Sendo $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ uma base ortonormal do sistema de referência, o vetor posição \mathbf{r}_{P_1} do ponto P_1 é definido como

$$\mathbf{r}_{P_1} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z.$$

Suponha agora que o corpo \mathcal{B} sofra um deslocamento. Neste caso, o ponto P_1 assume a posição final $P'_1(x', y', z')$ e o respectivo vetor posição é dado por

$$\mathbf{r}_{P'_1} = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + z'\mathbf{e}_z.$$

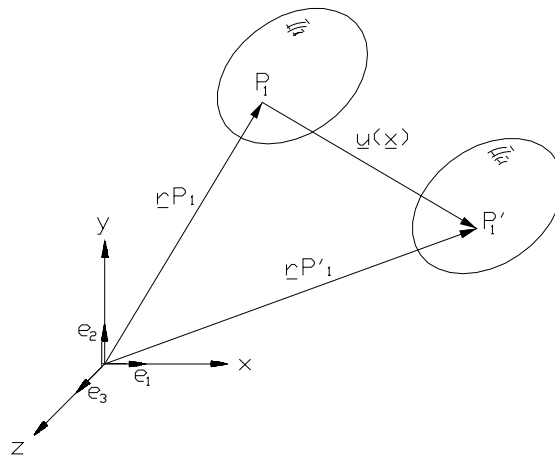


Figura 1.1: Cinemática de um Corpo Sólido

Define-se o vetor deslocamento \mathbf{u} do ponto P_1 como a diferença entre as suas posições final (x', y', z') e inicial (x, y, z) , ou seja,

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}_{P'_1} - \mathbf{r}_{P_1} = (x' - x)\mathbf{e}_x + (y' - y)\mathbf{e}_y + (z' - z)\mathbf{e}_z. \quad (1.1)$$

Observa-se que $u = (x' - x)$, $v = (y' - y)$ e $w = (z' - z)$ são, respectivamente, as componentes do vetor deslocamento \mathbf{u} nas direções x , y e z . Logo, a expressão anterior pode ser reescrita como

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z, \quad (1.2)$$

ou em forma matricial,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}. \quad (1.3)$$

Devido a hipótese de meio contínuo, o corpo \mathcal{B} possui infinitos pontos. Cada um destes pontos apresenta um vetor deslocamento \mathbf{u} quando o corpo se desloca. Logo, a cinemática de um corpo sólido é descrita por infinitos vetores deslocamentos do tipo (1.3). Estes infinitos vetores definem um campo vetorial de deslocamento $\mathbf{u}(x, y, z)$. Assim, ao se substituir as coordenadas (x, y, z) de um ponto arbitrário P_1 , $\mathbf{u}(x, y, z)$ fornece o respectivo vetor de deslocamentos \mathbf{u} do ponto de acordo com

(1.3). Assim, a cinemática de um corpo sólido é dada pelo campo vetorial de deslocamentos

$$\mathbf{u}(x, y, z) = u(x, y, z)\mathbf{e}_x + v(x, y, z)\mathbf{e}_y + w(x, y, z)\mathbf{e}_z = \left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{array} \right\}. \quad (1.4)$$

1.3 Deformação

Deseja-se agora caracterizar a variação de distância entre dois pontos arbitrários do corpo sólido antes e depois da ação de deslocamento. Isto permitirá definir o que se entende por deformação do corpo sólido. Considere os pontos arbitrários $P_1(x, y, z)$ e $P_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ ilustrados na Figura 1.2 e seus respectivos vetores posição

$$\mathbf{r}_{P_1} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad \text{e} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{r}_{P_2} = (x + \Delta x)\mathbf{e}_x + (y + \Delta y)\mathbf{e}_y + (z + \Delta z)\mathbf{e}_z. \quad (1.6)$$

De acordo com a Figura 1.2, a distância \mathbf{d} entre os pontos P_1 e P_2 é dada pela diferença entre o seus vetores posição, ou seja,

$$\mathbf{d} = \mathbf{r}_{P_2} - \mathbf{r}_{P_1} = \Delta x\mathbf{e}_x + \Delta y\mathbf{e}_y + \Delta z\mathbf{e}_z.$$

Após a ação de deslocamento do corpo de acordo com a cinemática (1.4), os pontos P_1 e P_2 assumem, respectivamente, as posições finais $P'_1(x', y', z')$ e $P'_2(x' + \Delta x', y' + \Delta y', z' + \Delta z')$ com os seguintes vetores posição

$$\mathbf{r}_{P'_1} = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + z'\mathbf{e}_z \quad \text{e} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{r}_{P'_2} = (x' + \Delta x')\mathbf{e}_x + (y' + \Delta y')\mathbf{e}_y + (z' + \Delta z')\mathbf{e}_z. \quad (1.8)$$

Portanto, a distância \mathbf{d}' entre os pontos P_1 e P_2 após o deslocamento do corpo é dada por

$$\mathbf{d}' = \mathbf{r}_{P'_2} - \mathbf{r}_{P'_1} = \Delta x'\mathbf{e}_x + \Delta y'\mathbf{e}_y + \Delta z'\mathbf{e}_z.$$

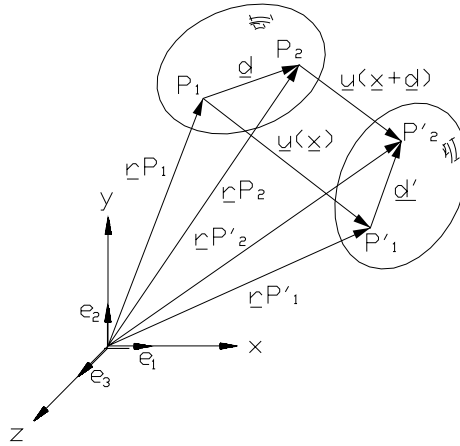


Figura 1.2: Deformação de um Corpo Sólido

A partir da Figura 1.2 e adotando procedimento análogo ao utilizado na obtenção da equação (1.4), tem-se que os vetores deslocamento dos pontos P_1 e P_2 entre as configurações inicial e final são dados, respectivamente, por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}_{P'_1} - \mathbf{r}_{P_1} = u(\mathbf{x})\mathbf{e}_x + v(\mathbf{x})\mathbf{e}_y + w(\mathbf{x})\mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}') = \mathbf{r}_{P'_2} - \mathbf{r}_{P_2} = u(\mathbf{x}')\mathbf{e}_x + v(\mathbf{x}')\mathbf{e}_y + w(\mathbf{x}')\mathbf{e}_z,$$

sendo $\mathbf{x} = (x, y, z)$ e $\mathbf{x}' = (\mathbf{x} + \mathbf{d}) = (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$.

A partir destas expressões, pode-se escrever os vetores posição dos pontos P'_1 e P'_2 em função de seus vetores deslocamento, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{P'_1} &= \mathbf{r}_{P_1} + \mathbf{u}(\mathbf{x}) = [x + u(\mathbf{x})] \mathbf{e}_x + [y + v(\mathbf{x})] \mathbf{e}_y + [z + w(\mathbf{x})] \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{r}_{P'_2} &= \mathbf{r}_{P_2} + \mathbf{u}(\mathbf{x}') = [x + \Delta x + u(\mathbf{x}')] \mathbf{e}_x + [y + \Delta y + v(\mathbf{x}')] \mathbf{e}_y + [z + \Delta z + w(\mathbf{x}')] \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Portanto, expressa-se \mathbf{d}' como

$$\mathbf{d}' = \mathbf{r}_{P'_2} - \mathbf{r}_{P'_1} = (\Delta x + \Delta u) \mathbf{e}_x + (\Delta y + \Delta v) \mathbf{e}_y + (\Delta z + \Delta w) \mathbf{e}_z, \quad (1.9)$$

sendo a diferença dos deslocamentos entre os pontos P_1 e P_2 nas direções x , y e z dados por

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(\mathbf{x}') - u(\mathbf{x}) = u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z), \\ \Delta v &= v(\mathbf{x}') - v(\mathbf{x}) = v(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - v(x, y, z), \\ \Delta w &= w(\mathbf{x}') - w(\mathbf{x}) = w(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - w(x, y, z).\end{aligned}$$

Finalmente, a variação de distância $\Delta \mathbf{d}$ é dada por

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d}' - \mathbf{d} = \Delta u \mathbf{e}_x + \Delta v \mathbf{e}_y + \Delta w \mathbf{e}_z. \quad (1.10)$$

Considere-se agora os elementos tridimensionais ilustrados na Figura 1.3 cujas diagonais são dadas, respectivamente, por \mathbf{d} e \mathbf{d}' . O elemento não-deformado é um cubo de dimensões Δx , Δy e Δz e suas arestas são linhas retas formando ângulos retos entre si. Após o deslocamento, este cubo se deforma para uma nova configuração entre os pontos P'_1 e P'_2 com dimensões $\Delta x'$, $\Delta y'$ e $\Delta z'$. As arestas se alongam e os ângulos entre as arestas deixam de ser retos apresentando distorções. Deseja-se caracterizar estes alongamentos e distorções definindo a deformação em cada ponto do corpo sólido. Para facilitar a apresentação, consideram-se os planos xy , xz e yz individualmente.

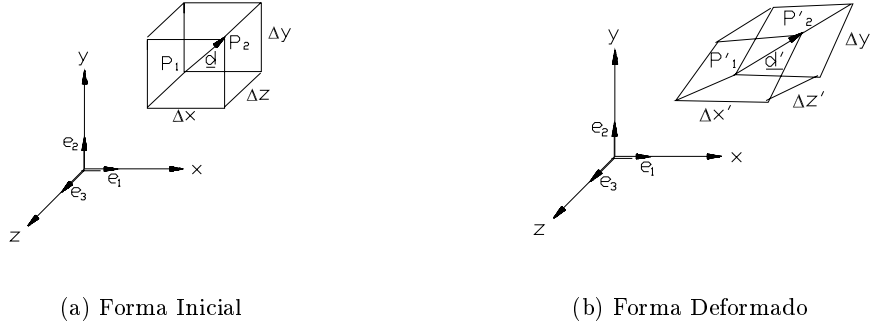


Figura 1.3: Elementos Diferenciais

As Figuras 1.4a e 1.4b ilustram as projeções dos elementos não-deformado e deformado no plano xy com os respectivos deslocamentos u e v dos pontos P_1 e P_2 e as distorções γ_1 e γ_2 . Analisa-se inicialmente apenas o caso em que ocorre somente alongamentos do elemento nas direções x e y , conforme ilustrado na Figura 1.4a. O alongamento na direção x será dado pela variação de comprimento $\Delta x' - \Delta x$ dividido pelo comprimento inicial Δx , ou seja,

$$\frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x}.$$

Por sua vez, a partir da Figura 1.4a, tem-se que $\Delta x' = \Delta x + \Delta u$. Logo,

$$\frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x + \Delta u - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (1.11)$$

Fazendo Δx pequeno, tem-se que o ponto P_1 se aproxima de P_2 e define-se a deformação específica longitudinal do ponto P_1 na direção x como o limite para Δx tendendo a zero, ou seja,

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z)}{\Delta x}. \quad (1.12)$$

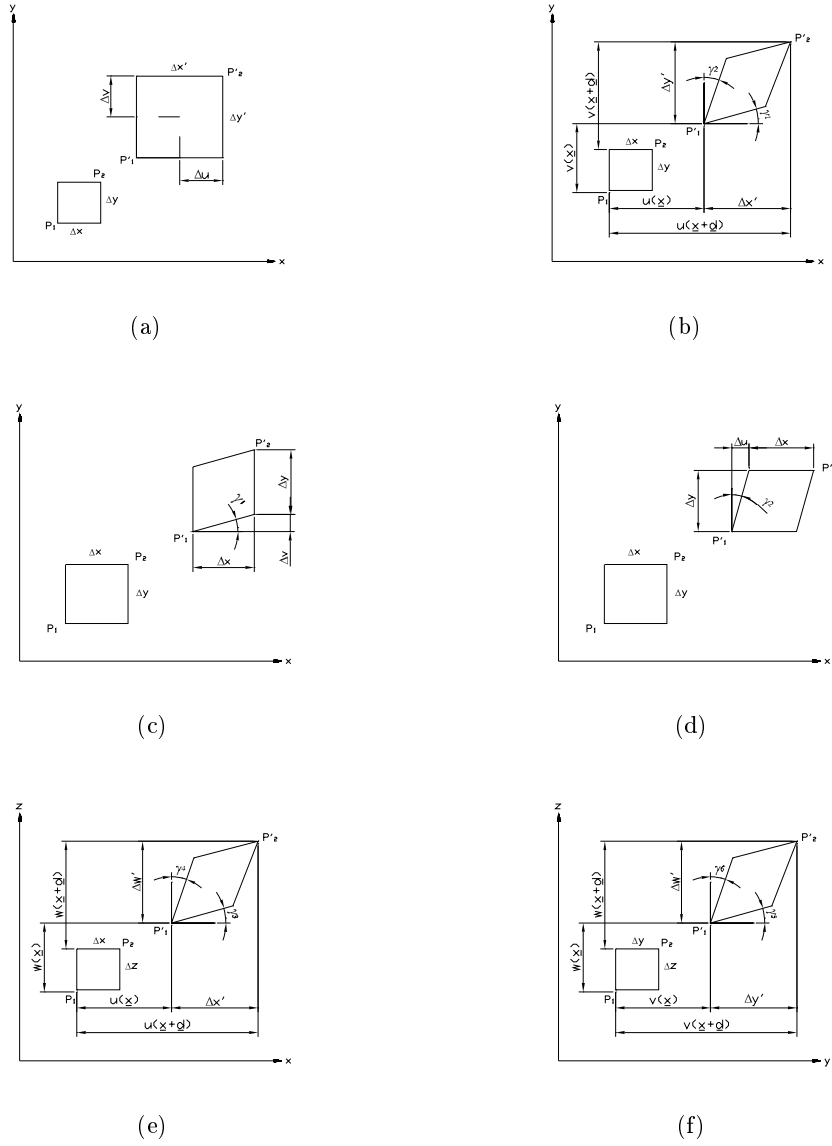


Figura 1.4: Deformações do elemento diferencial

O limite anterior é a própria definição de derivada parcial pois o deslocamento u depende das coordenadas (x, y, z) de cada ponto. Portanto,

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}. \quad (1.13)$$

Este mesmo procedimento pode ser repetido para se obter a deformação específica longitudinal de P_1 na direção y , ou seja,

$$\varepsilon_{yy}(x, y, z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - v(x, y, z)}{\Delta y}. \quad (1.14)$$

Portanto,

$$\varepsilon_{yy}(x, y, z) = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y}. \quad (1.15)$$

De maneira análoga, conforme a Figura 1.4c, analisando somente a direção para a y onde ocorre

apenas uma distorção γ_1 , a seguinte relação trigonométrica é válida

$$\tan \gamma_1 = \frac{\Delta v}{\Delta x}. \quad (1.16)$$

Tomando-se Δx pequeno, tem-se que a tangente de γ_1 é aproximadamente igual a γ_1 , ou seja, $\tan \gamma_1 \approx \gamma_1$. Logo, a seguinte relação é válida

$$\gamma_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - v(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x}. \quad (1.17)$$

Considerando agora apenas uma distorção γ_2 , conforme Figura 1.4d, nesse caso,

$$\tan \gamma_2 = \frac{\Delta u}{\Delta y}.$$

Tomando-se agora Δy pequeno, tem-se que $\tan \gamma_2 \approx \gamma_2$ e portanto

$$\gamma_2 = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z)}{\Delta y} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y}. \quad (1.18)$$

A distorção total no plano xy , denotada como $\bar{\gamma}_{xy}(x, y, z)$, é dada pela soma de γ_1 e γ_2 , ou seja,

$$\bar{\gamma}_{xy}(x, y, z) = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y}. \quad (1.19)$$

Analogamente para o plano xz , Figura 1.4e, com os respectivos deslocamentos u e w dos pontos P_1 e P_2 e as distorções γ_3 e γ_4 , efetua-se o mesmo procedimento anterior, determinando-se a deformação específica longitudinal do ponto P_1 na direção z como

$$\varepsilon_{zz}(x, y, z) = \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} \quad (1.20)$$

e a distorção $\bar{\gamma}_{xz}(x, y, z)$ no plano xz

$$\bar{\gamma}_{xz}(x, y, z) = \gamma_3 + \gamma_4 = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x}. \quad (1.21)$$

Finalmente, tomando-se o plano yz , Figura 1.4f, tem-se a distorção $\bar{\gamma}_{yz}(x, y, z)$ dada por

$$\bar{\gamma}_{yz}(x, y, z) = \gamma_5 + \gamma_6 = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y}. \quad (1.22)$$

As componentes de deformação anteriores podem se reorganizadas numa forma matricial da seguinte maneira

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}(x, y, z) \\ \varepsilon_{yy}(x, y, z) \\ \varepsilon_{zz}(x, y, z) \\ \bar{\gamma}_{xy}(x, y, z) \\ \bar{\gamma}_{xz}(x, y, z) \\ \bar{\gamma}_{yz}(x, y, z) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{array} \right\}, \quad (1.23)$$

ou ainda

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{L}]\{\mathbf{u}\},$$

sendo $[\mathbf{L}]$ um operador diferencial.

Assim, tem-se que o estado de deformação em cada ponto de um corpo sólido é caracterizado por 6 componentes de deformação. Observa-se que as componentes de deformação específicas ε_{xx} , ε_{yy} e ε_{zz} são quantidades adimensionais, as quais estabelecem uma relação de variação específica das componentes de deslocamento ao longo de uma determinada direção. Por sua vez, as distorções $\bar{\gamma}_{xy}$, $\bar{\gamma}_{xz}$ e $\bar{\gamma}_{yz}$ representam deformações angulares e são dadas em radianos.

Finalmente, deve-se ressaltar que a dedução anterior, assim como a Mecânica do Contínuo, está

totalmente baseada na idéia de diferencial. A partir da Figura 1.2, comparou-se a cinemática relativa de dois pontos arbitrários P_1 e P_2 do corpo sólido. A distância \mathbf{d} entre estes pontos pode ser feita tão pequena quanto se queira, de tal forma que pode-se falar do estado de deformação em P_1 .

1.4 Movimento de Corpo Rígido

Se as normas dos vetores \mathbf{d} e \mathbf{d}' ilustrados na Figura 1.2 são iguais então o corpo sólido sofreu um deslocamento rígido. Define-se corpo rígido como aquele em que a distância entre dois pontos quaisquer permanece constante para qualquer ação de movimento. Isto implica que todas as componentes de deformação em cada ponto do corpo são nulas, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_{yy}(x, y, z) = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_{zz}(x, y, z) = \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} = 0 \\ \bar{\gamma}_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} = 0 \\ \bar{\gamma}_{xz}(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} = 0 \\ \bar{\gamma}_{yz}(x, y, z) = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (1.24)$$

Se a cinemática $\mathbf{u}(x, y, z) = \{u(x, y, z) \ v(x, y, z) \ w(x, y, z)\}^T$ é tal que as componentes de deslocamento u, v e w são constantes para todos os pontos de \mathcal{B} , então tem-se apenas uma translação rígida. Nesse caso, as condições anteriores são satisfeitas.

Se agora o corpo apresenta rotações θ_x, θ_y e θ_z constantes em torno dos eixos x, y e z respectivamente, o vetor deslocamento é dado por

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\theta} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \end{bmatrix} = (y\theta_z - z\theta_y)\mathbf{e}_x + (z\theta_x - x\theta_z)\mathbf{e}_y + (x\theta_y - y\theta_x)\mathbf{e}_z, \quad (1.25)$$

sendo $(\theta_y z - \theta_z y) = u$, $(\theta_z x - \theta_x z) = v$ e $(\theta_x y - \theta_y x) = w$. Novamente, o deslocamento anterior implica que as componentes de deformação sejam nulas.

Dessa forma, um deslocamento rígido geral é dado pela soma de uma translação e uma rotação rígida da seguinte forma

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\theta} = \left\{ \begin{array}{c} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} (y\theta_z - z\theta_y) \\ (z\theta_x - x\theta_z) \\ (x\theta_y - y\theta_x) \end{array} \right\}, \quad (1.26)$$

sendo $u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y$ e θ_z constantes para todos os pontos do corpo \mathcal{B} .

1.5 Trabalho Interno

No caso de corpos deformáveis, emprega-se o conceito de trabalho interno para se determinar os esforços internos associados às deformações decorrentes das ações cinemáticas impostas ao corpo. O trabalho interno associa às deformações um conjunto de esforços internos compatíveis com as próprias componentes de deformação e com a cinemática do problema.

Assim, associado às componentes de deformação normal $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$ e ε_{zz} em cada ponto do corpo, tem-se as respectivas tensões normais σ_{xx}, σ_{yy} e σ_{zz} . Da mesma maneira, associadas às distorções $\bar{\gamma}_{xy}, \bar{\gamma}_{xz}$ e $\bar{\gamma}_{yz}$, tem-se as respectivas componentes de tensão cisalhante τ_{xy}, τ_{xz} e τ_{yz} . O trabalho interno

para um elemento diferencial de volume dV do corpo sólido é dado por

$$dT_i = - [\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\tilde{\gamma}_{xy} + \tau_{xz}\tilde{\gamma}_{xz} + \tau_{yz}\tilde{\gamma}_{yz}].$$

O sinal $-$ é introduzido apenas por conveniência quando da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

O trabalho interno total é obtido através da soma do trabalho de cada elemento diferencial, ou seja, através da integral de volume

$$T_i = - \int_V \left[\sigma_{xx}(x, y, z)\varepsilon_{xx}(x, y, z) + \sigma_{yy}(x, y, z)\varepsilon_{yy}(x, y, z) + \sigma_{zz}(x, y, z)\varepsilon_{zz}(x, y, z) \right. \\ \left. + \tau_{xy}(x, y, z)\tilde{\gamma}_{xy}(x, y, z) + \tau_{xz}(x, y, z)\tilde{\gamma}_{xz}(x, y, z) + \tau_{yz}(x, y, z)\tilde{\gamma}_{yz}(x, y, z) \right] dV. (1.27)$$

Fazendo uma análise dimensional do primeiro termo no integrando da expressão anterior, sabe-se que a unidade resultante deve ser igual a trabalho interno, ou seja,

$$[\sigma_{xx}(x, y, z)\varepsilon_{xx}(x, y, z)dV] = \left[\frac{N}{m^2} \right] \left[\frac{m}{m} \right] [m^3] = [Nm]. (1.28)$$

Logo, associada à deformação $\varepsilon_{xx}(x, y, z)$, que é um número adimensional por definição, deve existir uma função contínua $\sigma_{xx}(x, y, z)$, representando os esforços internos normais na direção x , com dimensão $\left[\frac{N}{m^2} \right]$. Assim, ao se realizar a integração no volume do corpo V , expresso em $[m^3]$, obtêm-se unidades de trabalho ou energia $[Nm]$. A função $\sigma_{xx}(x, y, z)$ é denominada componente de tensão normal na direção x .

Substituindo as componentes de deformação na expressão do trabalho, tem-se que

$$T_i = - \int_V \left[\sigma_{xx}(x, y, z) \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} + \sigma_{yy}(x, y, z) \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} + \sigma_{zz}(x, y, z) \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} \right. \\ \left. + \tau_{xy}(x, y, z) \left(\frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} \right) + \tau_{xz}(x, y, z) \left(\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} \right) \right. \\ \left. + \tau_{yz}(x, y, z) \left(\frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} \right) \right] dV (1.29)$$

As tensões normais representadas por σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{zz} na equação (??) são responsáveis pelo alongamento do corpo nas direções x , y e z respectivamente. Por sua vez, as tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} são responsáveis pelas distorções nos planos xy , xz e yz respectivamente.

Em geral, deseja-se obter uma expressão em termos das componentes do deslocamento do corpo e não de suas derivadas, como aparecem na equação (??) para o trabalho interno. Considerando que as componentes de tensão e de deslocamento presentes na equação (??) são contínuas em todo o domínio do corpo, pode-se realizar o procedimento de integração por partes de forma a reduzir a sua ordem de diferenciação nas componentes de deslocamento. De uma forma geral, a integração por partes para funções contínuas quaisquer f e g dependentes de x , y e z é definida como

$$\left\{ \begin{aligned} \int_V f(x, y, z) \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial x} dV &= - \int_V \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} g(x, y, z) dV + \int_S f(x, y, z) g(x, y, z) n_x dS \\ \int_V f(x, y, z) \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial y} dV &= - \int_V \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} g(x, y, z) dV + \int_S f(x, y, z) g(x, y, z) n_y dS \\ \int_V f(x, y, z) \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial z} dV &= - \int_V \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} g(x, y, z) dV + \int_S f(x, y, z) g(x, y, z) n_z dS \end{aligned} \right. , (1.30)$$

sendo $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ funções escalares e contínuas no domínio V e n_x , n_y e n_z são as componentes do vetor $\mathbf{n} = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z$ normal à superfície S (contorno de V), ver Figura 1.5.

Aplicando esse conceito para cada integral de volume na expressão do trabalho interno (??),

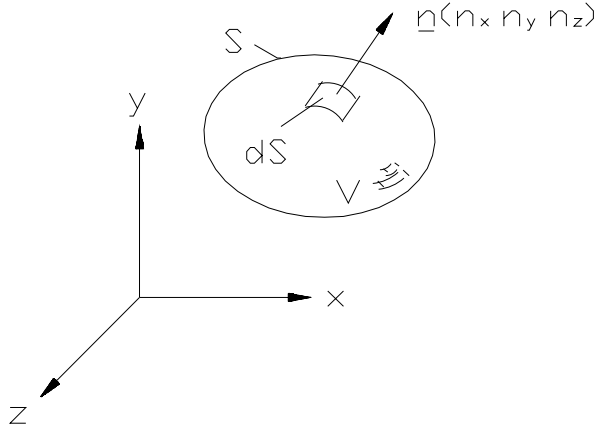


Figura 1.5: Integração por partes tridimensional

tem-se que

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_V \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} u dV - \int_S \sigma_{xx} u n_x dS \\ - \int_V \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} v dV - \int_S \sigma_{yy} v n_y dS \\ - \int_V \sigma_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} w dV - \int_S \sigma_{zz} w n_z dS \\ - \int_V \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dV = \int_V \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} u dV - \int_S \tau_{xy} u n_y dS + \int_V \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} v dV - \int_S \tau_{xy} v n_x dS \\ - \int_V \tau_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dV = \int_V \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} u dV - \int_S \tau_{xz} u n_z dS + \int_V \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} w dV - \int_S \tau_{xz} w n_x dS \\ - \int_V \tau_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) dV = \int_V \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} v dV - \int_S \tau_{yz} v n_z dS + \int_V \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} w dV - \int_S \tau_{yz} w n_y dS \end{array} \right. \quad (1.31)$$

Substituindo as expressões anteriores na equação (??) e reagrupando os termos, obtém-se

$$T_i = T_i^V + T_i^S, \quad (1.32)$$

sendo

$$T_i^V = \int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) v \right. \quad (1.33)$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) w \right] dV \quad (1.34)$$

e

$$T_i^S = - \int_S [(\sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) u + (\tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z) v \quad (1.35)$$

$$+ (\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z) w] dS. \quad (1.36)$$

Fazendo uma análise dimensional dos integrandos das expressões de T_i^V e T_i^S , observa-se que

$$\left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right] = \left[\frac{N}{m^2} \frac{1}{m} \right] = \left[\frac{N}{m^3} \right], \quad (1.37)$$

$$[\sigma_{xx} n_x] = \left[\frac{N}{m^2} \right]. \quad (1.38)$$

Logo, o termo $\left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right]$ representa uma densidade de força interna por unidade de volume do sólido, conhecida também como *força interna de corpo*. Já o termo $[\sigma_{xx} n_x]$ representa a carga interna distribuída na superfície do sólido, também conhecida como *força interna de superfície*. Assim, T_i^V e T_i^S representam o trabalho interno, respectivamente, das forças internas de volume e superfície do corpo.

1.6 Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

Os objetivos do PTV são estabelecer os esforços externos compatíveis com os esforços internos e determinar uma expressão local para o equilíbrio entre estes esforços. Este princípio estabelece que, se o corpo está em equilíbrio, os trabalhos externo e interno são os mesmos para qualquer *ação virtual* de movimento

$$\hat{\mathbf{u}}(x, y, z) = \left\{ \begin{array}{l} \hat{u}(x, y, z) \\ \hat{v}(x, y, z) \\ \hat{w}(x, y, z) \end{array} \right\}, \quad (1.39)$$

aplicada sobre o corpo, a partir de sua configuração deformada. O termo *ação virtual* significa que o princípio é válido para toda e qualquer ação hipotética de movimento, pequena ou grande, desde que compatível com a cinemática do problema.

Para avaliar intuitivamente o peso de um corpo qualquer a partir de sua configuração de equilíbrio, impõe-se uma ação de movimento $\hat{\mathbf{u}}(x, y, z)$ para retirar o corpo do seu estado de equilíbrio. Dessa forma, pelo PTV pode-se concluir que, o trabalho das forças externas necessário para fazer com que o corpo abandone sua configuração de equilíbrio é igual à energia potencial gravitacional (trabalho das forças internas, nesse caso o peso) armazenada no corpo na nova configuração de equilíbrio. De maneira simplificada, ergue-se o corpo até uma altura genérica h , realizando um trabalho externo T_e . Aplicando o PTV é possível concluir que $T_e = -Ph$, sendo P o peso do corpo em questão. É importante salientar que, o peso P do corpo é sempre possível de ser determinado, independentemente do valor numérico de h , por isso que a ação de movimento $\hat{\mathbf{u}}(x, y, z)$, que levou o corpo da sua configuração original de equilíbrio até a altura h é definida como virtual.

Define-se o PTV como

$$T_e + T_i = 0, \quad (1.40)$$

sendo T_e e T_i os trabalhos das forças externas e internas agindo sobre o corpo. Substituindo o resultado da equação (1.40) em (1.40), obtem-se

$$T_e = -T_i = -T_i^V - T_i^S. \quad (1.41)$$

Para que ocorra equilíbrio, é preciso que haja em contrapartida aos esforços internos, esforços externos de volume e superfície, de tal forma que,

$$T_e^V + T_e^S = -T_i^V - T_i^S, \quad (1.42)$$

sendo T_e^V e T_e^S , respectivamente, o trabalho externo das forças de corpo e de superfície necessários para garantir o equilíbrio.

Definindo $\mathbf{b}(x, y, z)$ como sendo a densidade das forças externas por unidade de volume e $\mathbf{t}(x, y, z)$ como a força externa distribuída na superfície do sólido, tem-se

$$T_e = T_e^V + T_e^S \quad (1.43)$$

$$= \int_V \mathbf{b}^T(x, y, z) \hat{\mathbf{u}}(x, y, z) dV + \int_S \mathbf{t}^T(x, y, z) \hat{\mathbf{u}}(x, y, z) dS \quad (1.44)$$

$$= \int_V (b_x \hat{u} + b_y \hat{v} + b_z \hat{w}) dV + \int_S (t_x \hat{u} + t_y \hat{v} + t_z \hat{w}) dS. \quad (1.45)$$

Para que haja equilíbrio entre os trabalhos dos esforços externos e internos é preciso que para qualquer ação virtual $\hat{\mathbf{u}}(x, y, z)$

$$T_e^V = -T_i^V, \quad (1.46)$$

$$T_e^S = -T_i^S. \quad (1.47)$$

Substituindo as expressões dos trabalhos das forças de volume e superfície da equação (1.45) em (1.46) e (1.47) e agrupando os termos das integrais de volume e de superfície tem-se que

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x \right) \hat{u} + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y \right) \hat{v} + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z \right) \hat{w} \right] dV = 0 \quad (1.48)$$

e

$$\int_S [(\sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z - t_x) \hat{u} + (\tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z - t_y) \hat{v} + (\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z - t_z) \hat{w}] dS = 0 \quad (1.49)$$

Como $\hat{\mathbf{u}}(x, y, z) = \{\hat{u}(x, y, z) \ \hat{v}(x, y, z) \ \hat{w}(x, y, z)\}^T$ é uma ação de deslocamento virtual arbitrária compatível com a cinemática do problema, pode-se concluir que as equações (??) e (1.49) serão satisfeitas somente quando as equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0 \end{cases} \quad (1.50)$$

e as condições de contorno

$$\begin{cases} \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z - t_x = 0 \\ \tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z - t_y = 0 \\ \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z - t_z = 0 \end{cases} , \quad (1.51)$$

forem satisfeitas simultaneamente. O conjunto de equações em (1.50) define o sistema de equações diferenciais de equilíbrio entre as forças de volume externas e internas válido em todo o domínio do corpo sólido. O conjunto de equações em (1.51) define as condições de contorno na superfície do sólido.

Os sistemas de equações em (1.50) e (1.51) definem o Problema de Valor de Contorno (PVC) para o equilíbrio de sólidos em três dimensões. Nenhuma hipótese simplificadora foi introduzida, além da continuidade das ações cinematicamente possíveis e de pequenas deformações. Assim, esta formulação é válida para qualquer meio contínuo independentemente do tipo de material com o qual o meio é formado.

1.7 Lei de Hooke Generalizada

Até o momento, foram estabelecidos os conceitos de deformação e tensão aplicáveis a qualquer material em equilíbrio que satisfaça as hipóteses de meio contínuo. Agora serão definidas equações, caracterizando o comportamento de um determinado tipo de material e suas respostas dado um carregamento aplicado. Tais equações são denominadas *equações constitutivas*, pois descrevem o comportamento do material em decorrência de sua constituição interna. As equações constitutivas correspondem à formulação matemática do modelo de comportamento de um material idealizado, visando aproximar as observações experimentais do comportamento do material em uma determinada faixa de aplicação.

Nesse contexto, define-se o *sólido elástico, linear, homogêneo e isotrópico*, que obedece o modelo constitutivo conhecido como Lei de Hooke. Por elástico deve-se entender que o material retorna a sua forma inicial, ou seja, não existem deformações permanentes após cessar o carregamento. Linear significa que a relação entre as tensões e deformações é uma função linear. Assim, um aumento no valor das tensões provoca um aumento proporcional no valor das deformações. Homogêneo indica que o as propriedades do material são iguais para todos os pontos do corpo. Isotrópico significa que

as propriedades mecânicas medidas ao longo de uma direção são iguais quando medidas em todas as outras direções. Um exemplo de materiais que obedecem esta lei para uma faixa definida como *faixa elástica*, são os materiais metálicos (aço, alumínio, cobre, etc.) à temperatura ambiente.

Observa-se, através de experimentos que, quando esses materiais são solicitados uniaxialmente, ou seja, tensões normais em uma única direção, existe uma faixa onde a relação tensão *versus* deformação apresenta um comportamento linear elástico definido como

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}, \quad (1.52)$$

sendo E definido como Módulo de Elasticidade Longitudinal ou Módulo de Young, representando o comportamento elástico do material, quando submetido a um carregamento uniaxial.

Percebe-se também que tais materiais são isotrópicos, na maioria dos casos, apresentando o mesmo comportamento em todas as direções. Logo,

$$\sigma_{yy} = E\varepsilon_{yy} \Rightarrow \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E}, \quad (1.53)$$

$$\sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz} \Rightarrow \varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E}. \quad (1.54)$$

No caso de um carregamento uniaxial, observam-se deformações nas direções perpendiculares ao carregamento. Considerando um alongamento ε_{xx} do corpo na direção x , verificam-se encurtamentos do corpo nas direções perpendiculares (neste caso y e z), os quais são proporcionais ao alongamento na direção x . Por exemplo, para o caso de uma barra tracionada na direção longitudinal, ocorre uma redução do diâmetro. O inverso ocorre no caso de compressão. Assim, no caso de um carregamento na direção x , tem-se que

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -v\varepsilon_{xx} \Rightarrow \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{v}{E}\sigma_{xx}. \quad (1.55)$$

Analogamente para as outras direções, considerando a isotropia do material

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = -v\varepsilon_{yy} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = -\frac{v}{E}\sigma_{yy}, \quad (1.56)$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -v\varepsilon_{zz} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\frac{v}{E}\sigma_{zz}. \quad (1.57)$$

A propriedade v é denominada Coeficiente de Poisson. Um valor típico para o aço é $v = 0,33$. O sinal de $-$ nas equações (1.55) (1.56) e (1.57) é empregado apenas para representar o fenômeno físico observado.

Para carregamentos triaxiais (tensão normais nas direções x , y e z , simultaneamente) observa-se que existe uma sobreposição dos efeitos dos carregamentos em cada direção. Portanto, superpondo os efeitos vem que

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{v}{E}\sigma_{yy} - \frac{v}{E}\sigma_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - v(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \quad (1.58)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{v}{E}\sigma_{xx} - \frac{v}{E}\sigma_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - v(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})], \quad (1.59)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{v}{E}\sigma_{yy} - \frac{v}{E}\sigma_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - v(\sigma_{yy} + \sigma_{xx})]. \quad (1.60)$$

Considerando agora o caso de cisalhamento puro do material, verifica-se que

$$\tau_{xy} = G\tilde{\gamma}_{xy} = \frac{E}{2(1+v)}\tilde{\gamma}_{xy} \Rightarrow \tilde{\gamma}_{xy} = \frac{2(1+v)}{E}\tau_{xy}, \quad (1.61)$$

$$\tau_{xz} = G\tilde{\gamma}_{xz} = \frac{E}{2(1+v)}\tilde{\gamma}_{xz} \Rightarrow \tilde{\gamma}_{xz} = \frac{2(1+v)}{E}\tau_{xz}, \quad (1.62)$$

$$\tau_{yz} = G\tilde{\gamma}_{yz} = \frac{E}{2(1+v)}\tilde{\gamma}_{yz} \Rightarrow \tilde{\gamma}_{yz} = \frac{2(1+v)}{E}\tau_{yz}. \quad (1.63)$$

O termo G é denominado Módulo de Elasticidade Transversal. A Figura 1.1 ilustra os tipos de carregamentos atuante em um corpo sólido.

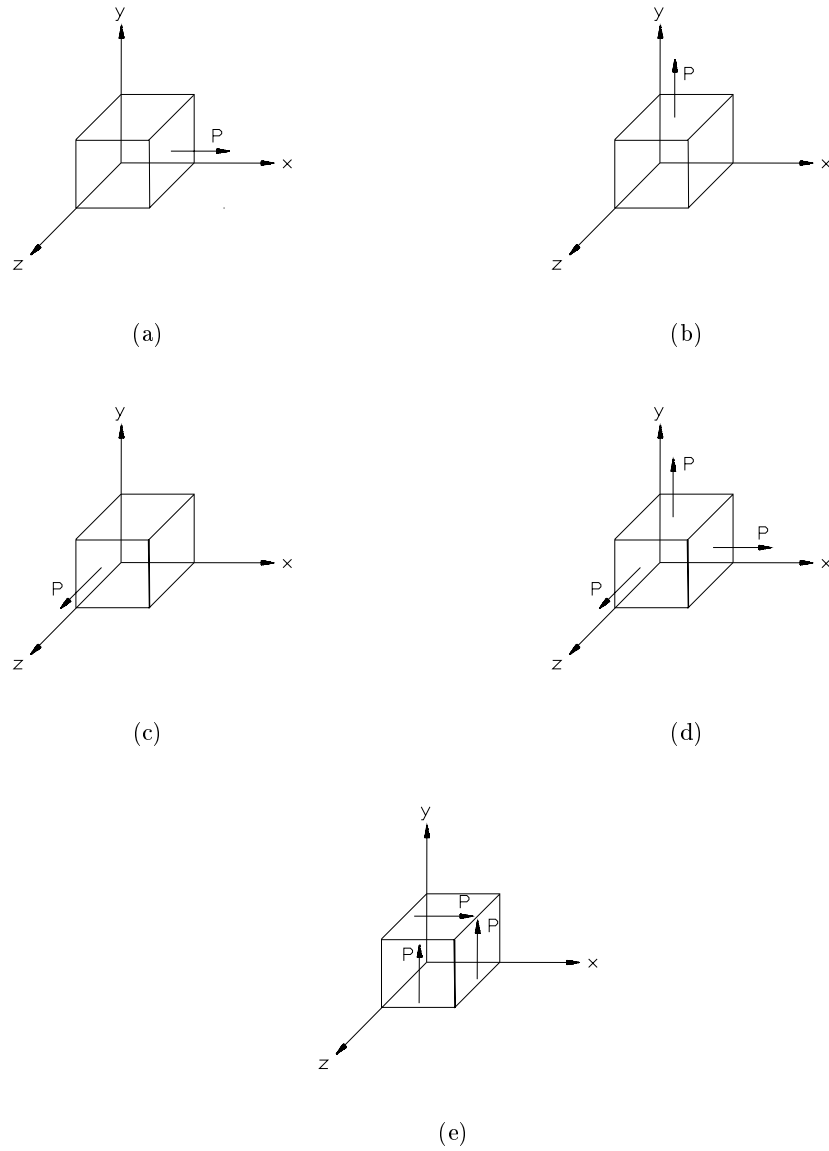


Figura 1.6: Carregentos atuando sobre um corpo tridimensional

Deve-se observar, através das equações (1.61) (1.62) e (1.63), que os efeitos do cisalhamento em um determinado plano não provocam distorções nos outros planos. Desta forma, τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} são independentes (desacoplados).

Pode-se escrever as relações anteriores na forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \tilde{\gamma}_{xy} \\ \tilde{\gamma}_{xz} \\ \tilde{\gamma}_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (1.64)$$

ou seja,

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\sigma}\}.$$

A matriz $[\mathbf{C}]$ pode ser invertida, permitindo expressar as componentes de tensão em função das

componentes de deformação

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & 1-v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & v & 1-v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \bar{\gamma}_{xy} \\ \bar{\gamma}_{xz} \\ \bar{\gamma}_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (1.65)$$

ou em forma compacta

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}.$$

Expandindo a expressão para σ_{xx} , tem-se que

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\varepsilon_{xx} + \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)}(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}). \quad (1.66)$$

Somando e subtraindo o termo $\frac{Ev}{(1+v)(1-2v)}\varepsilon_{xx}$ do lado direito da equação (??) e rearranjando, obtém-se

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+v)}\varepsilon_{xx} + \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda e, \quad (1.67)$$

sendo μ e λ os coeficientes de Lamé dados por

$$\mu = \frac{E}{2(1+v)}, \quad (1.68)$$

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)}. \quad (1.69)$$

O termo e representa a dilatação do corpo, ou seja,

$$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}.$$

Efetuando o mesmo procedimento para as demais componentes de tensão normal, tem-se ao final as expressões da Lei de Hooke generalizada para um material elástico, linear, homogêneo e isotrópico

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda e \\ \sigma_{yy} = 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda e \\ \sigma_{zz} = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda e \\ \tau_{xy} = \mu\bar{\gamma}_{xy} \\ \tau_{xz} = \mu\bar{\gamma}_{xz} \\ \tau_{yz} = \mu\bar{\gamma}_{yz} \end{cases}. \quad (1.70)$$

1.8 Aplicação da Equação Constitutiva

As expressões anteriores fornecem para um sólido elástico, linear, homogêneo e isotrópico as componentes de tensão em cada ponto do corpo em função das respectivas componentes de deformação. Substituindo estas relações nas equações de equilíbrio (1.50) obtém-se as condições de equilíbrio em termos das componentes de deslocamento.

Para a primeira equação de (1.50) vem que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda e) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu\bar{\gamma}_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu\bar{\gamma}_{xz}) + b_x &= 0 \\ \lambda \frac{\partial e}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + b_x &= 0. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Observa-se que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x}, \quad (1.72)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x}. \quad (1.73)$$

Substituindo estas relações em (1.71), tem-se que

$$\lambda \frac{\partial e}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} \right) + b_x = 0. \quad (1.74)$$

Lembrando-se que $e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ e $\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e reagrupando os termos

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u + b_x = 0. \quad (1.75)$$

Efetuada o mesmo procedimento para as duas outras equações em (1.50), obtêm-se ao final as Equações de Navier em termos das componentes de deslocamento e da dilatação e , ou seja,

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u + b_x = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v + b_y = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w + b_z = 0 \end{cases}. \quad (1.76)$$

Observa-se que enquanto as equações de equilíbrio (1.50) são válidas para qualquer meio contínuo tridimensional em pequenas deformações, as equações de Navier fornecem o equilíbrio em termos de deslocamentos apenas para um material que obedece a lei de Hooke.

É importante salientar que a solução analítica do sistema de equações em (1.76) pode ser obtida apenas em alguns casos muito particulares. No caso de não existir uma solução fechada para um dado problema, aplicam-se técnicas de solução numérica como o Método dos Elementos Finitos (MEF).

1.9 Formulação Empregando Tensores

A formulação empregada até agora utilizou números escalares e vetores como entes matemáticos básicos. Um outro conceito matemático de grande importância no estudo de problemas de Mecânica é o tensor. O seu uso permite apresentar de forma compacta e elegante a formulação de vários problemas. Uma outra vantagem é que as equações expressas na forma tensorial são independentes do sistema de coordenadas empregado. Assim, é possível concentrar-se apenas nos conceitos envolvidos nas equações sem se preocupar com detalhes desnecessários sob o ponto de vista da apresentação de uma formulação. Estes detalhes serão importantes apenas quando se adota um sistema de coordenadas específico para o estudo de um problema.

Na verdade, o conceito de tensor representa uma generalização de escalares e vetores, pois estes podem ser definidos, respectivamente, como tensores de ordens zero e um. Os tensores de segunda ordem são usados extensivamente em Mecânica, podendo-se citar os tensores de deformação, de tensão e de inércia. Por sua vez, tensores de quarta ordem são empregados para a representação de equações constitutivas de materiais.

A seguir, formula-se o problema de corpos sólidos introduzindo o conceito de tensor. Para tanto serão seguidos os mesmos passos utilizados anteriormente. Antes disso porém, torna-se importante apresentar uma definição para um corpo.

1.9.1 Corpo

O espaço geométrico em consideração no estudo da Mecânica do Contínuo é o *espaço euclidiano tridimensional* \mathcal{E} . Os elementos de \mathcal{E} são denominados *pontos*.

Todo corpo tem como característica física principal o fato de ocupar regiões do espaço euclidiano

tridimensional. Assim, um corpo qualquer pode ocupar diferentes regiões em tempos distintos. Embora nenhuma destas regiões possa ser associada ao corpo, torna-se conveniente selecionar uma delas, denominada *configuração de referência* \mathcal{B} , identificando pontos do corpo com as suas posições em \mathcal{B} . Desta maneira, um corpo \mathcal{B} passa a ser uma região regular de \mathcal{E} , sendo os pontos de \mathcal{B} denominados *pontos materiais*. Qualquer subregião regular limitada de \mathcal{B} é chamada *parte*, a qual é indicada por \mathcal{P} . Os contornos do corpo \mathcal{B} e da parte \mathcal{P} são indicados, respectivamente, por $\partial\mathcal{B}$ e $\partial\mathcal{P}$. Estes conceitos estão ilustrados na Figura 1.7.

Como um corpo pode ocupar diferentes regiões ao longo de um movimento, torna-se necessário a introdução de um parâmetro $t \in [t_0, t_f]$, designando uma certa configuração \mathcal{B}_t do corpo. Observa-se que em vários problemas t não representa necessariamente o tempo.

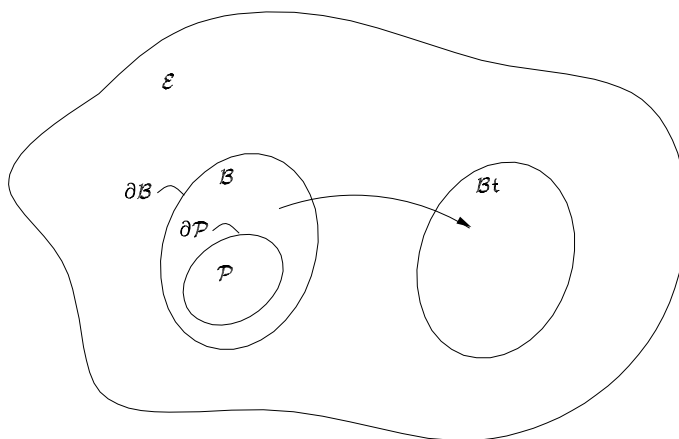


Figura 1.7: Definição de Corpo

1.9.2 Vetores

Intuitivamente, observa-se que a soma de dois pontos não possui nenhum significado. Entretanto, a diferença entre dois pontos \mathbf{x} e \mathbf{y} é definida como sendo um *vetor*, ou seja,

$$\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{x} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}. \quad (1.77)$$

Pode-se então colocar a seguinte importante observação. Um vetor é definido formalmente como a diferença de pontos de \mathcal{E} . Apenas quando se adota um sistema de coordenadas, pode-se falar das componentes de um vetor, assim como da sua direção e sentido.

O conjunto de vetores obtidos pela diferença de pontos de \mathcal{E} forma na verdade um espaço de vetores ou espaço vetorial \mathcal{V} . Observa-se ainda que a soma entre um ponto \mathbf{x} e um vetor \mathbf{v} define um novo ponto \mathbf{y} , isto é,

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{v} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{E}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (1.78)$$

Um sistema de coordenadas consiste de uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e um ponto arbitrário \mathbf{o} de \mathcal{E} denominado origem. A partir daí, as coordenadas de qualquer ponto \mathbf{x} passam a ser dadas pelo vetor posição $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{o}$ em relação a origem \mathbf{o} . Estes conceitos estão ilustrados na Figura 1.8

A seguir apresenta-se a formulação de sólido introduzindo o conceito de tensor. Apesar de uma das vantagens de se empregar tensores é obter expressões gerais para qualquer sistema de coordenadas, utilizam-se a seguir coordenadas cartesianas (x, y, z) para manter compatibilidade com a notação empregada na primeira parte deste capítulo.

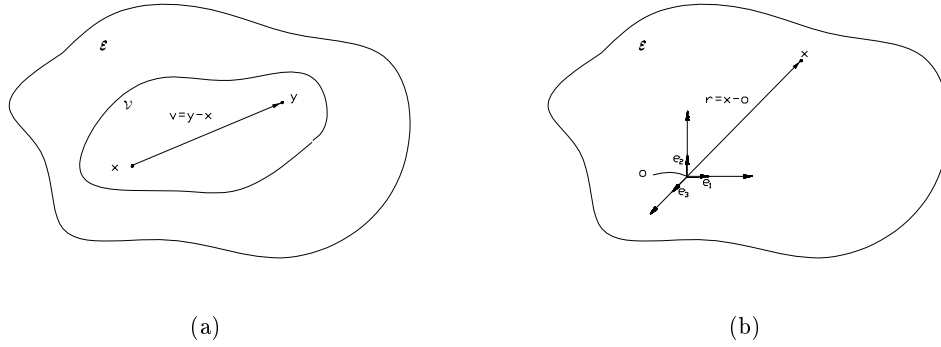


Figura 1.8: Definição de Vetores e Sistemas de Referência

1.9.3 Cinemática

Como visto na Seção 1.2, a cinemática de um corpo sólido é descrita por um campo vetorial \mathbf{u} , o qual para cada ponto do corpo, com coordenadas (x, y, z) , fornece as componentes de deslocamento u, v e w nas direções $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ e \mathbf{e}_z , respectivamente. Logo, a cinemática de um sólido tridimensional em termos de deslocamento pode ser denotada como

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{array} \right\}. \quad (1.79)$$

1.9.4 Deformação

Seja $f(x)$ uma função da variável x . Assim, para cada valor de x , $f(x)$ fornece um número real ou escalar. Por exemplo, $f(x)$ pode representar o deslocamento axial num problema de barra, ou ainda o deslocamento transversal num problema de flexão de vigas. Pode-se expandir a função f na vizinhança de x utilizando a série de Taylor, ou seja,

$$f(y) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}d + \frac{1}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2}d^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^{(n)} f(x)}{dx^{(n)}}d^n + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} \quad (1.80)$$

$$= f(x) + \frac{df(x)}{dx}d + \mathcal{O}(d^2), \quad (1.81)$$

sendo $d = (y - x)$ e $\mathcal{O}(d^2)$ um termo de ordem d^2 . Isso significa que quando y se aproxima de x , ou seja, $d = (y - x)$ vai para zero, d^2 tende a zero mais rapidamente. Logo,

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{d^2}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{(y - x)^2}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} (y - x) = 0. \quad (1.82)$$

Suponha agora que f é uma função que fornece valores escalares, mas depende das variáveis x, y e z . Pode-se dizer que f depende do vetor posição $\mathbf{x} = (x, y, z)$ de um ponto do corpo sólido, denotando-se como $f = f(x, y, z) = f(\mathbf{x})$. Utilizando-se a série de Taylor, pode-se expandir f em torno de \mathbf{x} da seguinte maneira

$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f^T(\mathbf{x})\mathbf{d} + \mathcal{O}(\|\mathbf{d}\|^2), \quad (1.83)$$

sendo $\mathbf{d} = (\mathbf{y} - \mathbf{x})$ o vetor diferença entre as posições $\mathbf{y} = (x', y', z')$ e $\mathbf{x} = (x, y, z)$. A norma euclidiana de \mathbf{d} é indicada por $\|\mathbf{d}\|$ e $\|\mathbf{d}\|^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$. Assim, $\mathcal{O}(\|\mathbf{d}\|^2)$ é um termo de ordem $\|\mathbf{d}\|^2$.

Como f é agora uma função de 3 variáveis, a primeira derivada $\frac{df}{dx}$ em (1.81) é substituída pelo vetor gradiente de f , ou seja

$$\{\nabla f(\mathbf{x})\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial z} \end{array} \right\}. \quad (1.84)$$

Por sua vez, o termo $\mathcal{O}(\|\mathbf{d}\|^2)$ significa que o mesmo vai para zero mais rapidamente do que a norma $\|\mathbf{d}\|$ quando \mathbf{y} tende a \mathbf{x} , isto é,

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\|\mathbf{d}\|^2}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} = \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} = \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = 0. \quad (1.85)$$

Seja \mathbf{f} agora uma função vetorial dependente das variáveis x, y e z , ou seja, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Desta maneira, \mathbf{f} tem componentes nas direções x, y e z . Logo

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{x})\} = \left\{ \begin{array}{c} f_x(\mathbf{x}) \\ f_y(\mathbf{x}) \\ f_z(\mathbf{x}) \end{array} \right\}. \quad (1.86)$$

Expandindo \mathbf{f} em torno do ponto \mathbf{x} , tem-se que

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{d} + \mathcal{O}(\|\mathbf{d}\|^2). \quad (1.87)$$

Nesse caso, o gradiente de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é dado por

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial z} \end{array} \right]. \quad (1.88)$$

Por sua vez como \mathbf{f} é uma função vetorial, cada um dos componentes do lado direito da equação (??) é um vetor análogo ao da equação (1.84). Expandindo cada um dos componentes vem que

$$[\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})] = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_x(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial f_x(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial f_x(\mathbf{x})}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial z} \end{array} \right], \quad (1.89)$$

Assim, o gradiente de uma função vetorial \mathbf{f} dependente do vetor posição $\mathbf{x} = (x, y, z)$ é uma matriz de ordem 3. Na verdade a equação (1.89) é a representação matricial do tensor $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})$ segundo o sistema cartesiano. Observe que ao se multiplicar a representação matricial do tensor $\nabla \mathbf{f}$ dada em (1.89) por um vetor \mathbf{v} com componentes cartesianas (v_x, v_y, v_z) , tem-se como resultado um outro vetor, ou seja,

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_z}{\partial y} & \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} v_x \\ v_y \\ v_z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial f_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial f_x}{\partial z}v_z \\ \frac{\partial f_y}{\partial x}v_x + \frac{\partial f_y}{\partial y}v_y + \frac{\partial f_y}{\partial z}v_z \\ \frac{\partial f_z}{\partial x}v_x + \frac{\partial f_z}{\partial y}v_y + \frac{\partial f_z}{\partial z}v_z \end{array} \right\}.$$

Torna-se importante aqui estabelecer o conceito de tensor. De forma análoga ao caso de vetores, tem-se uma definição formal do conceito de tensor. Apenas quando se utiliza um sistema de coordenadas, pode-se falar das componentes de um tensor. Assim, formalmente, define-se um tensor \mathbf{T} como uma transformação linear do espaço vetorial \mathcal{V} em \mathcal{V} denotando-se como

$$\mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{v}. \quad (1.90)$$

Isto implica que ao se aplicar o tensor \mathbf{T} num vetor qualquer \mathbf{u} , tem-se como resultado o vetor \mathbf{v} . Como a transformação é linear, as seguintes propriedades são válidas

$$\mathbf{T}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{T}\mathbf{v}, \quad (1.91)$$

$$\mathbf{T}(\alpha \mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{T}\mathbf{u}), \quad (1.92)$$

sendo α um número escalar.

As equações (1.90) e (1.92) definem um tensor. Utilizando um sistema de coordenadas com uma base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, definem-se as componentes de \mathbf{T} como

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j.$$

Desta maneira, em termos de componentes as equações (1.90) e (1.92) são dadas, respectivamente, por

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \left(\alpha \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \right) = \alpha \left(\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \right).$$

A cinemática de um corpo sólido também é descrita por uma função vetorial \mathbf{u} dependente do vetor posição $\mathbf{x} = (x, y, z)$ como indicado em (1.79). Expandindo $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ na vizinhança de \mathbf{x} de forma análoga à equação (1.87) vem que

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{d} + \mathcal{O}(\|\mathbf{d}\|^2), \quad (1.93)$$

sendo $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})$ o gradiente do campo de deslocamentos calculado em \mathbf{x} , cuja representação no sistema cartesiano é dada por

$$[\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial z} \\ \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial z} \\ \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (1.94)$$

Como $\mathbf{d} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, tem-se que $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{d}$. Logo, a expressão (1.93) pode ser reescrita como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{d} + \mathcal{O}(\|\mathbf{d}\|^2). \quad (1.95)$$

Observe que o tensor gradiente do campo de deformação pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^T(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^T(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.96)$$

$$= \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}^T(\mathbf{x})] + \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}^T(\mathbf{x})]. \quad (1.97)$$

Neste caso, $\nabla \mathbf{u}^T(\mathbf{x})$ é o tensor transposto de $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Para se obter a representação matricial de $\nabla \mathbf{u}^T(\mathbf{x})$ no sistema cartesiano, basta trocar as linhas pelas colunas em (1.94), ou seja,

$$[\nabla \mathbf{u}^T(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial x} \\ \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial y} \\ \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial z} & \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial z} & \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (1.98)$$

Definem-se os tensores de deformação \mathbf{E} e rotação $\mathbf{\Omega}$ infinitesimais, respectivamente, como

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}^T(\mathbf{x})], \quad (1.99)$$

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}^T(\mathbf{x})]. \quad (1.100)$$

A representação matricial do tensor de pequenas deformações \mathbf{E} no sistema cartesiano é obtida substituindo (1.94) e (1.98) em (1.99). Efetuando as operações indicadas vem que

$$[\mathbf{E}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x} \right) & \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial z} + \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial z} + \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial y} \right) & \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (1.101)$$

Observa-se que as componentes cartesianas de $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ apresentam uma relação direta com as componentes de deformação deduzidas anteriormente na Seção ???. Logo, pode-se reescrever (1.101) como

$$[\mathbf{E}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}(\mathbf{x}) & \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{xy}(\mathbf{x}) & \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{xz}(\mathbf{x}) \\ \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{xy}(\mathbf{x}) & \varepsilon_{yy}(\mathbf{x}) & \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{yz}(\mathbf{x}) \\ \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{xz}(\mathbf{x}) & \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{yz}(\mathbf{x}) & \varepsilon_{zz}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (1.102)$$

É comum escrever o tensor de deformação infinitesimal da seguinte maneira

$$[\mathbf{E}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}(\mathbf{x}) & \gamma_{xy}(\mathbf{x}) & \gamma_{xz}(\mathbf{x}) \\ \gamma_{yx}(\mathbf{x}) & \varepsilon_{yy}(\mathbf{x}) & \gamma_{yz}(\mathbf{x}) \\ \gamma_{zx}(\mathbf{x}) & \gamma_{zy}(\mathbf{x}) & \varepsilon_{zz}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (1.103)$$

As componentes da diagonal principal $\varepsilon_{xx}(\mathbf{x})$, $\varepsilon_{yy}(\mathbf{x})$ e $\varepsilon_{zz}(\mathbf{x})$ representam as deformações específicas nas direções x , y e z calculadas no ponto \mathbf{x} . As componentes fora da diagonal principal são as componentes de deformação cisalhante ou distorção. O tensor \mathbf{E} é simétrico pois

$$\gamma_{xy}(\mathbf{x}) = \gamma_{yx}(\mathbf{x}), \quad \gamma_{xz}(\mathbf{x}) = \gamma_{zx}(\mathbf{x}), \quad \gamma_{yz}(\mathbf{x}) = \gamma_{zy}(\mathbf{x}). \quad (1.104)$$

Em geral, a simetria de um tensor \mathbf{T} é definida como

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \quad (1.105)$$

Em termos de componentes, isto implica que

$$T_{12} = T_{21}, \quad T_{13} = T_{31}, \quad T_{23} = T_{32}, \quad (1.106)$$

ou de forma geral

$$T_{ij} = T_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.107)$$

Lembre-se que a primeira letra em γ_{xy} indica o plano x , enquanto o subscrito y indica a direção da deformação. Analogamente, para γ_{xz} e γ_{yz} (veja Figura 1.4). Observe que as distorções totais $\bar{\gamma}_{xy}$, $\bar{\gamma}_{xz}$ e $\bar{\gamma}_{yz}$ nos planos xy , xz e yz dadas em (1.23) são duas vezes as respectivas distorções γ_{xy} , γ_{xz} e γ_{yz} , ou seja,

$$\bar{\gamma}_{xy}(\mathbf{x}) = 2\gamma_{xy}(\mathbf{x}), \quad \bar{\gamma}_{xz}(\mathbf{x}) = 2\gamma_{xz}(\mathbf{x}), \quad \bar{\gamma}_{yz}(\mathbf{x}) = 2\gamma_{yz}(\mathbf{x}). \quad (1.108)$$

Analogamente, obtém-se as componentes do tensor de rotação infinitesimal $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x})$ substituindo (1.94) e (1.98) em (1.100). Logo

$$[\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial y} - \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial z} - \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial y} - \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial z} - \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial z} - \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial z} - \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.109)$$

Pode-se escrever o tensor $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x})$ da seguinte maneira

$$[\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x})] = \begin{Bmatrix} 0 & -\Omega_z(\mathbf{x}) & \Omega_y(\mathbf{x}) \\ \Omega_z(\mathbf{x}) & 0 & -\Omega_x(\mathbf{x}) \\ -\Omega_y(\mathbf{x}) & \Omega_x(\mathbf{x}) & 0 \end{Bmatrix}, \quad (1.110)$$

pois $\Omega_x(\mathbf{x})$, $\Omega_y(\mathbf{x})$ e $\Omega_z(\mathbf{x})$ indicam as rotações infinitesimais de cada ponto \mathbf{x} em torno dos eixos cartesianos x , y e z respectivamente.

Para verificar que isto é verdadeiro, considere o elemento diferencial de um meio sólido sofrendo uma distorção γ_1 no plano xy , conforme mostrado na Figura 1.9a. Observe que a diagonal do elemento apresenta uma rotação Ω_1 em torno do eixo z no sentido anti-horário. Dos ângulos indicados na Figura 1.9a, as seguintes relações são válidas

$$2\beta = 2\alpha + \gamma_1 \Rightarrow \beta = a + \frac{1}{2}\gamma_1, \quad (1.111)$$

$$\beta + \Omega_1 = a + \gamma_1. \quad (1.112)$$

Substituindo (1.112) vem que

$$a + \frac{1}{2}\gamma_1 + \Omega_1 = a + \gamma_1 \Rightarrow \Omega_1 = \frac{1}{2}\gamma_1. \quad (1.113)$$

Considerando agora que o elemento sofra uma distorção γ_2 , mostrada na Figura 1.9b, tem-se que a diagonal do elemento apresenta uma rotação Ω_2 em torno de z no sentido horário e, portanto, de valor negativo. Da Figura 1.9b

$$2\beta = 2\alpha + \gamma_2 \Rightarrow \beta = a + \frac{1}{2}\gamma_2, \quad (1.114)$$

$$\beta - \Omega_2 = a + \gamma_2, \quad (1.115)$$

e substituindo (1.114) em (1.115)

$$\Omega_2 = -\frac{1}{2}\gamma_2. \quad (1.116)$$

Para o caso geral, onde o elemento sofre uma distorção total $\gamma_1 + \gamma_2$ (ver Figura 1.9c), a diagonal apresenta uma rotação rígida local $\Omega_z(\mathbf{x})$ dada por

$$\Omega_z(\mathbf{x}) = \Omega_1 + \Omega_2. \quad (1.117)$$

Substituindo (1.113) e (1.116) em (1.117) e lembrando que $\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$ e $\gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$ vem que

$$\Omega_z(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x} - \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial y} \right). \quad (1.118)$$

Analogamente, para os demais planos (ver Figuras 1.9d e 1.9e), tem-se que

$$\Omega_x(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial z} - \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial y} \right), \quad (1.119)$$

$$\Omega_y(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial z} - \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial x} \right). \quad (1.120)$$

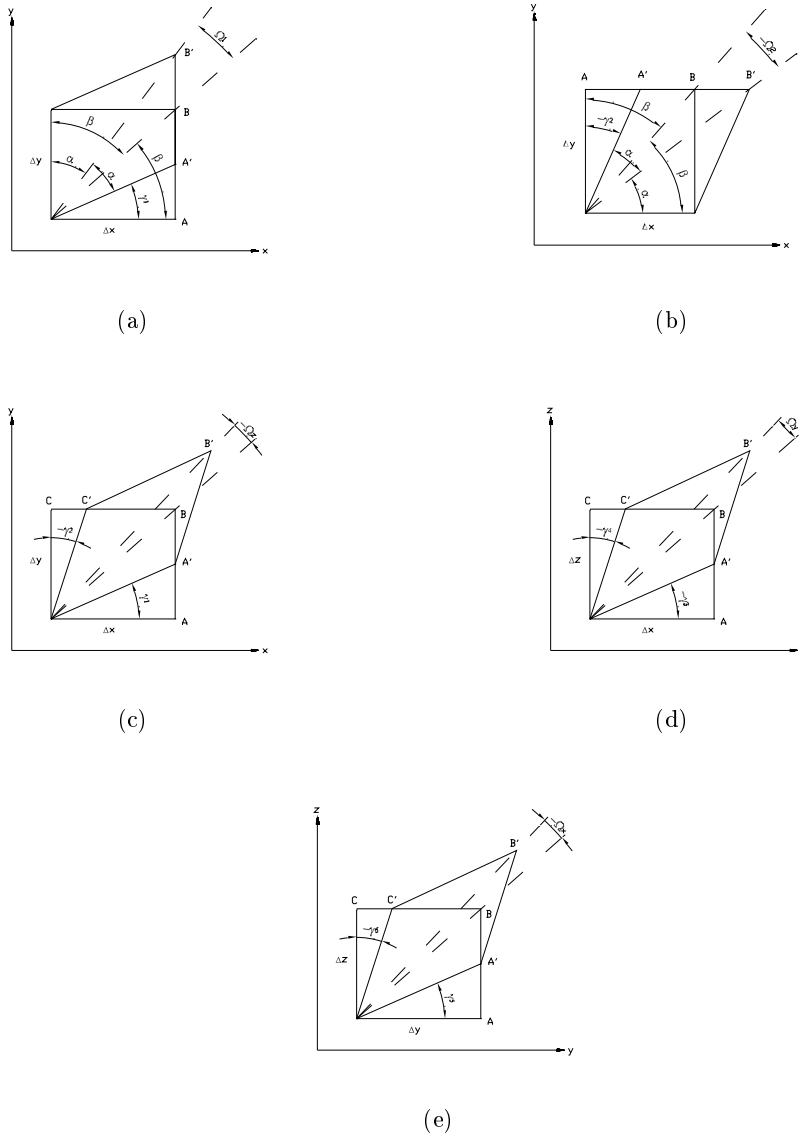


Figura 1.9: Rotações de Corpo Rígido

Observe ainda de (1.110) que o tensor $\mathbf{\Omega}(\mathbf{x})$ é anti-simétrico. De forma geral, um tensor \mathbf{T} é anti-simétrico se

$$\mathbf{T} = -\mathbf{T}^T. \quad (1.121)$$

Em termos de componentes, isto implica que

$$T_{12} = -T_{21}, \quad T_{13} = -T_{31}, \quad T_{23} = -T_{32}, \quad (1.122)$$

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0, \quad (1.123)$$

ou de forma geral, para $i, j = 1, 2, 3$

$$T_{ij} = -T_{ji}, \quad i \neq j, \quad (1.124)$$

$$T_{ij} = 0 \quad i = j. \quad (1.125)$$

Substituindo (1.99) e (1.100) em (1.97) tem-se que

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{\Omega}(\mathbf{x}), \quad (1.126)$$

ou seja, o tensor gradiente de deslocamento é dado pela soma de um tensor simétrico $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ e um tensor anti-simétrico $\mathbf{\Omega}(\mathbf{x})$. Esta decomposição é válida para qualquer tensor \mathbf{A} . Logo,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^S + \mathbf{A}^A, \quad (1.127)$$

sendo as partes simétrica \mathbf{A}^S e anti-simétrica \mathbf{A}^A de \mathbf{A} dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{A}^S = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T), \quad (1.128)$$

$$\mathbf{A}^A = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T). \quad (1.129)$$

Diz-se assim que \mathbf{E} e $\mathbf{\Omega}$ representam, respectivamente, as partes simétrica e anti-simétrica do gradiente de \mathbf{u} , denotando-as da seguinte forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \nabla^S \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad (1.130)$$

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{x}) = \nabla^A \mathbf{u}(\mathbf{x}). \quad (1.131)$$

Substituindo agora (1.126) em (1.95) vem que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{E}(\mathbf{x})\mathbf{d} + \mathbf{\Omega}(\mathbf{x})\mathbf{d} + \mathcal{O}(\|\mathbf{d}\|^2). \quad (1.132)$$

Esta relação é bastante importante, pois mostra que o campo de deslocamentos de um meio contínuo tridimensional contém uma parcela relativa à deformação infinitesimal, dada pelo tensor \mathbf{E} , e outra compreendendo uma rotação infinitesimal, dada pelo tensor $\mathbf{\Omega}$. Logo, apenas as componentes de deformação em \mathbf{E} não são suficientes para levar um corpo da sua configuração original até a sua configuração deformada. Uma rotação rígida infinitesimal ocorre na vizinhança de cada ponto do corpo.

Para ilustrar este fato considere a viga em balanço tratada como um corpo, conforme ilustrado na Figura 1.10a. Suponha que a viga seja construída de chapas unidas através de pinos. A Figura 1.10b ilustra a geometria deformada da viga conforme esperado. Removendo os pinos da parte superior e fletindo cada chapa separadamente, observa-se que, se a rotação rígida não estiver presente, a geometria deformada obtida não é correta (ver Figura 1.10c), a menos que exista uma rotação rígida dos pontos. Logo, este exemplo simples mostra que a parcela da rotação infinitesimal (1.132) está sempre presente quando um corpo sofre uma deformação.

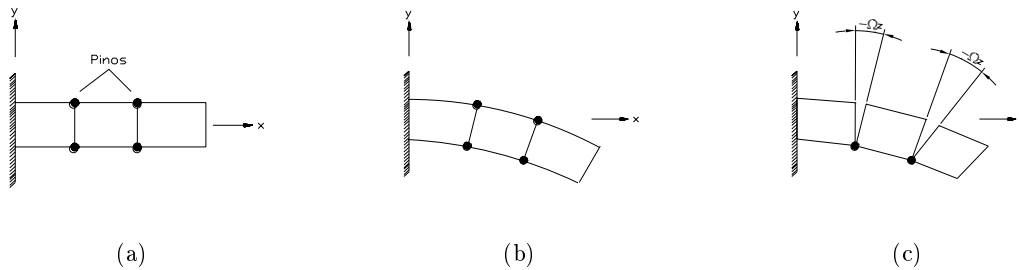


Figura 1.10: Interpretação da rotação rígida de uma viga.

Considerando agora que os pontos $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{d}$ e \mathbf{x} , ilustrados na Figura 1.11, estejam bem próximos, tem-se que a norma do vetor \mathbf{d} é bem pequena. Assim, na equação (1.132), despreza-se o termo $\mathcal{O}(\|\mathbf{d}\|^2)$ e obtém-se a seguinte expressão para o campo de deslocamentos infinitesimal na vizinhança de $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{d}$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{E}(\mathbf{x})\mathbf{d} + \mathbf{\Omega}(\mathbf{x})\mathbf{d}, \quad (1.133)$$

ou ainda,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{d}. \quad (1.134)$$

Pode-se utilizar a expressão anterior para mostrar que as componentes do tensor \mathbf{E} estão realmente relacionadas ao caso de pequenas deformações. Rescreve-se (1.134) como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{d}. \quad (1.135)$$

A partir da Figura 1.11, observa-se que

$$\mathbf{d}' = \mathbf{d} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}).$$

Substituindo (1.134) na expressão anterior vem que

$$\mathbf{d}' = \mathbf{d} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{d} = [\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})]\mathbf{d}, \quad (1.136)$$

sendo \mathbf{I} o tensor identidade cuja representação matricial é dada por

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.137)$$

Denominando agora

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad (1.138)$$

como o tensor gradiente de deformação, tem-se que (1.136) assume a seguinte forma

$$\mathbf{d}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{d}. \quad (1.139)$$

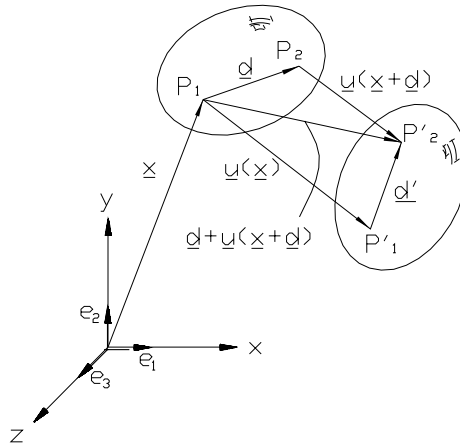


Figura 1.11: Deformação de um Corpo Sólido

A equação (1.139) permite determinar a distância \mathbf{d}' entre P'_1 e P'_2 após a deformação, através do tensor \mathbf{F} e da distância inicial \mathbf{d} . Para se obter a deformação do ponto P_1 , basta tomar a diferença entre os comprimentos dos vetores \mathbf{d}' e \mathbf{d} . Lembre-se que o comprimento $\|\mathbf{v}\|^2$ de um vetor qualquer \mathbf{v} é obtido pelo produto escalar com ele mesmo, ou seja, $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Logo usando (1.139)

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d}' \cdot \mathbf{d}' - \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{d} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{d} - \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}. \quad (1.140)$$

Dado um tensor \mathbf{A} , tem-se que o transposto \mathbf{A}^T de \mathbf{A} é o único tensor com a seguinte propriedade

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.141)$$

para quaisquer vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} .

Com base nesse conceito, a expressão (1.140)

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{d} &= \mathbf{F}^T(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} \\ &= [\mathbf{F}^T(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{I}]\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (1.142)$$

Denominando

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[\mathbf{F}^T(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{I}], \quad (1.143)$$

como o tensor de deformação de Cauchy-Green, a equação (1.142) pode ser reescrita como

$$\Delta \mathbf{d} = 2\mathbf{E}^*(\mathbf{x})\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}. \quad (1.144)$$

Substituindo (1.138) em (1.143), vem que

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\{[\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})]^T[\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})] - \mathbf{I}\}. \quad (1.145)$$

Dados dois tensores \mathbf{A} e \mathbf{B} , tem-se que

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T. \quad (1.146)$$

Como $\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$, portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^*(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}\{[\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}^T(\mathbf{x})][\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})] - \mathbf{I}\} \\ &= \frac{1}{2}[\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}^T(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}^T(\mathbf{x})\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{I}] \\ &= \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}^T(\mathbf{x})] + \frac{1}{2}\nabla \mathbf{u}^T(\mathbf{x})\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\nabla \mathbf{u}^T(\mathbf{x})\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.147)$$

Com base na equação (1.147), pode-se observar que o tensor de Cauchy-Green fornece uma medida de deformação geral, aplicável tanto para pequenas quanto para grandes deformações. No entanto, para pequenas deformações as normas de \mathbf{u} e $\nabla \mathbf{u}$ são pequenas, ou seja, $\|\mathbf{u}\| < \varepsilon$ e $\|\nabla \mathbf{u}\| < \varepsilon$, com ε da ordem de 10^{-4} por exemplo. Neste caso, o termo não-linear $\frac{1}{2}\nabla \mathbf{u}^T(\mathbf{x})\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})$ torna-se desprezível e o tensor \mathbf{E}^* se reduz ao próprio tensor de deformação infinitesimal \mathbf{E} .

1.9.5 Movimentos de Corpo Rígido

Como se sabe, um corpo tridimensional tem 6 movimentos rígidos, correspondentes às 3 translações nas direções x , y e z e 3 rotações em torno dos eixos x , y e z , conforme Figura 1.12. Deseja-se verificar como as ações rígidas podem ser representadas utilizando os conceitos apresentados na seção anterior.

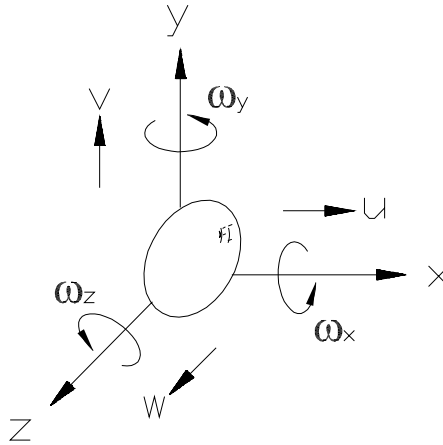


Figura 1.12: Movimentos de Corpo Rígido

Uma deformação é homogênea se o gradiente do campo de deslocamento $\nabla \mathbf{u}$ é constante para todos os pontos \mathbf{x} do corpo, indicando-se $\nabla \mathbf{u} = \nabla \mathbf{u}_0$. Nesse caso, a expressão (1.95) simplifica-se para

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}_0 \mathbf{d}. \quad (1.148)$$

Observa-se que o termo $\mathcal{O}(\|\mathbf{d}\|^2)$ é nulo pois sendo $\nabla \mathbf{u}_0$ constante, os demais termos da série de Taylor são automaticamente iguais a zero.

Como exemplo de deformação homogênea, tem-se uma translação a partir de uma posição. Como todos os pontos do corpo sofrem um mesmo deslocamento, ver Figura 1.11, logo

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}). \quad (1.149)$$

Substituindo esta relação em (1.148), tem-se que

$$\nabla \mathbf{u}_0 \mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad (1.150)$$

Como \mathbf{d} é a distância entre dois pontos arbitrários do corpo, então a expressão anterior é nula se

$$\nabla \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}. \quad (1.151)$$

Dessa forma, como o gradiente do campo de deslocamentos é nulo, tem-se que o campo de deslocamentos \mathbf{u}_0 para uma translação é constante para todos os pontos do corpo, ou seja,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix}, \quad (1.152)$$

sendo u_0, v_0 e w_0 as componentes de translação nas direções x, y e z . Como u_0, v_0 e w_0 são constantes, as respectivas componentes do tensor de deformação \mathbf{E} são nulas, o que caracteriza um movimento de corpo rígido.

Considere agora uma rotação rígida do corpo em torno do ponto P_1 . Além disso, suponha que o sistema de referência cartesiano esteja centrado em P_1 , conforme ilustrado na Figura 1.13. Nesse caso, o deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ do ponto P_1 na equação (1.148) é nulo. Logo,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{d}. \quad (1.153)$$

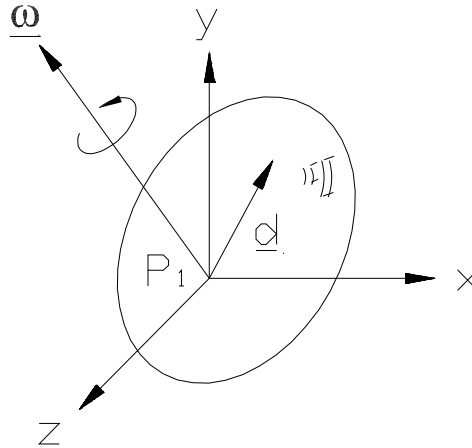


Figura 1.13: Rotação Rígida Local

Como o movimento é rígido, a parte simétrica de $\nabla \mathbf{u}$, ou seja, o tensor de deformação infinitesimal \mathbf{E} é nulo. Portanto,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \mathbf{\Omega} \mathbf{d}. \quad (1.154)$$

Associado a todo tensor anti-simétrico $\mathbf{\Omega}$, existe um vetor axial $\boldsymbol{\omega}$, tal que

$$\mathbf{\Omega} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (1.155)$$

para todo vetor $\mathbf{v} = \{v_1 \ v_2 \ v_3\}^T$. Nesse caso, as componentes do vetor $\boldsymbol{\omega}$, são Ω_x, Ω_y e Ω_z , ou seja, as rotações rígidas em torno dos eixos x, y e z . Para verificar isto, basta expandir os dois lados, isto é,

$$\mathbf{\Omega} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_3 \Omega_y - v_2 \Omega_z \\ v_1 \Omega_z - v_3 \Omega_x \\ v_2 \Omega_x - v_1 \Omega_y \end{Bmatrix}, \quad (1.156)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_3\omega_2 - v_2\omega_3 \\ v_1\omega_3 - v_3\omega_1 \\ v_2\omega_1 - v_1\omega_2 \end{Bmatrix}. \quad (1.157)$$

Portanto,

$$\begin{cases} \omega_1 = \Omega_x \\ \omega_2 = \Omega_y \\ \omega_3 = \Omega_z \end{cases}. \quad (1.158)$$

Com base nesses resultados, pode-se escrever

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}. \quad (1.159)$$

Logo, um movimento geral de corpo rígido será dado pela superposição dos movimentos de translação e rotação, expressos por (1.152) e (1.159). Assim uma ação rígida geral pode ser escrita como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}, \quad (1.160)$$

como obtido anteriormente na Seção 1.4.

1.9.6 Trabalho Interno

No caso geral de pequenas deformações num sólido, o estado de deformação em cada ponto é dado pelas 9 componentes indicadas em (1.103). Associadas às deformações normais $\varepsilon_{xx}(\mathbf{x})$, $\varepsilon_{yy}(\mathbf{x})$ e $\varepsilon_{zz}(\mathbf{x})$, tem-se as respectivas componentes de tensão normal $\sigma_{xx}(\mathbf{x})$, $\sigma_{yy}(\mathbf{x})$ e $\sigma_{zz}(\mathbf{x})$ representando, respectivamente, o estado das forças internas no ponto \mathbf{x} nas direções x , y e z . Da mesma maneira, associadas às distorções $\gamma_{xy}(\mathbf{x})$, $\gamma_{yx}(\mathbf{x})$, $\gamma_{xz}(\mathbf{x})$, $\gamma_{zx}(\mathbf{x})$, $\gamma_{yz}(\mathbf{x})$ e $\gamma_{zy}(\mathbf{x})$, tem-se as 6 componentes de tensão de cisalhamento $\tau_{xy}(\mathbf{x})$, $\tau_{yx}(\mathbf{x})$, $\tau_{xz}(\mathbf{x})$, $\tau_{zx}(\mathbf{x})$, $\tau_{yz}(\mathbf{x})$ e $\tau_{zy}(\mathbf{x})$, fornecendo o estado das forças internas cisalhantes no ponto \mathbf{x} segundo os planos xy , xz e yz . Assim, o estado de tensão em cada ponto de um corpo sólido segundo um sistema cartesiano é dado pelas 9 componentes de tensão ilustradas em Figura 1.14.

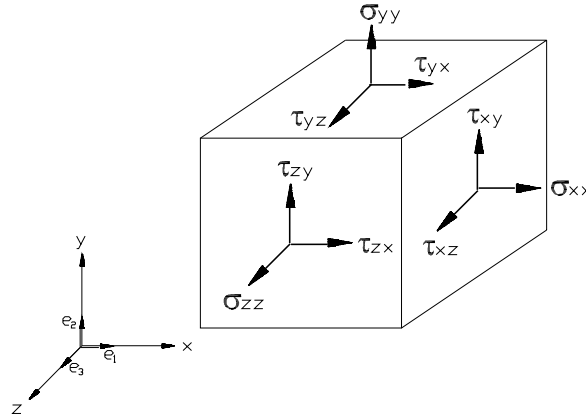


Figura 1.14: Estado de Tensões em um ponto de um corpo sólido.

A partir daí, a expressão geral do trabalho interno para um corpo tridimensional é escrita como

$$T_i = - \int_V [\sigma_{xx}(\mathbf{x})\varepsilon_{xx}(\mathbf{x}) + \sigma_{yy}(\mathbf{x})\varepsilon_{yy}(\mathbf{x}) + \sigma_{zz}(\mathbf{x})\varepsilon_{zz}(\mathbf{x}) + \tau_{xy}(\mathbf{x})\gamma_{xy}(\mathbf{x}) + \tau_{yx}(\mathbf{x})\gamma_{yx}(\mathbf{x}) + \tau_{xz}(\mathbf{x})\gamma_{xz}(\mathbf{x}) + \tau_{zx}(\mathbf{x})\gamma_{zx}(\mathbf{x}) + \tau_{yz}(\mathbf{x})\gamma_{yz}(\mathbf{x}) + \tau_{zy}(\mathbf{x})\gamma_{zy}(\mathbf{x})] dV. \quad (1.161)$$

$$+ \tau_{zx}(\mathbf{x})\gamma_{zx}(\mathbf{x}) + \tau_{yz}(\mathbf{x})\gamma_{yz}(\mathbf{x}) + \tau_{zy}(\mathbf{x})\gamma_{zy}(\mathbf{x})] dV. \quad (1.162)$$

O integrando da expressão anterior representa uma densidade de trabalho interno. Para verificar

este fato, faz-se uma análise dimensional do termo $\sigma_{xx}(\mathbf{x})\varepsilon_{xx}(\mathbf{x})$. Admitindo que a tensão é dada em $\left[\frac{N}{m^2}\right]$, tem-se que

$$[\sigma_{xx}(\mathbf{x})\varepsilon_{xx}(\mathbf{x})] = \left[\frac{N}{m^2}\right] \left[\frac{m}{m}\right] = \left[\frac{Nm}{m^3}\right]. \quad (1.163)$$

Logo, a unidade do termo $\sigma_{xx}(\mathbf{x})\varepsilon_{xx}(\mathbf{x})$ é dada como trabalho por unidade de volume.

Denotando por t_i a densidade de trabalho interno, ou seja,

$$\begin{aligned} t_i = & \sigma_{xx}(\mathbf{x})\varepsilon_{xx}(\mathbf{x}) + \sigma_{yy}(\mathbf{x})\varepsilon_{yy}(\mathbf{x}) + \sigma_{zz}(\mathbf{x})\varepsilon_{zz}(\mathbf{x}) \\ & + \tau_{xy}(\mathbf{x})\gamma_{xy}(\mathbf{x}) + \tau_{yx}(\mathbf{x})\gamma_{yx}(\mathbf{x}) + \tau_{xz}(\mathbf{x})\gamma_{xz}(\mathbf{x}) \\ & + \tau_{zx}(\mathbf{x})\gamma_{zx}(\mathbf{x}) + \tau_{yz}(\mathbf{x})\gamma_{yz}(\mathbf{x}) + \tau_{zy}(\mathbf{x})\gamma_{zy}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (1.164)$$

tem-se que a expressão (1.162) pode ser reescrita como

$$T_i = - \int_V t_i dV. \quad (1.165)$$

Denotam-se as componentes de tensão no ponto \mathbf{x} através do tensor de tensões de Cauchy $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, cuja representação matricial no sistema cartesiano é a seguinte

$$[\mathbf{T}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(\mathbf{x}) & \tau_{xy}(\mathbf{x}) & \tau_{xz}(\mathbf{x}) \\ \tau_{yx}(\mathbf{x}) & \sigma_{yy}(\mathbf{x}) & \tau_{yz}(\mathbf{x}) \\ \tau_{zx}(\mathbf{x}) & \tau_{zy}(\mathbf{x}) & \sigma_{zz}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (1.166)$$

O tensor de tensões de Cauchy \mathbf{T} representa o estado interno de tensões para cada ponto \mathbf{x} de coordenadas x, y e z de um sólido tridimensional.

Sabe-se que *produto escalar* de dois vetores $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$ é calculado como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \quad (1.167)$$

Este produto escalar de vetores é um caso particular do conceito mais geral de *produto interno*, o qual pode ser aplicado a outras entidades matemáticas, tais como funções e tensores. Observa-se também que o produto interno de vetores é comutativo, ou seja,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \quad (1.168)$$

Tomando-se os tensores de pequenas deformações \mathbf{E} e de tensões \mathbf{T} , o produto interno $\mathbf{E} \cdot \mathbf{T}$ é definido como

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{T} = \text{tr}(\mathbf{E}^T \mathbf{T}), \quad (1.169)$$

sendo *tr* o *traço* de um tensor, o qual é dado pela soma dos termos da diagonal principal. Substituindo as componentes cartesianas de \mathbf{E} e \mathbf{T} e efetuando o produto

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} &= \text{tr} \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \right) \\ &= \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yx}\gamma_{yx} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zy}\gamma_{zy}. \end{aligned} \quad (1.170)$$

Comparando este resultado com (1.164), observa-se que a densidade de trabalho interno t_i é o próprio produto interno $\mathbf{E} \cdot \mathbf{T}$, ou seja,

$$t_i = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}). \quad (1.171)$$

Assim, pode-se escrever a expressão final do trabalho interno da seguinte forma

$$T_i = - \int_V \mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) dV. \quad (1.172)$$

Uma constatação importante da Mecânica dos Meios Contínuos é que o tensor de tensões de Cauchy é simétrico. A simetria de \mathbf{T} é um dos resultados mais importantes do conhecido *Teorema de Cauchy*. Para verificar este fato, considera-se o trabalho interno associado a um movimento de corpo rígido. Para um movimento de corpo rígido as componentes de deformação são nulas. Sabe-se ainda

que o trabalho interno de deformação associado a uma rotação de corpo rígido deve ser nulo, portanto

$$\begin{aligned} T_i &= \int_V \mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) dV + \int_V \mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}) dV \\ T_i &= \int_V \mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}) dV = 0. \end{aligned}$$

Expandindo o produto interno indicado tem-se que

$$T_i = \int_V \{ [\tau_{yx}(\mathbf{x}) - \tau_{xy}(\mathbf{x})] \Omega_z + [\tau_{xz}(\mathbf{x}) - \tau_{zx}(\mathbf{x})] \Omega_y + [\tau_{yz}(\mathbf{x}) - \tau_{zy}(\mathbf{x})] \Omega_x \} dV = 0.$$

Para que a expressão anterior seja verdadeira tem-se que o integrando deve ser nulo, assim

$$[\tau_{yx}(\mathbf{x}) - \tau_{xy}(\mathbf{x})] \Omega_z + [\tau_{xz}(\mathbf{x}) - \tau_{zx}(\mathbf{x})] \Omega_y + [\tau_{yz}(\mathbf{x}) - \tau_{zy}(\mathbf{x})] \Omega_x = 0.$$

Como as componentes Ω_x, Ω_y e Ω_z são arbitrárias, a expressão anterior só é satisfeita quando

$$\begin{cases} \tau_{xy}(\mathbf{x}) = \tau_{yx}(\mathbf{x}) \\ \tau_{xz}(\mathbf{x}) = \tau_{zx}(\mathbf{x}) \\ \tau_{yz}(\mathbf{x}) = \tau_{zy}(\mathbf{x}) \end{cases} .$$

Este resultado implica que o tensor de tensões de Cauchy \mathbf{T} é simétrico, ou seja, $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$. Dessa forma, são necessárias apenas 6 componentes para se estabelecer por completo o estado de tensões de um ponto qualquer de um corpo sólido.

Um outro importante resultado é que o produto interno de um tensor simétrico \mathbf{A} por um tensor antisimétrico \mathbf{B} é sempre nulo, ou seja,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Resta agora integrar por partes a expressão do trabalho interno. Para isso, definem-se os conceitos de divergência de um vetor e de um tensor.

Dado um vetor \mathbf{v} , define-se o seu divergente como

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{v}). \quad (1.173)$$

Expandindo a expressão anterior em termos das componentes cartesianas de $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$, tem-se que

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{tr} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix} \right) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}, \quad (1.174)$$

ou ainda,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \right\} = \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Por sua vez, a divergência de um tensor \mathbf{A} é definida como

$$(\operatorname{div} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} = \operatorname{div} (\mathbf{A}^T \mathbf{v}). \quad (1.175)$$

Desenvolvendo o lado direito da expressão anterior

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} &= \operatorname{div} \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \right) \\ &= \operatorname{div} \left\{ \begin{array}{c} A_{11}v_1 + A_{21}v_2 + A_{31}v_3 \\ A_{12}v_1 + A_{22}v_2 + A_{32}v_3 \\ A_{13}v_1 + A_{23}v_2 + A_{33}v_3 \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (1.176)$$

Aplicando agora o conceito de divergência de um vetor

$$(\operatorname{div} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} A_{11}v_1 + A_{21}v_2 + A_{31}v_3 \\ A_{12}v_1 + A_{22}v_2 + A_{23}v_3 \\ A_{13}v_1 + A_{23}v_2 + A_{33}v_3 \end{array} \right\}. \quad (1.177)$$

Realizando o produto escalar e colocando v_1, v_2 e v_3 em evidência

$$(\operatorname{div} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{c} (\frac{\partial A_{11}}{\partial x} + \frac{\partial A_{12}}{\partial y} + \frac{\partial A_{13}}{\partial z}) \\ (\frac{\partial A_{21}}{\partial x} + \frac{\partial A_{22}}{\partial y} + \frac{\partial A_{23}}{\partial z}) \\ (\frac{\partial A_{31}}{\partial x} + \frac{\partial A_{32}}{\partial y} + \frac{\partial A_{33}}{\partial z}) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \right\}.$$

Portanto,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \left\{ \begin{array}{c} (\frac{\partial A_{11}}{\partial x} + \frac{\partial A_{12}}{\partial y} + \frac{\partial A_{13}}{\partial z}) \\ (\frac{\partial A_{21}}{\partial x} + \frac{\partial A_{22}}{\partial y} + \frac{\partial A_{23}}{\partial z}) \\ (\frac{\partial A_{31}}{\partial x} + \frac{\partial A_{32}}{\partial y} + \frac{\partial A_{33}}{\partial z}) \end{array} \right\}. \quad (1.178)$$

Observe que a divergência de um vetor é um número escalar, enquanto a divergência de um tensor é um vetor.

Se \mathbf{A} um tensor e \mathbf{u} um vetor, a seguinte relação é válida

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{u} = \operatorname{div} (\mathbf{A}^T \mathbf{u}) - (\operatorname{div} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{u}. \quad (1.179)$$

Usando esta relação em (1.172) e lembrando que $\mathbf{E} = \nabla^S \mathbf{u}$ e $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$

$$\begin{aligned} T_i &= - \int_V \left[\operatorname{div} (\mathbf{T}^T(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})) - (\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right] dV \\ &= \int_V (\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dV - \int_V \operatorname{div} (\mathbf{T}\mathbf{u}(\mathbf{x})) dV. \end{aligned} \quad (1.180)$$

O *teorema da divergência* permite transformar uma integral ao longo do volume V numa integral ao longo da superfície S do corpo. Sendo \mathbf{v} um campo vetorial, este teorema implica que

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) dV = \int_S \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS, \quad (1.181)$$

sendo \mathbf{n} o campo vetorial das normais à superfície S .

Aplicando este teorema na segunda integral da equação (1.180) vem que

$$\int_V \operatorname{div} (\mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})) dV = \int_S (\mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS. \quad (1.182)$$

Usando a definição de tensor transposto (1.141) e a simetria de \mathbf{T}

$$\int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}^T(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = \int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = \int_S \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS. \quad (1.183)$$

Substituindo este resultado em (1.180), obtém-se

$$T_i = \int_V (\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dV - \int_S \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS, \quad (1.184)$$

que representa a integração por partes da expressão do trabalho interno na forma tensorial.

1.9.7 Aplicação do PTV

Conforme visto na Seção ??, a expressão do trabalho externo compatível com (1.184) é dada por

$$T_e = \int_V \mathbf{b}^T(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) dV + \int_S \mathbf{t}^T(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) dS, \quad (1.185)$$

sendo \mathbf{b} e \mathbf{t} , respectivamente, a densidade de força externa por volume e a carga externa distribuída na superfície do sólido e $\hat{\mathbf{u}}$ uma dada ação cinemática virtual. Aplicando o PTV

$$T_e + T_i = 0, \quad (1.186)$$

e reagrupando os termos de forma conveniente, tem-se

$$\int_V (\text{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})) \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) dV + \int_S (-\mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \mathbf{t}(\mathbf{x})) \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) dS = 0, \quad (1.187)$$

para todo deslocamento virtual $\hat{\mathbf{u}}$. Para que a expressão anterior seja nula, considerando que $\hat{\mathbf{u}}$ é arbitrário, os termos entre parênteses devem ser simultaneamente nulos, ou seja,

$$\begin{cases} \text{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}) \end{cases}. \quad (1.188)$$

As equações anteriores representam o mesmo Problema de Valor de Contorno (PVC) em termos de tensão, obtido em na Seção ?. No entanto, (1.188) é, sem dúvida, uma apresentação mais compacta e elegante para o problema de equilíbrio de corpos tridimensionais. Além disto, a notação anterior é abstrata, pois é válida para qualquer sistema de coordenadas adotado. Como observado anteriormente, o PVC (1.188) é válido para qualquer meio contínuo (sólido, líquido ou gás) em pequenas deformações.

1.9.8 Aplicação da Equação Constitutiva

A Lei de Hooke geral dada em (1.70) na Seção ??, pode ser escrita tensorialmente como

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = 2\mu \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \lambda e(\mathbf{x}) \mathbf{I}, \quad (1.189)$$

sendo \mathbf{T} o tensor de tensões de Cauchy, \mathbf{E} o tensor de pequenas deformações, \mathbf{I} o tensor identidade, $e(\mathbf{x}) = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ a dilatação e μ e λ os coeficientes de Lamé.

Para verificar que (1.70) e (1.189) são idênticas, expande-se (1.189) segundo o sistema de coordenadas cartesiano, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}(\mathbf{x}) & \tau_{xy}(\mathbf{x}) & \tau_{xz}(\mathbf{x}) \\ \tau_{yx}(\mathbf{x}) & \sigma_{yy}(\mathbf{x}) & \tau_{yz}(\mathbf{x}) \\ \tau_{zx}(\mathbf{x}) & \tau_{zy}(\mathbf{x}) & \sigma_{zz}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = 2\mu \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}(\mathbf{x}) & \gamma_{xy}(\mathbf{x}) & \gamma_{xz}(\mathbf{x}) \\ \gamma_{yx}(\mathbf{x}) & \varepsilon_{yy}(\mathbf{x}) & \gamma_{yz}(\mathbf{x}) \\ \gamma_{zx}(\mathbf{x}) & \gamma_{zy}(\mathbf{x}) & \varepsilon_{zz}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \lambda e(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.190)$$

Por exemplo,

$$\sigma_{xx}(\mathbf{x}) = 2\mu \varepsilon_{xx}(\mathbf{x}) + \lambda e(\mathbf{x}),$$

$$\tau_{xy}(\mathbf{x}) = 2\mu \gamma_{xy}(\mathbf{x}),$$

as quais são as mesmas expressões que são obtidas a partir de (1.70).

O PVC de equilíbrio em (1.188) está dado em termos das componentes de tensão. Para obter as equações de Navier em termos dos deslocamentos, basta substituir (1.189) em (1.188). Logo

$$\text{div} [2\mu \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \lambda e(\mathbf{x}) \mathbf{I}] + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (1.191)$$

Como os coeficientes de Lamé são constantes, a divergência é um operador linear e \mathbf{E} é função de $\nabla \mathbf{u}$, pode-se escrever

$$\mu \text{div} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mu \text{div} \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \lambda \text{div} e(\mathbf{x}) \mathbf{I} + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (1.192)$$

Analisando o primeiro termo da expressão anterior, tem-se que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \operatorname{div} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{array} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \\ w(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (1.193)$$

sendo Δ o operador *Laplaciano*.

Para o segundo termo de (1.192), a seguinte expressão é válida

$$\operatorname{div} \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x})). \quad (1.194)$$

Por sua vez,

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial z} = \varepsilon_{xx}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{yy}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{zz}(\mathbf{x}) = e(\mathbf{x}). \quad (1.195)$$

Logo,

$$\operatorname{div} \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla e(\mathbf{x}). \quad (1.196)$$

Para o terceiro termo de (1.192) observa-se o seguinte

$$\operatorname{div} e(\mathbf{x})\mathbf{I} = \operatorname{div} \begin{bmatrix} e(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & e(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & e(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial x} \\ \frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial y} \\ \frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial z} \end{array} \right\} = \nabla e(\mathbf{x}). \quad (1.197)$$

Substituindo (1.193), (1.196) e (1.197) em (1.192), tem-se as equações de Navier válidas para um sólido de Hooke em notação tensorial, isto é,

$$\mu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) + (\mu + \lambda) \nabla e(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (1.198)$$

Expandindo a equação anterior no sistema cartesiano, obtém-se as mesmas 3 equações dadas em (1.76).

Capítulo 2

Casos Particulares

Neste capítulo serão exemplificados os resultados obtidos com a formulação geral de sólidos tridimensionais, considerando os modelos unidimensionais de problemas de barra, viga e torção, deduzidos do modelo mais geral, levando-se em conta as hipóteses cinemáticas simplificadoras para cada caso.

2.1 Barra

Pode-se definir como barra, um elemento estrutural, cuja principal característica geométrica é possuir o comprimento bem maior que as dimensões da seção transversal. No caso de barra submetidas a esforços de tração e/ou compressão, considera-se a barra como sendo um elemento unidimensional e analisa-se o seu comportamento ao longo da direção paralela à dimensão longitudinal, ou seja, no caso do sistema cartesiano, a direção do eixo x .

2.1.1 Cinemática

A cinemática do modelo de barra consiste de ações de movimento axiais, ou seja, as seções transversais permanecem perpendiculares ao eixo da barra, após a deformação. As ações de movimento rígido correspondem à translações na direção do eixo x , nesse caso

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \\ w(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u}(x) = \begin{Bmatrix} u(x) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.1)$$

Assim, só existem ações cinemáticas ao longo do eixo x , sendo agora as componentes $v(\mathbf{x})$ e $w(\mathbf{x})$ nulas e o vetor deslocamento somente dependente da direção x .

2.1.2 Deformação

Com base na hipótese cinemática anterior, o tensor de pequenas deformações se reduz a

$$[\mathbf{E}(\mathbf{x})] = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} \frac{du(x)}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

ou seja

$$[\mathbf{E}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

2.1.3 Trabalho Interno

Associada a deformação $\varepsilon_{xx}(x)$ deve existir, nesse caso, somente a componente de tensão normal $\sigma_{xx}(x)$, assim o tensor de tensões de Cauchy se reduz a

$$[\mathbf{T}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Consequentemente, a expressão do Trabalho Interno para o problema da barra é dada por

$$\begin{aligned} T_i &= - \int_V \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} = - \int_V \sigma_{xx}(x) \varepsilon_{xx}(x) dV \\ &= - \int_V \sigma_{xx}(x) \frac{du(x)}{dx} dV = - \int_0^L \left(\int_A \sigma_{xx}(x) dA \right) \frac{du(x)}{dx} dx \\ &= - \int_0^L \sigma_{xx}(x) A \frac{du(x)}{dx} dx = - \int_0^L N_x(x) \frac{du(x)}{dx} dx, \end{aligned} \quad (2.5)$$

sendo L o comprimento da barra, A a área da seção transversal, considerada constante ao longo do comprimento, e $N_x(x) = \sigma_{xx}(x)A$ a força interna normal à superfície da seção transversal.

Integrando por partes a expressão do trabalho interno, vem

$$T_i = \int_0^L \frac{dN_x(x)}{dx} u(x) dx - N_x(L)u(L) + N_x(0)u(0). \quad (2.6)$$

2.1.4 PTV

A fim de se avaliar os esforços externos agindo sobre a barra, será aplicado o PTV, assim

$$T_e + T_i = 0. \quad (2.7)$$

Portanto, os trabalho externo compatível com a cinemática da barra, para qualquer ação cinemática virtual $\hat{u}(x)$ deve ser

$$T_e = \int_0^L p(x) \hat{u}(x) dx + P_L \hat{u}(L) + P_0(0) \hat{u}(0),$$

sendo $p(x)$ a carga externa distribuída por unidade de comprimento axialmente sobre a barra e P_L e P_0 os esforços externos axiais concentrados nas extremidades em $x = 0$ e $x = L$.

Dessa forma, através do equilíbrio entre os trabalhos externo e interno, pode-se estabelecer o problema de valor de contorno para uma barra submetida a carregamentos axiais da seguinte maneira

$$\begin{cases} \frac{dN_x(x)}{dx} = A \frac{d\sigma_{xx}(x)}{dx} = -p(x) & \text{para } x \in (0, L) \\ N_x(0) = P_0 & \text{em } x = 0 \\ N_x(L) = P_L & \text{em } x = L \end{cases}. \quad (2.8)$$

2.1.5 Aplicação da Equação Constitutiva

Apesar de existirem, para o caso tridimensional as componentes de tensão σ_{yy} e σ_{zz} e as componentes de deformação ε_{yy} e ε_{zz} , devido ao efeito de Poisson, no caso unidimensional, esses efeitos são desconsiderados, dessa forma, para o modelo de barra a lei de Hooke simplifica-se para

$$\sigma_{xx} = (2\mu + \lambda) \varepsilon_{xx} \quad (2.9)$$

ou, lembrando-se que,

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (2.10)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (2.11)$$

tem-se a lei de Hooke simplificada para o modelo unidimensional de barra

$$\sigma_{xx}(x) = E\varepsilon_{xx}(x) = E \frac{du(x)}{dx} \quad (2.12)$$

Substituindo essa equação no PVC do modelo de barra tem-se que

$$\begin{aligned} A \frac{d}{dx} \left(E \frac{du(x)}{dx} \right) &= -p(x) \\ EA \frac{d^2u(x)}{dx^2} &= -p(x), \end{aligned} \quad (2.13)$$

considerando E constante. Assim o problema de valor de contorno para uma barra segundo a lei de Hooke é

$$\begin{cases} EA \frac{d^2u(x)}{dx^2} = -p(x) & \text{para } x \in (0, L) \\ u(0) = u_0 & \text{em } x = 0 \\ u(L) = u_L & \text{em } x = L \end{cases} . \quad (2.14)$$

Verifica-se que as equações de Navier, permitem a obtenção do mesmo resultado, lembrando-se que ε_{yy} e ε_{zz} são desconsiderados no modelo unidimensional, assim

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_x &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{d\varepsilon_{xx}}{dx} + \mu \frac{d^2u}{dx^2} + b_x &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) + \mu \frac{d^2u}{dx^2} + b_x &= 0 \\ (2\mu + \lambda) \frac{d^2u}{dx^2} &= -b_x \\ E \frac{d^2u}{dx^2} &= -b_x, \end{aligned} \quad (2.15)$$

sendo admitidas somente forças de corpo na direção longitudinal da barra. Considerando o peso próprio distribuído ao longo do volume

$$b_x = \frac{\rho(x)g}{A},$$

sendo $\rho(x)$ a massa específica por unidade de comprimento g a aceleração da gravidade local e A a área de seção transversal da barra, tem-se que a equação (2.15) se reduz para

$$EA \frac{d^2u}{dx^2} = -\rho(x)g, \quad (2.16)$$

que é um resultado equivalente ao obtido em (2.13).

2.2 Flexão Pura em Vigas Prismáticas

O modelo de viga, assim como a barra, é um modelo unidimensional, pois considera a dimensão longitudinal muito maior que as dimensões da seção transversal. Será apresentado nessa seção o modelo de viga de Euler-Bernoulli que desconsidera os efeitos de cisalhamento, o que é razoável para vigas de grande comprimento. Se forem considerados os efeitos de cisalhamento, nesse caso trata-se do modelo de viga de Timoshenko.

2.2.1 Cinemática

Na teoria de Euler-Bernoulli ou flexão pura, consideram-se vigas prismáticas uniformes (de seção transversal constante) com comprimento longitudinal como dimensão predominante. Nesse caso, o interesse é focado em ações de movimento chamadas de *ações de flexão*, ou seja, deslocamentos

transversais na direção do eixo y do sistema cartesiano, associados a rotações das seções transversais em torno do eixo z .

A hipótese cinemática do modelo de Euler-Bernoulli consiste em supor que as ações de movimento possíveis devem ser tais que as seções permanecem planas, indeformadas e ortogonais ao eixo x da viga, antes e depois da configuração deformada. Resumidamente, duas seções paralelas permanecem paralelas após a deformação. Dessa forma, pode-se mostrar que o campo de deslocamentos deduzido a partir dessas hipóteses é

$$\mathbf{u}(x) = \begin{Bmatrix} -y\theta(x) \\ v(x) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.17)$$

sendo

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx},$$

a rotação das seções em relação ao eixo horizontal. Dessa forma, a componente $u(x) = -y\theta(x)$ varia linearmente com a posição y de cada ponto da seção transversal e $v(x)$ é o deslocamento vertical das seções.

2.2.2 Deformação

Com base nessas hipóteses o tensor de pequenas deformações se reduz para

$$[\mathbf{E}(\mathbf{x})] = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} -y \frac{d^2 v(x)}{dx^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

ou seja

$$[\mathbf{E}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Apesar de existir uma componente de deslocamento a direção y , ou seja, $v(x)$, a mesma, com base nas hipóteses adotadas, deve ser constante para todos os pontos de uma mesma seção transversal, o que a caracteriza como uma componente de movimento de corpo rígido, ou seja

$$\frac{dv(x)}{dx} = 0. \quad (2.20)$$

O modelo de Euler-Bernoulli desconsidera os efeitos de cisalhamento, de modo que para este modelo de viga, a única componente de deformação não nula é $\varepsilon_{xx}(x)$.

2.2.3 Trabalho Interno

Associada a deformação $\varepsilon_{xx}(x)$ deve existir, nesse caso, somente a componente de tensão normal $\sigma_{xx}(x)$, assim o tensor de tensões de Cauchy se reduz a

$$[\mathbf{T}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Conseqüentemente, a expressão do Trabalho Interno para o problema da viga de Euler-Bernoulli é dada por

$$T_i = - \int_V \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} = - \int_V \sigma_{xx}(x) \varepsilon_{xx}(x) dV$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_V \sigma_{xx}(x) \left(-y \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right) dV = - \int_0^L \left(\int_A -y \sigma_{xx}(x) dA \right) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} dx \\
&= - \int_0^L M_z(x) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} dx,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

sendo L o comprimento da viga, A a área da seção transversal, considerada constante ao longo do comprimento, e $M_z(x)$ o momento fletor interno agindo na viga ao longo do eixo longitudinal.

Integrando por partes duas vezes a expressão do trabalho interno, vem

$$T_i = \int_0^L \frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} v(x) dx - \frac{dM_z(L)}{dx} v(L) + \frac{dM_z(0)}{dx} v(0) + M_z(L) \frac{dv(L)}{dx} - M_z(0) \frac{dv(0)}{dx}, \tag{2.23}$$

ou

$$T_i = \int_0^L \frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} v(x) dx - V_y(L)v(L) + V_y(0)v(0) + M_z(L)\theta(L) - M_z(0)\theta(0), \tag{2.24}$$

sendo

$$V_y(x) = \frac{dM_z(x)}{dx}, \tag{2.25}$$

a força cortante interna atuando na seção e

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx},$$

a rotação da seção transversal.

2.2.4 PTV

A fim de se avaliar os esforços externos agindo sobre a viga, será aplicado o PTV, assim

$$T_e + T_i = 0. \tag{2.26}$$

Portanto, os trabalho externo compatível com a cinemática da viga de Euler-Bernoulli, para qualquer ação cinemática virtual $\hat{v}(x)$ deve ser

$$T_e = \int_0^L q(x)\hat{v}(x)dx + V_L\hat{v}(L) + V_0\hat{v}(0) + M_0\hat{\theta}(L) + M_L\hat{\theta}(0),$$

sendo $q(x)$ a carga externa distribuída por unidade de comprimento transversalmente sobre a viga, M_L e M_0 os momentos externos concentrados e V_L e V_0 , as caragas concentrados nas extremidades em $x = 0$ e $x = L$.

Dessa forma, através do equilíbrio entre os trabalhos externo e interno, pode-se estabelecer o problema de valor de contorno para uma viga submetida a carregamentos transversais da seguinte maneira

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} = q(x) & \text{para } x \in (0, L) \\ M_z(0) = M_0 & \text{em } x = 0 \\ M_z(L) = M_L & \text{em } x = L \\ V_y(0) = V_0 & \text{em } x = 0 \\ V_y(L) = V_L & \text{em } x = L \end{array} \right. . \tag{2.27}$$

2.2.5 Aplicação da Equação Constitutiva

Analogamente ao caso da barra, para o modelo de viga a lei de Hooke simplifica-se para

$$\sigma_{xx}(x) = E\varepsilon_{xx}(x) = E \frac{du(x)}{dx} = -E \frac{d^2 v(x)}{dx^2} y \tag{2.28}$$

Pela definição do momento fletor tem-se que

$$M_z(x) = \int_A -y \sigma_{xx}(x) dA$$

$$M_z(x) = \int_A E \frac{d^2 v(x)}{dx^2} y^2 dA = E \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \int_A y^2 dA. \quad (2.29)$$

Definindo o momento estático de área ou *momento de inércia* para seção transversal

$$I_z(x) = \int_A y^2 dA. \quad (2.30)$$

Considerando E e I_z constantes e substituindo a expressão de $M_z(x)$ no PVC para a viga tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right) &= q(x) \\ EI_z \frac{d^4 v(x)}{dx^4} &= q(x), \end{aligned} \quad (2.31)$$

Assim o problema de valor de contorno para uma viga segundo a lei de Hooke é,

$$\left\{ \begin{array}{ll} EI_z \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = q(x) & \text{para } x \in (0, L) \\ M_z(0) = M_0 & \text{em } x = 0 \\ M_z(L) = M_L & \text{em } x = L \\ V_y(0) = V_0 & \text{em } x = 0 \\ V_y(L) = V_L & \text{em } x = L \end{array} \right. , \quad (2.32)$$

sendo

$$\left\{ \begin{array}{l} V_y(x) = EI_z \frac{d^3 v(x)}{dx^3} \\ M_z(x) = EI_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \\ \theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} \end{array} \right. . \quad (2.33)$$

2.3 Torção de Eixos Circulares Prismáticos

Analogamente aos modelos de barra e de viga, o modelo de torção para eixos considera que o eixo é unidimensional, ou seja, possui apenas uma dimensão predominante que é o comprimento longitudinal. Este modelo é aplicado apenas a eixos circulares prismáticos, maciços ou tubulares, sendo que o interesse principal é a determinar a rotação das seções ao longo do eixo x , isto é, a torção da seções, em função das tensões de cisalhamento aplicadas no eixo.

2.3.1 Cinemática

No caso da torção de eixos com seções transversais circulares, as seguintes hipóteses cinemáticas são consideradas. Primeiramente assume-se que as seções transversais planas permanecem planas e normais ao eixo longitudinal x , como no caso da barra. Além do mais, assume-se que as seções paralelas mantêm mesma distância entre si, ou seja, não há deformação longitudinal. Verifica-se que esta hipótese é verdadeira para eixos prismáticos com seção circular, o que não ocorre para eixo com seções não circulares. Nesses casos ocorre uma rotação e empenamento das seções em relação ao eixo z , não permanecendo planas consequentemente.

Admite-se também que as ações de movimento produzem uma rotação nos pontos de uma seção transversal, que cresce linearmente a partir de zero no centro da seção e atingindo o valor máximo na periferia. Em outras palavras, cada seção transversal sofre uma rotação rígida constante.

Com base nessas hipóteses cinemáticas, avaliando a rotação de um ponto genérico de uma seção

circular, pode-se chegar ao seguinte campo de deslocamentos em coordenadas cartesianas

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -z\theta(x) \\ y\theta(x) \end{Bmatrix}, \quad (2.34)$$

sendo $\theta(x)$ a rotação ou ângulo de torção das seções ao longo do eixo x .

2.3.2 Deformação

Com base nas hipóteses cinemáticas assumidas para o problema de torção de eixos circulares, pode-se concluir que as únicas componentes de deformação possíveis, são as distorções totais nos planos xy e xz , ou seja o tensor de pequenas deformações se reduz a

$$[\mathbf{E}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{xy}(x) & \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{xz}(x) \\ \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{xy}(x) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{xz}(x) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

ou

$$[\mathbf{E}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}z\frac{d\theta(x)}{dx} & \frac{1}{2}y\frac{d\theta(x)}{dx} \\ -\frac{1}{2}z\frac{d\theta(x)}{dx} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}y\frac{d\theta(x)}{dx} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

2.3.3 Trabalho Interno

Associadas às deformações $\bar{\gamma}_{xy}(x)$ e $\bar{\gamma}_{xz}(x)$ devem existir as componentes de tensão $\tau_{xy}(x)$ e $\tau_{xz}(x)$, de forma que o tensor de tensões de Cauchy se reduz a

$$[\mathbf{T}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy}(x) & \tau_{xz}(x) \\ \tau_{xy}(x) & 0 & 0 \\ \tau_{xz}(x) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Consequentemente, a expressão do Trabalho Interno para o problema de torção é dada por

$$\begin{aligned} T_i &= - \int_V \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} = - \int_V [\tau_{xy}(x)\tau_{xy}(x) + \tau_{xz}(x)\tau_{xz}(x)] dV \\ &= - \int_V \left[\tau_{xy}(x) \left(-z\frac{d\theta(x)}{dx} \right) + \tau_{xz}(x) \left(y\frac{d\theta(x)}{dx} \right) \right] dV \\ &= - \int_V [-z\tau_{xy}(x) + y\tau_{xz}(x)] \frac{d\theta(x)}{dx} dV \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$= - \int_0^L \left(\int_A [-z\tau_{xy}(x) + y\tau_{xz}(x)] dA \right) \frac{d\theta(x)}{dx} dx, \quad (2.39)$$

sendo L o comprimento da barra, A a área da seção transversal, considerada constante ao longo do comprimento, e definindo

$$M_x(x) = \int_A [-z\tau_{xy}(x) + y\tau_{xz}(x)] dA, \quad (2.40)$$

como sendo o momento longitudinal ou torçor interno na seção transversal. Deve-se observar que o momento torçor, varia linearmente em cada seção do eixo x , de forma análoga ao ângulo de torção $\theta(x)$. Assim, pode-se reescrever a expressão do trabalho interno como

$$T_i = - \int_0^L M_x(x) \frac{d\theta(x)}{dx} dx. \quad (2.41)$$

Integrando por partes a expressão do trabalho interno, vem

$$T_i = \int_0^L \frac{dM_x(x)}{dx} \theta(x) dx - M_x(L)\theta(L) + M_x(0)\theta(0). \quad (2.42)$$

2.3.4 PTV

A fim de se avaliar os esforços externos agindo sobre o eixo, será aplicado o PTV, assim

$$T_e + T_i = 0. \quad (2.43)$$

Portanto, os trabalho externo compatível com a cinemática da barra, para qualquer ação cinemática virtual $\hat{\theta}(x)$ deve ser

$$T_e = \int_0^L t(x)\hat{\theta}(x)dx + T_L\hat{\theta}(L) + T_0(0)\hat{\theta}(0),$$

sendo $t(x)$ o torque externo distribuído por unidade de comprimento axialmente sobre o eixo e T_L e T_0 os torques externos concentrados nas extremidades em $x = 0$ e $x = L$.

Dessa forma, através do equilíbrio entre os trabalhos externo e interno, pode-se estabelecer o problema de valor de contorno para um eixo da seguinte maneira

$$\begin{cases} \frac{dM_x(x)}{dx} = -t(x) & \text{para } x \in (0, L) \\ M_x(0) = T_0 & \text{em } x = 0 \\ M_x(L) = T_L & \text{em } x = L \end{cases}. \quad (2.44)$$

2.3.5 Aplicação da Equação Constitutiva

Para o problema de torção de eixos circulares a lei de Hooke simplifica-se para

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \mu\varepsilon_{xy} = G\bar{\gamma}_{xy} \\ \tau_{xz} = \mu\varepsilon_{xz} = G\bar{\gamma}_{xz} \end{cases}, \quad (2.45)$$

sendo G o Módulo de Elasticidade Transversal. Substituindo as componentes de deformação

$$\begin{cases} \tau_{xy} = -Gz\frac{d\theta(x)}{dx} \\ \tau_{xz} = Gy\frac{d\theta(x)}{dx} \end{cases}. \quad (2.46)$$

Adotando-se um sistema de coordenadas polares para as seções transversais do eixo, define-se uma tensão de cisalhamento tangencial, perpendicular ao raio da seção, dada por

$$\tau_t(x, r, \theta) = G\frac{d\theta(x)}{dx}r, \quad (2.47)$$

sendo $r^2 = y^2 + z^2$ o raio de posição do ponto em analisado e a deformação cisalhante longitudinal

$$\bar{\gamma}_t(x, r, \theta) = \bar{\gamma}_{xy}(x) + \bar{\gamma}_{xz}(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}r. \quad (2.48)$$

Sendo assim, é possível demonstrar que

$$M_x(x) = \int_A \tau_t(x, r, \theta)r dA. \quad (2.49)$$

E através da lei de Hooke

$$\begin{aligned} M_x(x) &= G\frac{d\theta(x)}{dx} \int_A r^2 dA \\ &= GI_P(x)\frac{d\theta(x)}{dx}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

sendo $I_P(x)$ o Momento Polar de Inércia da seção transversal do eixo.

Substituindo essa equação no PVC do modelo torção tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(GI_P(x)\frac{d\theta(x)}{dx} \right) &= -t(x) \\ GI_P\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} &= -t(x), \end{aligned} \quad (2.51)$$

considerando G e I_P constantes. Assim o problema de valor de contorno para um eixo segundo a lei de Hooke é

$$\begin{cases} GI_P \frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} = -t(x) & \text{para } x \in (0, L) \\ \theta(0) = \theta_0 & \text{em } x = 0 \\ \theta(L) = \theta_L & \text{em } x = L \end{cases} \quad (2.52)$$

2.4 Estado Plano de Tensões

O modelo simplificado para o estado plano de tensões é razoável quando duas dimensões prevalecem e o carregamento é aplicado apenas da direção do plano principal do corpo, por exemplo, em problemas envolvendo chapas com o comprimento e a largura muito maiores que a espessura, como ilustrado na Figura 2.1.

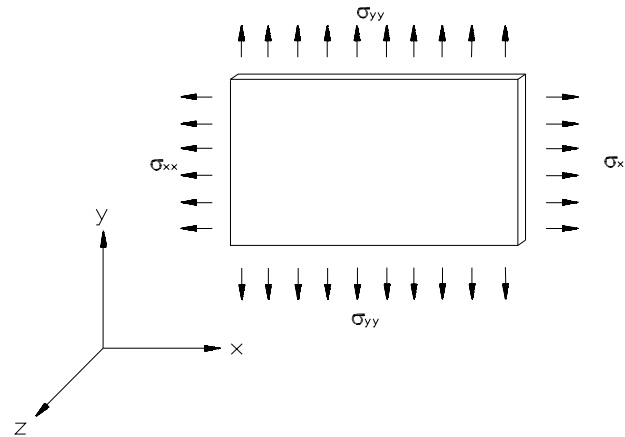


Figura 2.1: Estado Plano de Tensões

As hipóteses básicas para os problemas de estado plano tensão são:

- a espessura do corpo é pequena se comparada com as dimensões nas direções x e y ;
- não há forças agindo nas faces normais ao eixo z ;
- as componentes de forças de volume agem somente no plano xy e são independentes de z , isto é, $b_x = b_x(x, y)$, $b_y = b_y(x, y)$ e $b_z = 0$;
- todas as forças agindo no corpo são planares e independentes de z , ou seja, $t_x = t_x(x, y)$, $t_y = t_y(x, y)$ e $t_z = 0$.

Com estas hipóteses¹, assume-se que as componentes de tensão no plano z (σ_{zz} , τ_{zy} , τ_{zx}) são pequenas comparando-se com σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} . Além disso, a variação destas últimas em relação a z é desprezível, sendo função apenas de x e y . Logo as as componentes o tensor de tensões de Cauchy simplificam-se para,

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y) \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y) \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y) \quad \sigma_{zz} = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0 \quad (2.53)$$

¹Deve-se observar, entretanto, que apesar destas hipóteses serem razoáveis para a prática da engenharia, as mesmas são apenas aproximadas, pois violam as equações de compatibilidade do modelo tridimensional, que serão tratadas posteriormente, ver seção 4.1.1.

Observa-se ainda que $w \neq 0$ e a deformação $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$ pode ser determinada em função de σ_{xx} e σ_{yy} .

Tomando-se (2.53), simplificam-se as equações da elasticidade como,

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x, y) & \tau_{xy}(x, y) \\ \tau_{xy}(x, y) & \sigma_{yy}(x, y) \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x(x, y) \\ b_y(x, y) \end{Bmatrix} \\ \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x, y)}{\partial y} + b_x(x, y) = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}(x, y)}{\partial y} + b_y(x, y) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\mathbf{Tn} = \mathbf{t} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y = t_x \\ \tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y = t_y \end{cases} \quad (2.55)$$

Seguindo o mesmo esquema, a equação constitutiva assume a seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\mu \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

sendo $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$, $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$ e $e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$.

De (2.56), determina-se a deformação ε_{zz} como,

$$2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \Rightarrow \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\lambda}{(\mu + \lambda)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.57)$$

Assim, a equação de Navier pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\mu \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{array} \right\} + (\mu + \lambda) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{array} \right\} + \begin{Bmatrix} b_x(x, y) \\ b_y(x, y) \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.58)$$

2.5 Estado Plano de Deformações

Este modelo geralmente é usado para representar o comportamento de estruturas de grande comprimento, tais como tubulações, ver Figura 2.2. Por este motivo, os deslocamentos normais a essa direção podem ser assumidos como nulos. As hipóteses de deformação plana são:

- os deslocamentos das faces normais ao eixo z são nulos, pois a espessura do corpo é muito grande em comparação às dimensões representativas nas direções x e y .
- as forças de volume e aquelas aplicadas nas superfícies do corpo, normais às direções x e y , são independentes de z .

Com estas hipóteses tem-se,

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y) \quad w = 0 \quad (2.59)$$

Isto significa que as deformações decorrentes de w também se anulam, ou seja,

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = 0 \quad (2.60)$$

sendo as demais independentes de z , isto é $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}(x, y)$, $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}(x, y)$, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}(x, y)$. Neste caso, $\sigma_{zz} \neq 0$ e pode ser determinado a partir do valor das outras componentes.

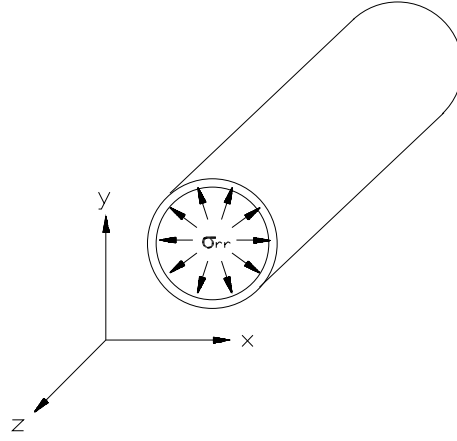


Figura 2.2: Estado Plano de Deformações

Considerando as hipóteses (2.59) e (2.60), as seguintes simplificações são possíveis nas equações do caso sólido:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x, y) & \tau_{xy}(x, y) & 0 \\ \tau_{xy}(x, y) & \sigma_{yy}(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}(x, y) \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x(x, y) \\ b_y(x, y) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{div } \mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x, y)}{\partial y} + b_x(x, y) = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}(x, y)}{\partial y} + b_y(x, y) = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}(x, y)}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{t} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx}n_1 + \tau_{xy}n_2 = t_x \\ \tau_{xy}n_1 + \sigma_{yy}n_2 = t_y \end{cases} \quad (2.62)$$

Seguindo o mesmo esquema, a equação constitutiva (??) assume a seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = 2\mu \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

De (2.56) determina-se a componente de tensão σ_{zz} ,

$$\sigma_{zz} = 2\lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (2.64)$$

A equação de Navier é exatamente a mesma obtida para tensão plana. De fato, a única diferença entre os dois casos (estado plano de deformações e de tensões) são as condições de contorno usadas na resolução da equação de Navier.

Capítulo 3

Solução Aproximada

Como já foi mencionado anteriormente, a solução analítica das equações de equilíbrio para um corpo sólido tridimensional, nem sempre pode ser obtida de maneira simples e sistemática para todos os tipos de problema, o que exige a utilização de métodos numéricos de aproximação de equações diferenciais. O objetivo desta Seção é apresentar uma metodologia básica e sistemática para a aproximação das soluções obtidas com a formulação da mecânica dos corpos deformáveis, permitindo o uso de ferramentas computacionais utilizando o Método dos Elementos Finitos.

3.1 Forma Forte

A Forma Forte nesse caso representa o problema de valor de contorno ou os sistemas de equações diferenciais e as condições de contorno. para o equilíbrio geral de sólidos. Nesse caso o PVC para sólidos é

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0 \end{array} \right. \quad \text{para o domínio } V, \quad (3.1)$$

sujeito às condições de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z - t_x = 0 \\ \tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z - t_y = 0 \\ \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z - t_z = 0 \end{array} \right. \quad \text{para o contorno } S \text{ de } V. \quad (3.2)$$

Ou ainda, na forma tensorial

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{para o domínio } V \\ \mathbf{T} \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{para o contorno } S \text{ de } V \end{array} \right. \quad (3.3)$$

3.2 Forma Fraca

A Forma Fraca para as equações diferenciais de equilíbrio é obtida multiplicando-se as expressões em (3.1) por funções $v_1(\mathbf{x})$, $v_2(\mathbf{x})$ e $v_3(\mathbf{x})$ e integram-se as mesmas no volume do sólido, assim

$$\begin{aligned} \int_V \left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x \right] v_1 dV &= 0, \\ \int_V \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y \right] v_2 dV &= 0 \quad \text{e} \\ \int_V \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z \right] v_3 dV &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \int_V \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} v_1 dV + \int_V \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} v_1 dV + \int_V \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} v_1 dV + \int_V b_x v_1 dV = 0, \\
& \int_V \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} v_2 dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} v_2 dV + \int_V \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} v_2 dV + \int_V b_y v_2 dV = 0 \quad \text{e} \\
& \int_V \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} v_3 dV + \int_V \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} v_3 dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} v_3 dV + \int_V b_z v_3 dV = 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Integrando por partes as três primeiras integrais em cada uma das expressões anteriores

$$\begin{aligned}
& \int_V \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} v_1 dV = - \int_V \sigma_{xx} \frac{\partial v_1}{\partial x} dV + \int_S \sigma_{xx} v_1 n_x dS, \\
& \int_V \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} v_1 dV = - \int_V \tau_{xy} \frac{\partial v_1}{\partial y} dV + \int_S \tau_{xy} v_1 n_y dS, \\
& \int_V \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} v_1 dV = - \int_V \tau_{xz} \frac{\partial v_1}{\partial z} dV + \int_S \tau_{xz} v_1 n_z dS, \\
& \int_V \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} v_2 dV = - \int_V \tau_{xy} \frac{\partial v_2}{\partial x} dV + \int_S \tau_{xy} v_2 n_x dS, \\
& \int_V \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} v_2 dV = - \int_V \sigma_{yy} \frac{\partial v_2}{\partial y} dV + \int_S \sigma_{yy} v_2 n_y dS, \\
& \int_V \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} v_2 dV = - \int_V \tau_{yz} \frac{\partial v_2}{\partial z} dV + \int_S \tau_{yz} v_2 n_z dS, \\
& \int_V \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} v_3 dV = - \int_V \tau_{xz} \frac{\partial v_3}{\partial x} dV + \int_S \tau_{xz} v_3 n_x dS, \\
& \int_V \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} v_3 dV = - \int_V \tau_{yz} \frac{\partial v_3}{\partial y} dV + \int_S \tau_{yz} v_3 n_y dS, \\
& \int_V \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} v_3 dV = - \int_V \sigma_{zz} \frac{\partial v_3}{\partial z} dV + \int_S \sigma_{zz} v_3 n_z dS.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Substituindo as relações anteriores nas expressões dadas em (3.5) e somando os resultados, vem que

$$\begin{aligned}
& - \int_V \left[\begin{array}{c} \sigma_{xx} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial v_1}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v_2}{\partial y} + \\ \tau_{yz} \frac{\partial v_2}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial v_3}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial v_3}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{array} \right] dV + \\
& \int_S [\sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} v_1 n_z] v_1 dV + \\
& \int_S [\tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z] v_2 dV + \\
& \int_S [\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z] v_3 dV + \\
& \int_V [b_x v_1 + b_y v_2 + b_z v_3] dV = 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

A primeira integral de volume na expressão anterior corresponde ao produto interno $\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}$ dos tensores de tensão de Cauchy \mathbf{T} e de pequenas deformações \mathbf{E} , calculado em $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. As componentes cartesianas de $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, $\mathbf{E}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))$ e $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, são dadas por

$$\{\mathbf{v}\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}, \tag{3.8}$$

$$[\mathbf{E}(\mathbf{v})] = [\nabla^S \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Observa-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} &= \sigma_{xx} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v_2}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial v_3}{\partial z} \\ &\quad + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

O integrando na integral de superfície total em (3.7) é denotado de forma geral como $\mathbf{Tn} \cdot \mathbf{v}$. Em componentes cartesianas

$$[\mathbf{T}]\{\mathbf{n}\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}v_1n_z \\ \tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z \\ \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

e

$$\begin{aligned} \{\mathbf{Tn}\} \cdot \{\mathbf{v}\} &= [\sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}v_1n_z]v_1 + [\tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z]v_2 \\ &\quad + [\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z]v_3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por último, a segunda integral de volume em (3.7) pode ser escrita como $\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$, pois

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = b_x v_1 + b_y v_2 + b_z v_3. \quad (3.14)$$

Logo, pode-se escrever a expressão (3.7) de forma compacta como

$$\int_V \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) = \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV - \int_S \mathbf{Tn} \cdot \mathbf{v} dS, \quad (3.15)$$

ou ainda,

$$\int_V \mathbf{T} \cdot \nabla^S \mathbf{v} = \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV - \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS. \quad (3.16)$$

A equação (3.16) é a forma fraca do PVC (forma forte) dado em na seção anterior, sendo válida para qualquer meio contínuo tridimensional, em pequenas deformações.

Para um material elástico, linear, homogêneo e isotrópico, a relação entre \mathbf{T} e \mathbf{E} é dada pela lei de Hooke, ou seja

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{I}, \quad (3.17)$$

sendo \mathbf{T} o tensor de tensões de Cauchy, \mathbf{E} o tensor de pequenas deformações, $\text{tr } \mathbf{E} = e$ a dilatação, λ e μ os coeficientes de Lamé e \mathbf{I} o tensor identidade.

A relação constitutiva pode ser denotada de forma resumida como

$$\mathbf{T} = \mathbf{CE}(\mathbf{u}), \quad (3.18)$$

sendo \mathbf{C} o tensor de elasticidade de quarta ordem, expresso por

$$\mathbf{CE}(\mathbf{u}) = 2\mu\mathbf{IIIE}(\mathbf{u}) + \lambda(\text{tr } \mathbf{E}(\mathbf{u}))\mathbf{I}, \quad (3.19)$$

sendo \mathbf{II} , o tesor identidade de quarta ordem.

Substituindo (3.18) em (3.16), tem-se a equação da forma fraca válida para um sólido que obedece a lei de Hooke, isto é

$$\int_V \mathbf{CE}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dV = \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV - \int_S \mathbf{Tn} \cdot \mathbf{v} dS. \quad (3.20)$$

Em termos das componentes cartesianas, a relação constitutiva pode ser escrita matricialmente como

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = 2\mu \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

e expandindo as equações tem-se

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda e = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{yy} = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda e = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{yy} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{zz} = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda e = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}) \\ \tau_{xy} = 2\mu\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} = 2\mu\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} = 2\mu\gamma_{yz} \end{cases} . \quad (3.22)$$

Deve-se lembrar que os tensores \mathbf{E} e \mathbf{T} são simétrtricos, ou seja

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \quad (3.23)$$

e

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (3.24)$$

As distorções totais $\bar{\gamma}_{xy}$, $\bar{\gamma}_{xz}$ e $\bar{\gamma}_{yz}$, são dadas respectivamente por

$$\bar{\gamma}_{xy} = 2\gamma_{xy} = 2\gamma_{yx}, \quad \bar{\gamma}_{xz} = 2\gamma_{xz} = 2\gamma_{zx}, \quad \bar{\gamma}_{yz} = 2\gamma_{yz} = 2\gamma_{zy} . \quad (3.25)$$

A partir daí as componentes de tensão cisalhante podem ser expressas como

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\bar{\gamma}_{xy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\bar{\gamma}_{xz}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\bar{\gamma}_{yz}. \quad (3.26)$$

Os coeficiente de Lamé podem ser escritos em função do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν como

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} . \quad (3.27)$$

Logo, as equações constitutivas podem ser expressas como

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{xx} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{yy} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \\ \sigma_{zz} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{zz} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\bar{\gamma}_{xy} \\ \tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\bar{\gamma}_{xz} \\ \tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\bar{\gamma}_{yz} \end{cases} . \quad (3.28)$$

A expressões anteriores pode ser reescritas matricialmente como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \bar{\gamma}_{xy} \\ \bar{\gamma}_{xz} \\ \bar{\gamma}_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (3.29)$$

ou ainda de forma compacta

$$[\boldsymbol{\sigma}] = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \quad (3.30)$$

sendo $[\mathbf{D}]$ a matriz de elasticidade.

Devido à simetria do tensor de pequenas deformações, as componentes do vetor $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ podem ser escritas como

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \tilde{\gamma}_{xy} \\ \tilde{\gamma}_{xz} \\ \tilde{\gamma}_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix},$$

ou de forma compacta

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{L}]\{\mathbf{u}\}. \quad (3.31)$$

Se for efetuado o produto interno entre $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ e $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$, obtém-se

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\tilde{\gamma}_{xy} + \tau_{xz}\tilde{\gamma}_{xz} + \tau_{yz}\tilde{\gamma}_{yz}, \quad (3.32)$$

agora, expandindo as componentes de distorção totais

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}(\gamma_{xy} + \gamma_{yx}) + \tau_{xz}(\gamma_{xz} + \gamma_{zx}) + \tau_{yz}(\gamma_{yz} + \gamma_{zy}). \quad (3.33)$$

A partir deste resultado, pode-se observar que

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.34)$$

Assim, a expressão para a forma fraca pode ser reescrita como

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV - \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS, \quad (3.35)$$

ou matricialmente de forma compacta

$$\int_V [\mathbf{D}][\mathbf{L}]\{\mathbf{u}\} \cdot [\mathbf{L}]\{\mathbf{v}\} dV = \int_V \{\mathbf{b}\} \cdot \{\mathbf{v}\} dV - \int_S \{\mathbf{t}\} \cdot \{\mathbf{v}\} dS. \quad (3.36)$$

3.3 Aproximação

Deseja-se obter uma solução aproximada para a forma fraca do problema de sólidos definida em (3.36). Para isso, são necessárias aproximações para as funções representadas por $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{v}(\mathbf{x})$.

De forma geral, aproximam-se as componentes de $\{\mathbf{u}(\mathbf{x})\}$ através das seguintes combinações lineares de n funções, como se segue

$$\begin{cases} u_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x})a_{1i} \\ u_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x})a_{2i} \\ u_3(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x})a_{3i} \end{cases}, \quad (3.37)$$

sendo $N_i(\mathbf{x})$ as funções de interpolação globais e os a_{1i} , a_{2i} e a_{3i} os coeficientes de ponderação a serem determinados. Matricialmente pode-se escrever

$$\begin{Bmatrix} u_1(\mathbf{x}) \\ u_2(\mathbf{x}) \\ u_3(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \end{Bmatrix}, \quad (3.38)$$

ou seja,

$$\{\mathbf{u}_n(\mathbf{x})\} = \sum_{i=1}^n [N_i(\mathbf{x})] \{\mathbf{a}_i\}. \quad (3.39)$$

Analogamente, a aproximação para a função $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ é dada por

$$\{\mathbf{v}_n(\mathbf{x})\} = \sum_{j=1}^n [N_j(\mathbf{x})] \{\mathbf{b}_j\}, \quad (3.40)$$

sendo $\{\mathbf{b}_j\} = \{b_{j1} \ b_{j2} \ b_{j3}\}^T$ os coeficientes de ponderação a serem determinados.

Substituindo (3.39) e (3.40) em (3.36), vem que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \int_V [\mathbf{D}][\mathbf{L}] [N_i] \{\mathbf{a}_i\} \cdot [\mathbf{L}] [N_j] \{\mathbf{b}_j\} dV - \int_V \{\mathbf{b}\} \cdot [N_j] \{\mathbf{b}_j\} dV + \int_S \{\mathbf{t}\} \cdot [N_j] \{\mathbf{b}_j\} dS \right\} = 0. \quad (3.41)$$

Denota-se a matriz de deformação $[\mathbf{B}_i]$ como

$$[\mathbf{B}_i] = [\mathbf{L}] [N_i]. \quad (3.42)$$

Em forma expandida

$$[\mathbf{B}_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Sabendo-se que $\{\mathbf{b}_j\}$ é constante e utilizando o conceito de transposição de matrizes, pode-se reescrever

$$\sum_{j=1}^n \{\mathbf{b}_j\} \cdot \left[\sum_{i=1}^n \left\{ \int_V ([\mathbf{B}_j]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_i] dV) \{\mathbf{a}_i\} - \int_V [N_j]^T \{\mathbf{b}\} dV + \int_S [N_j]^T \{\mathbf{t}\} dS \right\} \right] = 0. \quad (3.44)$$

Para que esta expressão seja nula, é necessário que o termo entre colchetes seja nulo, assim

$$\sum_{i=1}^n \int_V ([\mathbf{B}_j]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_i] dV) \{\mathbf{a}_i\} = \sum_{i=1}^n \int_V [N_j]^T \{\mathbf{b}\} dV - \int_S [N_j]^T \{\mathbf{t}\} dS \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.45)$$

Reescrevendo de uma forma compacta

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{f}\}, \quad (3.46)$$

sendo $[\mathbf{K}]$ a matriz de rigidez global, $\{\mathbf{a}\}$ o vetor dos coeficientes incógnitas e $\{\mathbf{f}\}$ o vetor global dos carregamentos, dados respectivamente por

$$\begin{cases} [\mathbf{K}] = \sum_{i=1}^n \int_V ([\mathbf{B}_j]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_i] dV) \\ \{\mathbf{a}\} = \sum_{i=1}^n \{\mathbf{a}_i\} \\ \{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{f}_b\} - \{\mathbf{f}_s\} \\ \{\mathbf{f}_b\} = \sum_{i=1}^n \int_V [N_j]^T \{\mathbf{b}\} dV \\ \{\mathbf{f}_s\} = \sum_{i=1}^n \int_S [N_j]^T \{\mathbf{t}\} dS \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.47)$$

Nesse caso, $\{\mathbf{f}_b\}$ e $\{\mathbf{f}_s\}$ correspondem às parcelas de carregamento distribuído no volume e na superfície do corpo.

Analisando localmente para um elemento e da discretização, pode-se escrever as aproximações da seguinte maneira

$$\{\mathbf{u}_n^e(\mathbf{x})\} = \sum_{i=1}^{n_e} [N_i^e(\mathbf{x})] \{\mathbf{a}_i^e\}, \quad (3.48)$$

sendo n_e o número de nós do elemento.

Podem-se se escrever agora as respectivas matrizes e vetores locais para o elemento e

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{K}^e] = \sum_{i=1}^{n_e} \int_{V_e} ([\mathbf{B}_j^e]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_i^e] dV_e) \\ \{\mathbf{a}^e\} = \sum_{i=1}^{n_e} \{\mathbf{a}_i^e\} \\ \{\mathbf{f}^e\} = \{\mathbf{f}_b^e\} - \{\mathbf{f}_s^e\} \\ \{\mathbf{f}_b^e\} = \sum_{i=1}^{n_e} \int_{V_e} [N_j^e]^T \{\mathbf{b}^e\} dV_e \\ \{\mathbf{f}_s^e\} = \sum_{i=1}^{n_e} \int_{S_e} [N_j^e]^T \{\mathbf{t}^e\} dS_e \end{array} \right. \quad j = 1, 2, \dots, n_e. \quad (3.49)$$

O procedimento de construção das matrizes e vetores globais é conhecido como montagem, ou *assembly*, e é baseado na superposição das matrizes e vetores locais obtidos para cada elemento da discretização individualmente, considerando compartilhamento dos nós por diferentes elementos da estrutura.

Finalmente, deve-se solucionar o sistema de equações algébricas global, obtido em (3.46), a fim de se obter os valores dos coeficientes incógnitas $\{\mathbf{a}_i\}$ para a aproximação. Existem vários métodos para determinar as funções de interpolação ou *funções de forma* definidas por $\{N_i\}$. Os *polinômios de Lagrange*, bem como as aproximações de base utilizando a *pirâmide de Pascal*, são muito utilizados com o Método dos Elementos Finitos, e são ditas, nesse caso, funções de forma *nodais*.

A vantagem de se efetuar uma aproximação do tipo nodal é que os valores dos coeficientes $\{\mathbf{a}_i\}$, obtidos dessa maneira, representam fisicamente o valor dos deslocamentos para cada nó da malha de elementos finitos utilizada na discretização, no caso de um problema de sólidos. Existem entretanto, outras maneiras de se obterem as funções de forma, como por exemplo os *polinômios hierárquicos*, nesse caso os coeficientes da aproximação não apresentam necessariamente um significado físico.

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo serão aplicados os conceitos da formulação de sólidos tridimensionais na resolução de problemas de forma analítica a numérica. Primeiramente, serão resolvidos os problemas de barra, viga e torção de forma analítica, utilizando a formulação tridimensional, comparando os resultados obtidos com a teoria unidimensional, abordada no capítulo (2) e posteriormente serão solucionados alguns problemas de forma aproximada, através do Método dos Elementos Finitos, utilizando o *software* Ansys.

4.1 Métodos Analíticos

4.1.1 Equações de Compatibilidade

Um problema fundamental a ser resolvido no caso de sólidos tridimensionais, é determinar o estado de tensões em um ponto qualquer do corpo, em outras palavras o tensor de Tensões de Cauchy $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ para cada ponto do sólido, em função dos carregamentos aplicados.

Deve-se notar que, conhecidos as três componentes $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ e $w(\mathbf{x})$ de deslocamento em cada ponto do corpo, ou seja, quando é conhecido o campo de deslocamentos $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ a qual o corpo está submetido, é possível obter as componentes do tensor de pequenas deformações $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ e, conseqüentemente, através do equilíbrio e das leis constitutivas, o estado de tensões é conhecido.

Por outro lado, é muito comum, principalmente no tratamento analítico de problemas tridimensionais, que as variáveis conhecidas são as componentes do tensor de pequenas deformações, desejando se conhecer o campo de deslocamentos resultante desse estado de deformações. A obtenção das componentes de deslocamento, nesse caso, representa um sistema de equações superdeterminado, possuindo seis equações e três incógnitas, ou seja

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy}(\mathbf{x}) = \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz}(\mathbf{x}) = \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial z} \\ \tilde{\gamma}_{xy}(\mathbf{x}) = \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial y} \\ \tilde{\gamma}_{xz}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial z} + \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial x} \\ \tilde{\gamma}_{yz}(\mathbf{x}) = \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial z} + \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial y} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

A solução desse sistema de equações só é possível, quando estabelecidas algumas condições de restrição, conhecidas como *Equações Diferenciais de Compatibilidade* ou simplesmente *Equações de*

Compatibilidade.

O significado físico da necessidade de condições de compatibilidade pode ser explicado da seguinte maneira. Imagine que um corpo sólido antes de ser submetido a deformação, seja subdividido em pequenos cubos. Deforma-se agora cada cubo individualmente. Observa-se que ao serem agrupados novamente os cubos deformados, o resultado não representa mais a deformação do corpo sólido por inteiro, a menos que a deformação em cada cubo seja relacionada com os cubos vizinhos através das equações de compatibilidade, que garantem a continuidade do corpo. Dessa forma, a deformação de cada parte individualmente corresponderá à deformação do corpo sólido por inteiro.

Abtenção das equações de compatibilidade segue o seguinte procedimento. Diferenciando as equações para $\varepsilon_{xx}(\mathbf{x})$, $\varepsilon_{yy}(\mathbf{x})$ e $\bar{\gamma}_{xy}(\mathbf{x})$ do sistema em (4.1), obtém-se que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}(\mathbf{x})}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u(\mathbf{x})}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}(\mathbf{x})}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v(\mathbf{x})}{\partial y \partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \bar{\gamma}_{xy}(\mathbf{x})}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u(\mathbf{x})}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v(\mathbf{x})}{\partial y \partial x^2} \end{array} \right. , \quad (4.2)$$

de forma que

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}(\mathbf{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}(\mathbf{x})}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{\gamma}_{xy}(\mathbf{x})}{\partial x \partial y}. \quad (4.3)$$

Analogamente, para as outras equações de (4.1), podem ser obtidas as relações

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}(\mathbf{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}(\mathbf{x})}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \bar{\gamma}_{yz}(\mathbf{x})}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}(\mathbf{x})}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}(\mathbf{x})}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{\gamma}_{xz}(\mathbf{x})}{\partial x \partial z} \end{array} \right. . \quad (4.4)$$

Agora, seguindo o procedimento de diferenciação

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}(\mathbf{x})}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u(\mathbf{x})}{\partial x \partial y \partial z} \\ \frac{\partial \bar{\gamma}_{yz}(\mathbf{x})}{\partial x} = \frac{\partial^2 v(\mathbf{x})}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w(\mathbf{x})}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \bar{\gamma}_{xz}(\mathbf{x})}{\partial y} = \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w(\mathbf{x})}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial \bar{\gamma}_{xy}(\mathbf{x})}{\partial z} = \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v(\mathbf{x})}{\partial x \partial z} \end{array} \right. , \quad (4.5)$$

chega-se a

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}(\mathbf{x})}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \bar{\gamma}_{yz}(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\gamma}_{xz}(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\gamma}_{xy}(\mathbf{x})}{\partial z} \right). \quad (4.6)$$

Analogamente,

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}(\mathbf{x})}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{\gamma}_{yz}(\mathbf{x})}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\gamma}_{xz}(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\gamma}_{xy}(\mathbf{x})}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}(\mathbf{x})}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{\gamma}_{yz}(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\gamma}_{xz}(\mathbf{x})}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\gamma}_{xy}(\mathbf{x})}{\partial z} \right) \end{array} \right. . \quad (4.7)$$

Dessa forma, obtém-se o sistema de 6 equações diferenciais de compatibilidade, dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{\gamma}_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \bar{\gamma}_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{\gamma}_{xz}}{\partial x \partial z} \end{array} \right. \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \bar{\gamma}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\gamma}_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{\gamma}_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\gamma}_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{\gamma}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\gamma}_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right) . \quad (4.8)$$

A partir da aplicação da lei de Hooke no sistema de equações anterior, pode-se determinar um

sistema de compatibilidade para um material linear, elástico, homogêneo e isotrópico, em termos de componentes de tensão, como se segue.

Tomando por base a equação

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\gamma}_{yz}}{\partial y \partial z}$$

e aplicando a lei de Hooke, obtém-se

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 e}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} \right) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z}. \quad (4.9)$$

Partindo das equações de equilíbrio dadas por

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0 \end{cases},$$

diferenciando a primeira em relação a x , a segunda em relação a y , a terceira em relação a z e somando os resultados obtém-se

$$2 \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} + \frac{\partial b_x}{\partial x} - \frac{\partial b_y}{\partial y} - \frac{\partial b_z}{\partial z}.$$

Substituindo esta relação em (4.9) e usando o operador laplaciano Δ obtém-se

$$(1 + \nu) \left(\Delta e - \Delta \sigma_{xx} - \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right) - \nu \left(\Delta e - \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right) = (1 + \nu) \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} - \frac{\partial b_y}{\partial y} - \frac{\partial b_z}{\partial z} \right). \quad (4.10)$$

Duas outras equações, similares a essa, podem ser obtidas com procedimento análogo, aplicado as equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{\gamma}_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{\gamma}_{xz}}{\partial x \partial z}. \end{aligned}$$

Somando agora esses resultados chega-se a

$$(1 - \nu) \Delta e = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} - \frac{\partial b_y}{\partial y} - \frac{\partial b_z}{\partial z} \right). \quad (4.11)$$

Substituindo essa expressão para Δe em (4.10) vem que

$$\Delta \sigma_{xx} + \frac{1}{(1 + \nu)} \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{(1 - \nu)} \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} - \frac{\partial b_y}{\partial y} - \frac{\partial b_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial b_x}{\partial x}. \quad (4.12)$$

De maneira análoga podem ser obtidas as seguintes relações

$$\Delta \sigma_{yy} + \frac{1}{(1 + \nu)} \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{(1 - \nu)} \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} - \frac{\partial b_y}{\partial y} - \frac{\partial b_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial b_y}{\partial y}, \quad (4.13)$$

$$\Delta \sigma_{zz} + \frac{1}{(1 + \nu)} \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{(1 - \nu)} \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} - \frac{\partial b_y}{\partial y} - \frac{\partial b_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial b_z}{\partial z}. \quad (4.14)$$

Da mesma maneira, para as equações de compatibilidade restantes

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \tilde{\gamma}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\gamma}_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right), \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tilde{\gamma}_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\gamma}_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right), \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tilde{\gamma}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\gamma}_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{\gamma}_{xy}}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

são obtidas as relações

$$\Delta\tau_{xy} + \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 e}{\partial x \partial y} = \frac{\partial b_x}{\partial x} - \frac{\partial b_y}{\partial y}, \quad (4.15)$$

$$\Delta\tau_{xz} + \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 e}{\partial x \partial z} = \frac{\partial b_x}{\partial x} - \frac{\partial b_z}{\partial z}, \quad (4.16)$$

$$\Delta\tau_{yz} + \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 e}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial b_y}{\partial y} - \frac{\partial b_z}{\partial z}. \quad (4.17)$$

Finalmente, se forem desconsideradas as forças de corpo, chega-se ao sistema de equações de compatibilidade para um sólido elástico, linear, homogêneo e isotrópico.

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1+\nu)\Delta\sigma_{xx} + \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = 0 & (1+\nu)\Delta\tau_{yz} + \frac{\partial^2 e}{\partial y \partial z} = 0 \\ (1+\nu)\Delta\sigma_{yy} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} = 0 & (1+\nu)\Delta\tau_{xz} + \frac{\partial^2 e}{\partial x \partial z} = 0 \\ (1+\nu)\Delta\sigma_{zz} + \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} = 0 & (1+\nu)\Delta\tau_{xy} + \frac{\partial^2 e}{\partial x \partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (4.18)$$

A partir das equações obtidas em (4.8) ou (4.18), juntamente com as equações de equilíbrio, as condições de contorno e as leis constitutivas, é possível determinar agora as componentes do campo de deslocamento em função das deformações.

4.1.2 Barra - Solução 3D

Será considerada nessa seção a solução, com base no equacionamento para um sólido tridimensional, o alongamento de uma barra, de material segundo a lei de Hooke, submetida ao seu peso próprio, conforme ilustrado na Figura 4.1.

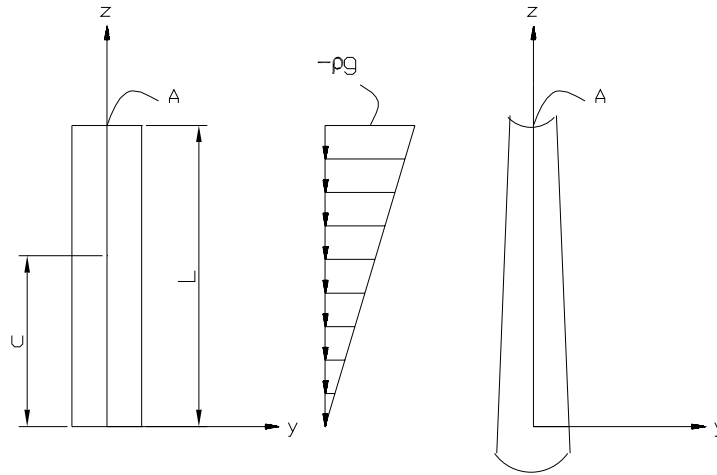


Figura 4.1: Esquema de uma Barra Tridimensional

Analisando o problema, conclui-se que as forças de corpo por unidade de volume, podem ser expressas por

$$\mathbf{b} = \left\{ \begin{array}{l} b_x = 0 \\ b_y = 0 \\ b_z = -\rho g \end{array} \right\}, \quad (4.19)$$

sendo ρg o peso por unidade de volume da barra.

Admitindo que cada seção transversal está submetida a uma tensão normal uniforme provocada pelo peso da porção imediatamente inferior da barra, tem-se que as equações de equilíbrio para o

volume do sólido dadas em (1.50) são satisfeitas quando

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = \rho g z \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{cases} , \quad (4.20)$$

sendo $\sigma_{zz} = \rho g z$ uma distribuição linear do carregamento provocado pelo peso próprio da barra na direção axial.

No caso da superfície lateral não existem esforços concentrados (as forças de superfície são nulas), ou seja,

$$\mathbf{t} = \begin{cases} t_x = 0 \\ t_y = 0 \\ t_z = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

os vetores normais à superfície são representados por vetores unitários sempre perpendiculares ao eixo z , assim, considerando um caso particular onde $\mathbf{n} = \mathbf{e}_y$

$$\mathbf{n} = \begin{cases} n_x = 0 \\ n_y = 1 \\ n_z = 0 \end{cases} . \quad (4.22)$$

Dessa forma, considerando (4.20) \mathbf{t} e \mathbf{n} , as condições de contorno (1.51) são satisfeitas, pois

$$\begin{cases} (0)(0) + (0)(1) + (0)(0) - 0 = 0 \\ (0)(0) + (0)(1) + (0)(0) - 0 = 0 \\ (0)(0) + (0)(1) + (\rho g z)(0) - 0 = 0 \end{cases} . \quad (4.23)$$

Analogamente para a extremidade inferior da barra ($z = 0$),

$$\mathbf{t} = \begin{cases} t_x = 0 \\ t_y = 0 \\ t_z = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

e

$$\mathbf{n} = \begin{cases} n_x = 0 \\ n_y = 0 \\ n_z = -1 \end{cases} , \quad (4.25)$$

assim, as condições de contorno são igualmente satisfeitas

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} . \quad (4.26)$$

Já para a extremidade superior ($z = l$), $\sigma_{zz} = \rho g l$,

$$\mathbf{t} = \begin{cases} t_x = 0 \\ t_y = 0 \\ t_z = \rho g l \end{cases} , \quad (4.27)$$

sendo l o comprimento da barra, e

$$\mathbf{n} = \begin{cases} n_x = 0 \\ n_y = 0 \\ n_z = 1 \end{cases} , \quad (4.28)$$

assim

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ (\rho g l)(1) - \rho g l = 0 \end{cases} . \quad (4.29)$$

Observa-se que as equações de compatibilidade para um material segundo a lei de Hooke são

igualmente satisfeitas, pois

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_{zz} = \rho g z \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho g \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

e, através da lei deHooke

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_{xy} = \bar{\gamma}_{xz} = \bar{\gamma}_{yz} = 0 \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\rho g z}{E} \\ \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\rho g z}{E} \end{cases}, \quad (4.31)$$

ou seja, as derivadas parciais de segunda ordem para as componentes de tensão e deformação se anulam, bem como as derivadas parciais de primeira ordem das forças de corpo, que são constantes nesse caso.

O próximo passo da solução é a caracterização do campo de deslocamentos resultante para este problema. Sabendo-se que

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{\rho g z}{E} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\rho g z}{E} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\rho g z}{E} \\ \bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \bar{\gamma}_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \bar{\gamma}_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{cases}, \quad (4.32)$$

os deslocamentos u , v e w podem ser determinados através do procedimento de integração. Nesse caso

$$w(x, y, z) = \int \frac{\partial w}{\partial z} dz \Rightarrow w(x, y, z) = \int \frac{\rho g z}{E} dz \Rightarrow w(x, y, z) = \frac{\rho g z^2}{2E} + w_0(x, y), \quad (4.33)$$

sendo $w_0(x, y)$ uma função de x e y a ser determinada posteriormente. Assim, substituindo este resultado em

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \bar{\gamma}_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (4.34)$$

e através da integração

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \Rightarrow u(x, y, z) = -\int \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} dz \Rightarrow u(x, y, z) = -z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + u_0(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \Rightarrow v(x, y, z) = -\int \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} dz \Rightarrow v(x, y, z) = -z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + v_0(x, y) \end{cases}, \quad (4.35)$$

sendo $u_0(x, y)$ e $v_0(x, y)$ funções de x e y a serem determinadas posteriormente. Substituindo em

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\nu \frac{\rho g z}{E} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + u_0(x, y) \right) &= -\nu \frac{\rho g z}{E} \\ -z \frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} &= -\nu \frac{\rho g z}{E} \end{aligned} \quad (4.36)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\rho g z}{E}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(-z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + v_0(x, y) \right) &= -\nu \frac{\rho g z}{E} \\ -z \frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} &= -\nu \frac{\rho g z}{E}.\end{aligned}\quad (4.37)$$

Lembrando-se que u_0 e v_0 não dependem de z , conclui-se que estas equações só são verdadeiras se

$$\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\nu \rho g}{E} . \quad (4.38)$$

Substituindo as expressões para $u(x, y, z)$ e $v(x, y, z)$ das equações (4.35) em

$$\bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (4.39)$$

então

$$-2z \frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} = 0. \quad (4.40)$$

Novamente, como u_0 e v_0 não dependem de z , chega-se a

$$\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 w_0(x, y)}{\partial x \partial y} = 0 . \quad (4.41)$$

Analisando as equações (4.38) e (4.41), pode-se obter uma forma geral para as expressões de u_0 , v_0 e w_0 , dadas por

$$\begin{cases} u_0 = \delta y + \delta_1 \\ v_0 = -\delta x + \gamma_1 \\ w_0 = \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) + \alpha x + \beta y + \gamma \end{cases}, \quad (4.42)$$

sendo α , β , δ , δ_1 , γ , γ_1 constantes arbitrárias. Agora expressando os deslocamentos totais, com base em (4.33) e (4.35)

$$\begin{cases} u(x, y, z) = -\frac{\nu \rho g}{E} xz - \alpha z + \delta y + \delta_1 \\ v(x, y, z) = -\frac{\nu \rho g}{E} yz - \beta z - \delta x + \gamma_1 \\ w(x, y, z) = \frac{\nu \rho g}{2E} z^2 + \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) + \alpha x + \beta y + \gamma \end{cases}. \quad (4.43)$$

A determinação das constantes pode ser obtida através da análise dos graus de liberdade do suporte da barra. O suporte deve ser tal que impeça os movimentos de corpo rígido da barra. De forma a impedir o movimento de translação, será estabelecido um suporte no centróide da seção da extremidade superior, dado pelo ponto A de coordenadas $(0, 0, l)$. Assim, para o ponto A tem-se que $u = v = w = 0$.

Considerando agora as rotações rígidas, as mesmas podem ser impedidas fazendo $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ para o ponto A .

Aplicando estas condições de contorno para o suporte em A , nas expressões para u , v e w , vem que

$$-\alpha l + \delta_1 = 0 \quad -\beta l + \gamma_1 = 0 \quad \frac{\rho g l^2}{2E} + \gamma = 0 ,$$

então,

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \delta_1 = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma_1 = 0 \\ \delta = 0 \\ \gamma = -\frac{\rho g l^2}{2E} \end{cases}. \quad (4.44)$$

Finalmente as expressões finais para os deslocamentos, são

$$\begin{cases} u(x, z) = -\frac{\nu \rho g}{E} xz \\ v(y, z) = -\frac{\nu \rho g}{E} yz \\ w(x, y, z) = \frac{\rho g}{2E} z^2 + \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) - \frac{\rho g l^2}{2E} \end{cases} . \quad (4.45)$$

Observa-se que para os pontos situados no eixo z , ou seja $x = y = 0$, apresentam apenas deslocamentos verticais dados por

$$w_z(z) = -\frac{\rho g}{2E} (l^2 - z^2) . \quad (4.46)$$

Já os outros pontos, fora do eixo z , devido à contração lateral da barra, efeito de Poisson, apresentam também deslocamentos horizontais. Este resultado faz com que as linhas inicialmente paralelas ao eixo z , se tornem inclinadas conforme a Figura 4.1. As seções transversais inicialmente perpendiculares ao eixo z , apresentam-se curvas na forma de um parabolóide, ou seja, as seções planas não permanecem planas na configuração deformada.

Se for considerada uma seção transversal genérica dada por $z = c$, antes da deformação, a mesma se apresentará na posição z' , após a deformação, dada por

$$z' = z + w = c + w = c + \frac{\rho g}{2E} c^2 + \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) - \frac{\rho g l^2}{2E} . \quad (4.47)$$

Esta superfície é um parabolóide perpendicular a todas as fibras longitudinais da barra, que se apresentam inclinadas após a deformação, de modo que não há variação angular, ou seja, as deformações cisalhantes são nulas.

Para efeito de comparação este problema será resolvido pela teoria unidimensional, que considera que as seções inicialmente planas, permanecem planas após a deformação. Nesse caso o problema de valor de contorno é dado por

$$\begin{cases} EA \frac{d^2 u(z)}{dz^2} = \rho g A & \text{para } z \in (0, l) \\ u(l) = 0 & \text{em } z = l \text{ (deslocamento)} \\ EA \frac{du(0)}{dz} = 0 & \text{em } z = 0 \text{ (força normal)} \end{cases} . \quad (4.48)$$

Integrando a equação diferencial

$$\begin{cases} EA \frac{du(z)}{dz} = \rho g A z + C_1 \\ EA u(z) = \frac{\rho g A z^2}{2} + C_1 z + C_2 \end{cases}$$

e aplicando as condições de contorno

$$\begin{cases} EA \frac{du(0)}{dz} = 0 \Rightarrow \rho g A(0) + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ u(l) = 0 \Rightarrow \frac{\rho g A l^2}{2} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{\rho g A l^2}{2} \end{cases} ,$$

portanto o deslocamento axial é dado por

$$\begin{aligned} EA u(z) &= \frac{\rho g A z^2}{2} - \frac{\rho g A l^2}{2} \\ u(z) &= -\frac{\rho g}{2E} (l^2 - z^2) . \end{aligned} \quad (4.49)$$

Comparando esse resultado com o resultado obtido pelo cálculo tridimensional, tem-se que

$$w_z(z) = u(z) = -\frac{\rho g}{2E} (l^2 - z^2) , \quad (4.50)$$

ou seja, a solução para o eixo z , no caso tridimensional é idêntica à obtida pelo modelo unidimensional, porém o caso unidimensional apresenta um erro de aproximação, por considerar que as seções planas permanecem planas, o que, como foi visto, não ocorre de fato. Entretanto, se for considerada a equação

para o modelo tridimensional, tem-se que

$$\begin{aligned} w(x, y, z) &= \frac{\rho g}{2E} z^2 + \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) - \frac{\rho g l^2}{2E} \\ w(x, y, z) &= -\frac{\rho g}{2E} (l^2 - z^2) + \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2) \\ u(z) &= w(x, y, z) - \frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Assim, para barras com o comprimento muito maior que as dimensões da seção transversal ($l \gg x_{máx}$ e $l \gg y_{máx}$), o erro da aproximação do modelo unidimensional dado pelo termo

$$\frac{\nu \rho g}{2E} (x^2 + y^2),$$

é muito pequeno, podendo ser desprezado, o que torna a hipótese para o modelo de barra unidimensional bastante razoável.

4.1.3 Torção de Eixos Circulares Prismáticos - Solução 3D

Através do modelo unidimensional para a torção de eixos circulares prismáticos é possível observar que a tensão de cisalhamento resultante na seção é tangencial e perpendicular ao raio, dada por

$$\tau_t(x, r, \theta) = G \frac{d\theta(x)}{dx} r. \quad (4.52)$$

E se for decomposta em duas componentes paralelas ao eixo z e y respectivamente, devido à geometria do problema

$$\begin{cases} \tau_{xy} = -Gz \frac{d\theta(x)}{dx} \\ \tau_{xz} = Gy \frac{d\theta(x)}{dx} \end{cases}. \quad (4.53)$$

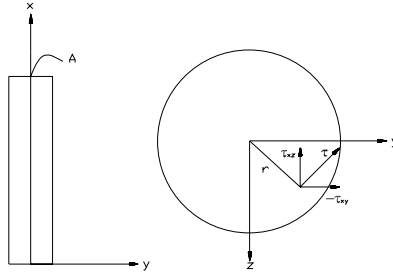


Figura 4.2: Torção de um Eixo Prismático

Segundo o modelo unidimensional, as outras componentes de tensão são nulas, ou seja,

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{yz} = 0. \quad (4.54)$$

Pode-se mostrar que essas hipóteses garantem uma solução correta para o problema (sob o ponto de vista tridimensional), desde que assumidas certas condições.

Já que as componentes de tensão, ou são nulas ou representam funções lineares, então dessa forma, as equações de compatibilidade para um sólido segundo a lei de Hooke (4.18) são satisfeitas automaticamente, pois as mesmas apresentam derivadas parciais de segunda ordem e as forças de volume são nulas para este problema. As equações de equilíbrio (1.50) também são satisfeitas por

essas condições, pois

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-Gz \frac{d\theta(x)}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(Gy \frac{d\theta(x)}{dx} \right) + 0 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-Gz \frac{d\theta(x)}{dx} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \tau \theta}{\partial z} + 0 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(Gy \frac{d\theta(x)}{dx} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial w} + 0 = 0 \end{cases} \quad (4.55)$$

Com procedimento análogo ao empregado na seção 4.1.2, pode-se mostrar que as condições de contorno para a superfície lateral do eixo são igualmente satisfeitas. Não existem esforços externos distribuídos na superfície lateral e os vetores normais à superfície são sempre perpendiculares ao eixo longitudinal e paralelos ao plano yz .

Pode-se observar que estas hipóteses só são válidas para seções circulares (eixos cilíndricos), onde a decomposição da tensão de cisalhamento tangencial em duas componentes paralelas aos eixos y e z é favorecida pela geometria do problema, permitindo a satisfazer as equações de equilíbrio e as condições de contorno simultaneamente. Quando se deseja caracterizar a torção de seções não circulares, o problema é um pouco mais complexo, onde essas hipóteses não são válidas, ocorrendo um empenamento das seções em relação ao eixo longitudinal.

Através da avaliação das condições de contorno para as seções das extremidades do eixo, percebe-se que a distribuição de tensão deve ser a mesma que a atuante em todas as outras seções do eixo, para que as hipóteses iniciais sejam válidas. Entretanto, com base do princípio de *Saint-Venant*, pode-se concluir que para eixos suficientemente longos, à uma distância característica das extremidades, a distribuição de tensão é dependente apenas do torque resultante aplicado nas extremidades do eixo, de maneira praticamente independente da distribuição de tensões nas seções extremas.

A caracterização do campo de deslocamentos por abordagem tridimensional segue um procedimento análogo ao aplicado ao problema de barra tridimensional, visto na seção 4.1.2.

Considerando a lei de Hooke e as hipóteses para o problema tem-se que

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -z \frac{d\theta(x)}{dx} \\ \bar{\gamma}_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_{xz}}{G} = y \frac{d\theta(x)}{dx} \\ \bar{\gamma}_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (4.56)$$

Como

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (4.57)$$

então $u(x, y, z) = 0$ não depende de x . Considerando-se que o eixo está engastado no ponto A , então em $x = 0$, para todos os pontos da seção $u(x, y, z) = 0$ e, além disso, as seções não devem apresentar rotações rígidas além de θ_x , então,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (4.58)$$

e $u(x, y, z)$ é constante ou nulo para todas as seções. Assim,

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} = -z \frac{d\theta(x)}{dx} \\ \bar{\gamma}_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} = y \frac{d\theta(x)}{dx} \end{cases} \quad (4.59)$$

e, através da integração,

$$\begin{cases} v = -z\theta(x) + v_0 \\ w = y\theta(x) + w_0 \end{cases}, \quad (4.60)$$

sendo v_0 e w_0 funções apenas de y e z .

Substituindo estes resultados em ε_{zz} , ε_{yy} e $\bar{\gamma}_{yz}$, vem que

$$\begin{cases} \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(-z\theta(x) + v_0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}(y\theta(x) + w_0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\ \bar{\gamma}_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}(-z\theta(x) + v_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y\theta(x) + w_0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial w_0}{\partial y} = -\frac{\partial v_0}{\partial z} \end{cases}. \quad (4.61)$$

Analisando estes resultados, é possível concluir que v_0 só depende de z e w_0 só depende de y e que v_0 e w_0 são funções lineares dadas por

$$v_0 = \lambda z + \lambda_1 \quad w_0 = -\lambda y + \lambda_2, \quad (4.62)$$

sendo λ , λ_1 e λ_2 constantes arbitrárias a serem determinadas.

Agora os deslocamentos totais são expressos na forma

$$\begin{cases} v = -z\theta(x) + \lambda z + \lambda_1 \\ w = y\theta(x) - \lambda y + \lambda_2 \end{cases}. \quad (4.63)$$

Analisando as condições do suporte, $u(x, y, z) = v(0, y, z) = w(0, y, z) = 0$ e $\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} = 0$, então

$$\frac{\partial v(0, y, z)}{\partial z} = 0 \Rightarrow \lambda = 0. \quad (4.64)$$

Substituindo nas expressões de v e w , para o engaste

$$\begin{cases} v(0, y, z) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ w(0, y, z) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \end{cases}.$$

Então o campo de deslocamentos pode ser expresso na forma

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -z\theta(x) \\ y\theta(x) \end{Bmatrix},$$

que é o mesmo resultado proposto pela formulação unidimensional visto na seção 2.3.

Este resultado permite verificar que, para eixos cilíndricos, as hipóteses do modelo de torção unidimensional permitem a obtenção de uma solução correta para o problema, sob o ponto de vista da formulação tridimensional.

4.1.4 Viga - Solução 3D

Considere uma viga prismática, sob a ação de dois momentos fletores M_z conforme a Figura 4.3. Estabelecendo o centro do sistema de coordenadas no baricentro da seção transversal e o plano plano xz como o plano onde ocorre a flexão, as componentes de tensão, conforme a teoria unidimensional para a flexão pura, são dadas por

$$\sigma_{zz} = \frac{E x}{R} \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xx} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (4.65)$$

sendo R o raio de curvatura da viga após a deformação.

A análise das hipóteses segue os mesmos passos que os utilizados no caso da barra e da torção tridimensionais. Considerando que não haja forças de corpo, é possível verificar que esta solução satisfaz as condições de equilíbrio e as equações de compatibilidade para um sólido tridimensional. As

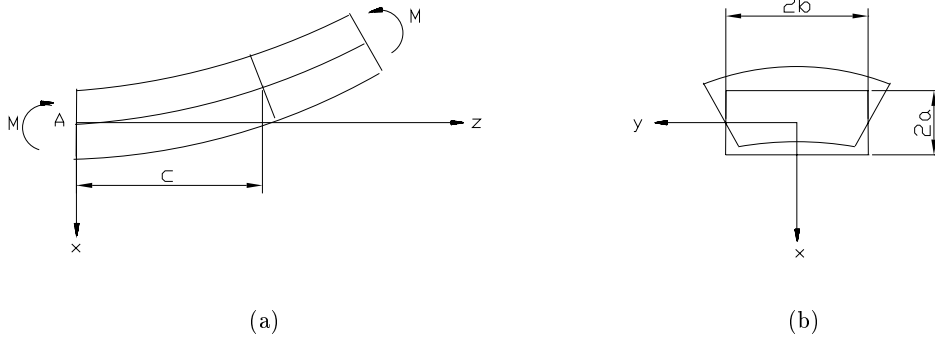


Figura 4.3: Esquema de uma Viga Tridimensional

condições de contorno, para a superfície lateral da viga, também são satisfeitas, pois não existem esforços externos aplicados. As condições de contorno para as seções da extremidade da viga exigem que a distribuição de tensão ocorra da mesma maneira que σ_{zz} . Apenas sob essas condições, a distribuição de tensão proposta, é a solução correta para o problema.

O momento fletor é dado pela equação

$$M_z = \int_A \sigma_{zz} x dA = \int_A \frac{E x^2}{R} dA = \frac{E I_y}{R},$$

sendo I_y o momento de inércia da seção transversal da viga em relação à linha neutra, passando pelo baricentro da seção, paralela ao eixo y . A partir dessa equação é possível escrever

$$\frac{1}{R} = \frac{E I_y}{M_z}. \quad (4.66)$$

Para caracterizar os deslocamentos, inicialmente considere-se a lei de Hooke

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{x}{R} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{x}{R} \\ \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{x}{R} \\ \bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \bar{\gamma}_{xz} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \bar{\gamma}_{yz} = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{array} \right. . \quad (4.67)$$

Utilizando essas equações diferenciais e as condições de vinculação da viga no ponto $A(0,0,0)$, é possível caracterizar o campo de deslocamentos, da mesma forma que nos problemas de barra e torção tridimensionais.

Através da integração de ε_{zz}

$$w = \frac{xz}{R} + w_0, \quad (4.68)$$

sendo w_0 uma função apenas de x e y .

Considerando as outras deformações, obtêm-se

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{R} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (4.69)$$

de forma que, através da integração,

$$\begin{cases} u = -\frac{z^2}{2R} - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + u_0 \\ v = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} + v_0 \end{cases}, \quad (4.70)$$

sendo u_0 e v_0 funções de x e y a serem determinadas posteriormente.

Substituindo estes resultados em ε_{xx} e ε_{yy}

$$-z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\nu \frac{x}{R} \quad -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\nu \frac{y}{R}, \quad (4.71)$$

estas equações devem ser satisfeitas par qualquer valor de z , então

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \quad (4.72)$$

e integrando

$$u_0 = -\nu \frac{x^2}{2R} + f_1(y) \quad v_0 = -\nu \frac{y^2}{2R} + f_2(x). \quad (4.73)$$

Sabendo-se que

$$\bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (4.74)$$

então

$$2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} - \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} - \nu \frac{y}{R} = 0. \quad (4.75)$$

Nota-se que, apenas o primeiro termo dessa equação depende de z , de forma que

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} - \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} - \nu \frac{y}{R} = 0, \quad (4.76)$$

assim,

$$\begin{cases} w_0 = mx + ny + p \\ f_1(y) = \nu \frac{y^2}{2R} + \alpha y + \gamma \\ f_2(x) = -\alpha x + \beta \end{cases}, \quad (4.77)$$

sendo m, n, p, α, γ constantes arbitrárias. Os deslocamentos agora são escritos

$$\begin{cases} u = -\frac{z^2}{2R} - mz - \nu \frac{x^2}{2R} \nu \frac{y^2}{2R} + \alpha y + \gamma \\ v = -nz - \nu \frac{xy}{R} - \alpha x + \beta \\ w = \frac{xz}{R} + mx + ny + p \end{cases}. \quad (4.78)$$

A determinação das constantes arbitrárias é realizada com base nos graus de liberdade do suporte

$$u = v = w = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (4.79)$$

o que exige que as constantes arbitrárias sejam nulas, assim as expressões finais dos deslocamentos são

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2R} [z^2 + \nu (x^2 - y^2)] \\ v = -\nu \frac{xy}{R} \\ w = \frac{xz}{R} \end{cases}. \quad (4.80)$$

Considerando uma seção transversal situada em $z = c$, a mesma se encontrará, após a deformação em

$$z' = c + w = c + \frac{cz}{R}, \quad (4.81)$$

que significa que uma seção plana permanece plana após a deformação, conforme as hipóteses da teoria unidimensional. Para examinar as deformações ocorrendo nesse plano, considere os lados $y = \pm b$,

conforme a Figura 4.3. Após a deformação, tem-se

$$y' = \pm b + v = \pm b \left(1 - \nu \frac{xy}{R} \right),$$

que representam duas retas inclinadas, conforme demonstrado na Figura 4.3. Já para os lados $x = \pm a$,

$$x' = \pm a + u = \pm a - \frac{1}{2R} \left[c^2 + \nu (a^2 - y^2) \right], \quad (4.82)$$

que representam duas curvas com formato parabólico, conforme a Figura 4.3, de forma que a concavidade dessas curvas é oposta à configuração deformada da viga, por exemplo enquanto a viga encontra-se com a concavidade voltada para cima, a concavidade da parábola do lado superior da seção encontra-se voltada para baixo.

Resolvendo este problema agora, pela teoria unidimensional, tem-se que

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_y \frac{d^4 u(z)}{dz^4} = 0 \quad \text{para } z \in (0, L) \\ M_y(L) = -M \quad \text{em } z = L \\ V_x(0) = 0 \quad \text{em } z = 0 \\ \frac{du(0)}{dz} = 0 \quad \text{em } z = 0 \end{array} \right. \quad (4.83)$$

Integrando a equação diferencial

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_y \frac{d^4 u(z)}{dz^4} = 0 \\ EI_y \frac{d^3 u(z)}{dz^3} = C_1 \\ EI_y \frac{d^2 u(z)}{dz^2} = C_1 z + C_2 \\ EI_y \frac{du(z)}{dz} = \frac{C_1 z^2}{2} + C_2 z + C_3 \\ EI_y u(z) = \frac{C_1 z^3}{6} + \frac{C_2 z^2}{2} + C_3 z + C_4 \end{array} \right.$$

e aplicando as condições de contorno vem que

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = -M \\ C_3 = 0 \\ C_4 = 0 \end{array} \right. ,$$

assim a equação final para a flexão é

$$u(z) = -\frac{Mz^2}{2EI_y}. \quad (4.84)$$

Se agora forem considerados $x = y = 0$, nas expressões dos deslocamentos tridimensionais, pode-se obter a expressão da flexão para a linha neutra (eixo z)

$$u = -\frac{z^2}{2R} = -\frac{Mz^2}{2EI_y} \quad v = 0 \quad w = 0, \quad (4.85)$$

que é exatamente a solução encontrada para o modelo unidimensional.

Observa-se que, igualmente ao exemplo da barra, se forem consideradas vigas com o comprimento muito maior que as dimensões da seção transversal, as diferenças entre os dois modelos (unidimensional e tridimensional) podem ser desprezadas, de forma que a aproximação se torna bastante razoável.

4.2 Métodos Numéricos

Nesta seção será abordado o tratamento de problemas envolvendo sólidos estruturais tridimensionais, de forma aproximada, através do Método dos Elementos Finitos, utilizando o *software* Ansys.

Para a aplicação de modelos de sólidos estruturais tridimensionais o Ansys permite a utilização de 5 tipos diferentes de elementos, ilustrados na Figura 4.4, sendo listados a seguir:

- SOLID45: elemento hexaédrico, possuindo 8 nós (interpolação linear) e 3 graus de liberdade por nó, sendo os deslocamentos nas direções cartesianas x , y e z .
- SOLID72: elemento tetraédrico, possuindo 4 nós (interpolação linear) e 6 graus de liberdade por nó, sendo os deslocamentos e as rotações ao longo das direções cartesianas x , y e z .
- SOLID73: elemento hexaédrico, possuindo 8 nós (interpolação linear) e 6 graus de liberdade por nó, sendo os deslocamentos e as rotações ao longo das direções cartesianas x , y e z .
- SOLID92: elemento tetraédrico de alta ordem, possuindo 10 nós (interpolação quadrática) e 3 graus de liberdade por nó, sendo os deslocamentos ao longo das direções cartesianas x , y e z .
- SOLID95: elemento hexaédrico de alta ordem, possuindo 20 nós (interpolação quadrática) e 3 graus de liberdade por nó, sendo os deslocamentos ao longo das direções cartesianas x , y e z .

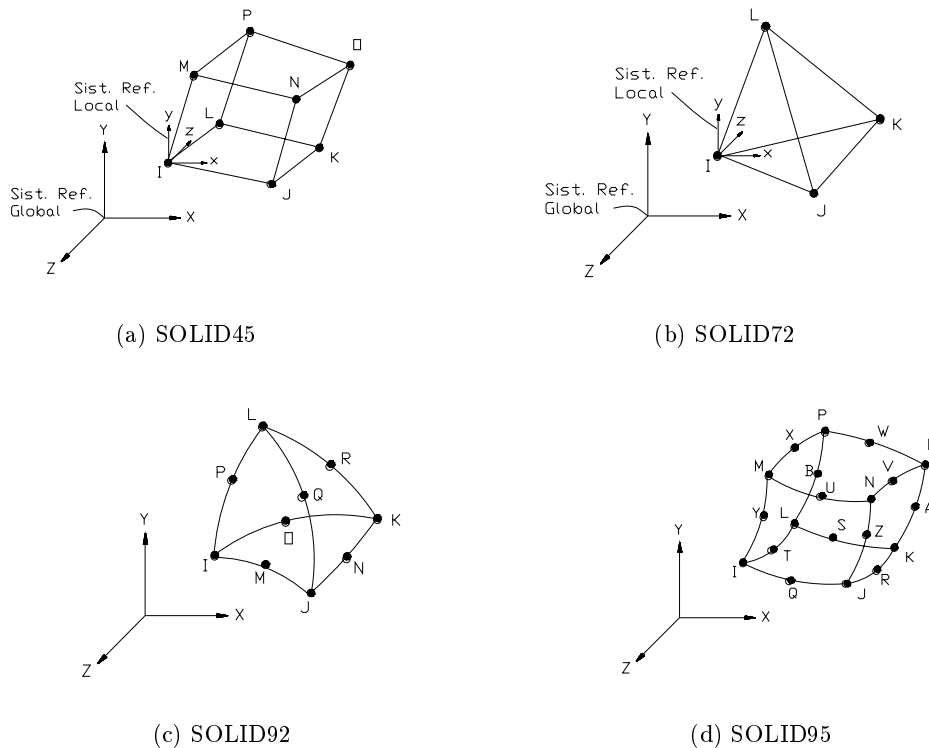


Figura 4.4: Elementos Sólidos no Ansys

Os elementos hexaédricos (SOLID45, SOLID73 e SOLID95) são mais utilizados, pois permitem a obtenção de malhas pouco distorcidas e de geração mais simplificada. O elemento SOLID73 garante resultados mais precisos que o SOLID45 convencional, por possuir mais graus de liberdade por nó, além de exigir menor custo computacional que o SOLID95, entretanto é menos preciso que o elemento quadrático SOLID95.

Já os elementos tetraédricos são mais adequados na resolução de problemas envolvendo malhas mais distorcidas. O elemento SOLID72 pode substituir o SOLID92, demandando menor custo computacional e, apesar de possuir mais graus de liberdade por nó, apresenta menor precisão nos resultados do que o seu equivalente quadrático SOLID92.

De uma forma geral, para esses elementos, os dados de entrada devem ser as suas coordenadas geométricas em função do sistema de referência adotado, conforme Figura 4.4, as propriedades do material, os carregamentos e as condições de contorno.

Os resultados que podem ser obtidos são os deslocamentos (translação e rotação) nodais e as componentes de tensão e deformação atuantes em cada elemento da malha. Alternativamente, podem ser obtidas algumas propriedades geométricas como, centróides, momentos de inércia e de massa, volume e massa, para os elementos e/ou para a estrutura como um todo.

Estes resultados podem ser configurados para serem fornecidos em forma de tabelas ou gráficos. Algumas propriedades especiais, como anisotropia, não-linearidades, dependência da temperatura e/ou do tempo, etc. também podem ser atribuídas e adaptadas a esses elementos.

As tabelas abaixo resumem os principais atributos e os dados de entrada para os elementos SOLID45 e SOLID72.

SOLID45	
Número de Nós	8 (I,J,K,L,M,N,O,P)
Graus de Liberdade	UX, UY, UZ
Propriedades do Material	EX, EY, EZ, NUXY, NUXZ, NUYZ, ALPX, ALPY, ALPZ
Propriedades do Material	DENS, GXY, GXZ, GYZ, DAMP
Cargas de Superfície	Cargas distribuídas nas faces do elemento
Cargas de Corpo	Temperaturas nodais
SOLID72	
Número de Nós	4 (I,J,K,L)
Graus de Liberdade	UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ
Propriedades do Material	EX, EY, EZ, NUXY, NUXZ, NUYZ, ALPX, ALPY, ALPZ
Propriedades do Material	DENS, GXY, GXZ, GYZ, DAMP
Cargas de Superfície	Cargas distribuídas nas faces do elemento
Cargas de Corpo	Temperaturas nodais

Os dados de entrada para os demais elementos são similares, levando-se em consideração suas características particulares.

Nas tabelas acima UX, UY, UZ, representam os deslocamentos nodais, ROTX, ROTY, ROTZ, são as rotações. No caso das propriedades do material, EX, EY, EZ são os módulos de elasticidade, NUXY, NUXZ, NUYZ os coeficientes de Poisson, GXY, GXZ, GYZ, os módulos de elasticidade transversal e ALPX, ALPY, ALPZ, os coeficientes de dilatação térmica, medidos em cada direção. Observa-se que para problemas isotrópicos, é necessário atribuir valores dessas propriedades apenas em uma direção. O parâmetro DENS representa a massa específica do material e DAMP, o coeficiente de amortecimento.

As cargas de superfície podem ser configuradas, de forma a indicar as direções e sentidos de aplicação. Podem ser aplicados também carregamentos concentrados diretamente aos nós da malha. As cargas de corpo permitidas são as decorrentes das tensões devidas à dilatação térmica do material, quando submetido a um gradiente de temperatura. As cargas de corpo devidas ao peso próprio não são atribuídas diretamente ao elemento, devendo ser computadas em função dos efeitos inerciais (acelerações como a gravitacional, por exemplo) em cada direção. Nesse caso, os efeitos dinâmicos são tratados como carregamentos estáticos (Princípio de D'Alambert), sendo necessário atribuir um valor ao parâmetro DENS. Observa-se que os efeitos decorrentes de aceleração centrípeta também podem ser considerados.

4.2.1 Estudo de Casos

A fim de exemplificar a utilização do *software* Ansys na solução de problemas estruturais em três dimensões, serão estudados dois exemplos. O primeiro trata da simulação do alongamento de uma barra de seção constante, engastada e sob a ação do peso próprio, analisando a convergência dos resultados (Modelo Tridimensional *versus* Unidimensional) à medida em se aumenta o comprimento em função das dimensões da seção transversal. O segundo visa comparar os resultados analíticos e numéricos para uma barra de seção transversal variável, usando diferentes tipos de elementos disponíveis no programa Ansys.

Barra tridimensional com seção constante

Este exemplo visa ilustrar a aplicação do programa de Elementos Finitos Ansys na solução do problema de uma barra tridimensional engastada e submetida ao peso próprio. A Figura 4.5 mostra o esquema do problema. O material da barra é o aço estrutural comum, com módulo de elasticidade $E = 210 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e massa específica $\rho = 7885 \text{ kg/m}^3$. A aceleração da gravidade foi considerada $g = 9.816 \text{ m/s}^2$. O tipo de elemento utilizado foi o elemento hexaédrico de 8 nós e três graus de liberdade por nó (SOLID45).

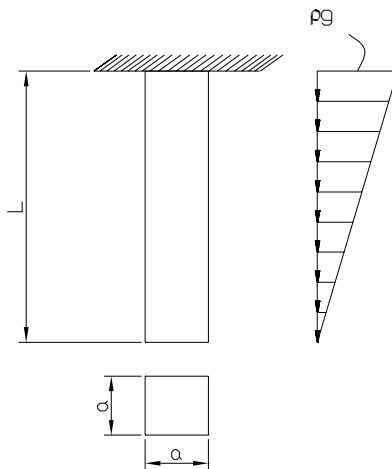


Figura 4.5: Barra tridimensional com seção constante

Sabe-se que a solução unidimensional leva em conta apenas o deslocamento da linha neutra da barra, desconsiderando os deslocamentos transversais da seção, efeito de Poisson. A solução analítica apresentada para o problema evidenciou que a solução para a linha neutra no modelo tridimensional equivale à solução do modelo unidimensional e que, para comprimentos muito maiores que as dimensões da seção transversal, o erro presente no modelo unidimensional para pontos fora da linha neutra pode ser desprezado.

O objetivo, nesse caso é fazer várias simulações do problema tridimensional variando a razão de aspecto $R = \frac{L}{a}$, que indica a proporção entre o comprimento e a largura da seção transversal quadrada e observar o comportamento da solução, ou seja, o desvio do resultado para o deslocamento de ponto extremo da seção (erro máximo) em relação ao deslocamento da linha neutra (solução exata).

Foram feitas 10 simulações com R variando de 1 a 10, nesse caso o comprimento foi mantido constante, variando-se as dimensões da seção transversal, verificando-se o desvio da solução e entre um ponto extremo (ponto máximo na diagonal) e um ponto na linha neutra para várias seções partindo do engaste. As Figuras 4.8 a 4.12 ilustram a malha de elementos utilizada e os resultados dos deslocamentos na direção axial e transversal para os casos $R = 10$ e $R = 1$.

Observou-se que, para pontos longe do engaste, o erro máximo obtido foi da ordem de 12% (para $R = 1$) decaindo para valores menores que 1% ($R = 10$). A Figura 4.6 apresenta um gráfico que ilustra a variação do desvio percentual da solução em função da variação da razão de aspecto R , percebendo-se claramente a convergência da solução para barras longas.

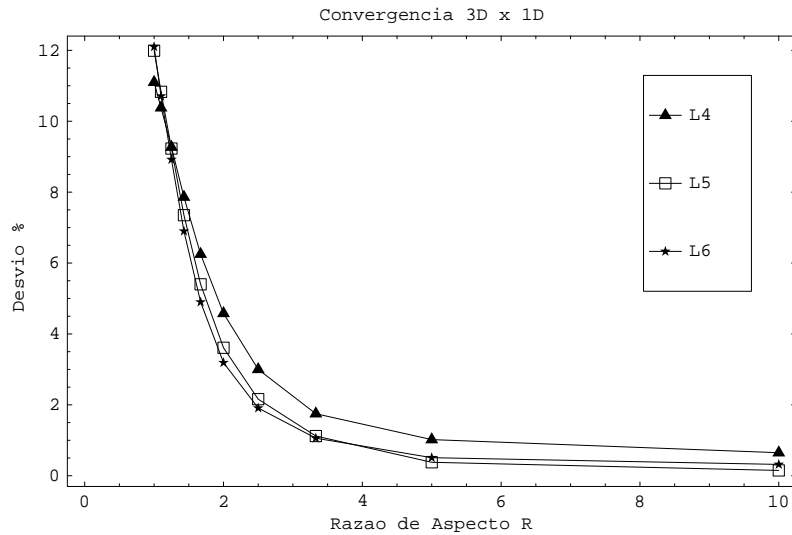


Figura 4.6: Desvio da solução em função de R

A seguir tem-se a listagem do arquivo de entrada de dados utilizado na simulação.

```
! Analise Estatica de uma barra 3D, sob a acao da gravidade

! Iniciando o Pre-Processamento

/PREP7

/TITLE, TRACAO DE UMA BARRA 3D, RAZAO DE ASPECTO = 10

      ! Definindo o tipo de analise

ANTYPE,STATIC ! Analise Estatica

      ! Definindo o tipo de elemento

ET,1,SOLID45  ! Solido Estrutural 3D, Cubo de 8 nos e 3 DOFs por no

      ! Definindo as propriedades do material

MP,EX,1,210E9 ! Modulo de Elasticidade E = 210 GPa
MP,NUXY,1,.3  ! Coeficiente de Poisson NU = 0.3
MP,DENS,1,7885 ! Massa Especifica R0 = 7885 Kg/m^3

      ! Definindo a Geometria da Estrutura

      ! Area da Secao A = B^2 = 1 m^2
      ! Comprimento L = 10 m
```

```

! Razao de Aspecto R = L/B = 10

! Definindo os "Keypoints"
K,1,.5,,.5
K,2,-.5,,.5
K,3,-.5,,-.5
K,4,.5,,-.5
K,5,.5,10,.5
K,6,-.5,10,.5
K,7,-.5,10,-.5
K,8,.5,10,-.5

V,1,2,3,4,5,6,7,8 ! Definindo o volume

SMRT,OFF          ! Desativando o "SmartSizing" do gerador de malhas

! Definindo as dimensoes da malha de elementos

LSEL,S,LINE,,5,11,2
LESIZE,ALL,,6
LSEL,ALL
ESIZE,,6
MOPT,VMESH,ALTE
VMESH,1          ! Gerando a malha sobre o volume
OUTPR,BASIC,ALL

! Aplicando as condicoes de contorno

NSEL,S,LOC,Y,0
D,ALL,ALL        ! Engastamento na base do modelo (Y=0)
NSEL,ALL

FINISH           ! Finalizando o pre-processamento

! Iniciando o SOLVER

/SOLUTION
ACEL,0,-9.816,0 ! Aplicando o efeito da gravidade G = 9.816 m/s^2
SOLVE           ! Resolvendo o probelma

FINISH          ! Finalizando o SOLVER

! Iniciando o Pos-Processamento

/POST1

! Reorientando o modelo na area de trabalho

/VIEW,1,1
/VUP,1,-Y

! Visualizacao dos resultados

```



```

PLNSOL,U,Y      ! Plotando os deslocamentos axiais (UY)
!PRNSOL,U,Y    ! Listando os deslocamentos nodais (UY)

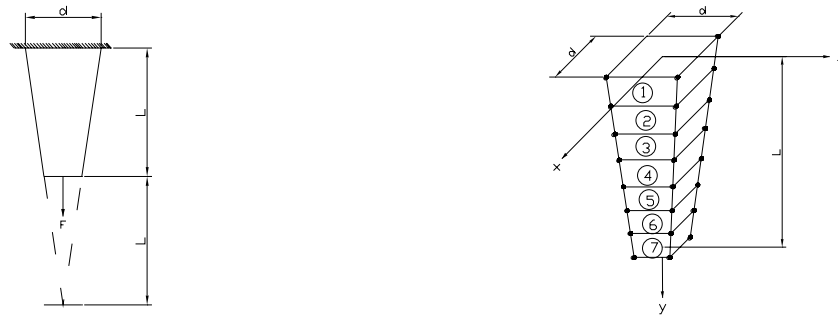
FINISH          ! Fim da Analise.

```

Barra tridimensional com seção variável

Este exemplo encontra-se em detalhes no manual de verificação do *software Ansys (Ansys Verification Manual, VM37: Elongation of a Solid Bar)*.

O objetivo é determinar o alongamento axial máximo δ de uma barra de alumínio de comprimento L , com seção transversal variável, engastada, submetida a um carregamento concentrado F e a tensão axial σ_{yy} atuante na seção transversal situada em seu ponto médio $\frac{L}{2}$. A Figura 4.7 apresenta o esquema do problema e o respectivo modelo de elementos finitos utilizado na solução. Nesse caso foram considerados: $L = 254 \text{ mm}$, $d = 50,8 \text{ mm}$, $E = 70,71 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$, e $F = 44,48 \text{ kN}$.



(a) Esquema do Problema

(b) Malha para SOLID45 ou SOLID73

Figura 4.7: Barra tridimensional com seção variável

O problema foi resolvido usando três tipos de elementos (SOLID45, SOLID72 e SOLID73) e seus resultados serão comparados com a solução analítica. As tabelas abaixo apresentam estes resultados. A Figura 4.13 apresenta o resultado da simulação para o deslocamento axial da barra utilizando o elemento SOLID45.

SOLID45	Resultado Teórico	Ansys	Razão
δ (mm)	0,1221156	0,1208278	0,989
σ_{yy} (MPa) (Elem. 4)	30,6403	30,6196	0,999
SOLID73	Resultado Teórico	Ansys	Razão
δ (mm)	0,1221156	0,1188364	0,973
σ_{yy} (MPa) (Elem. 4)	30,6403	30,6403	0,999
SOLID72	Resultado Teórico	Ansys	Razão
δ (mm)	0,1221156	0,1194257	0,978
σ_{yy} (MPa) ($y = \frac{L}{2}$)	30,6403	30,8540	1,007

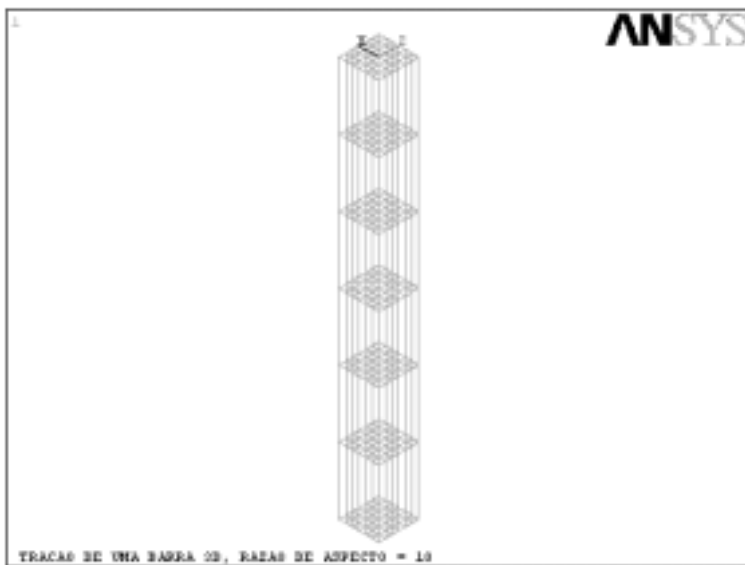


Figura 4.8: Malha de Elementos para Barra com seção constante

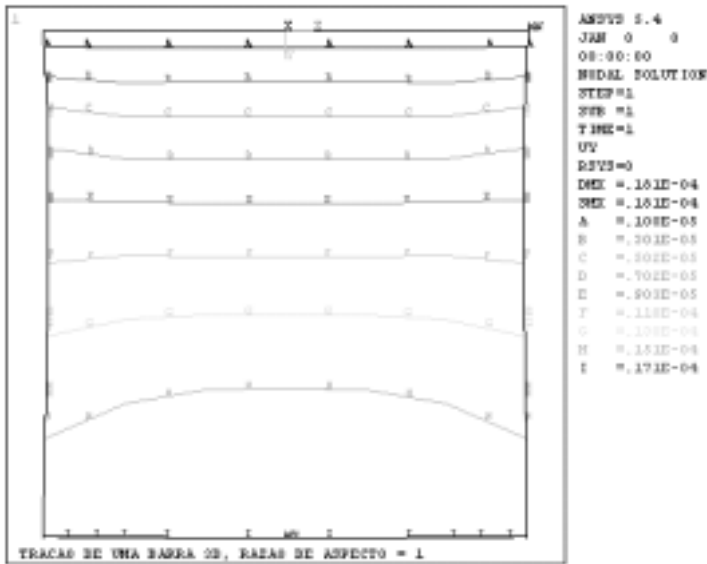


Figura 4.9: Deformação Axial para $R = 1$

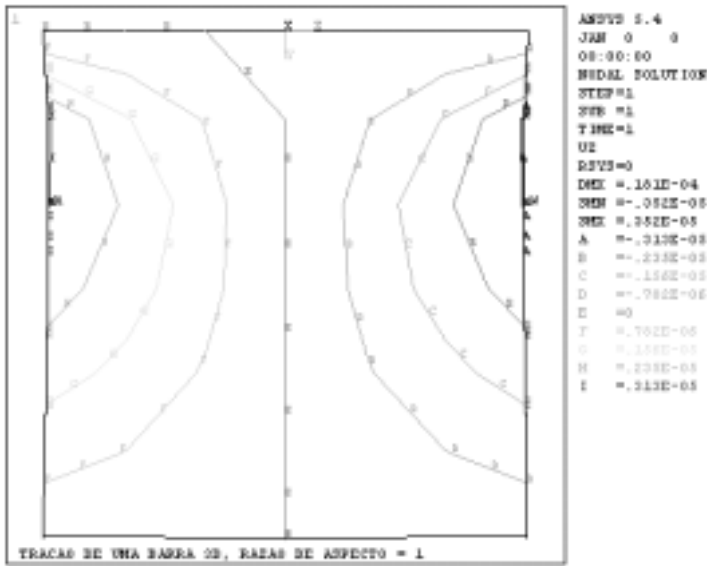


Figura 4.10: Deformação Transversal para $R = 1$

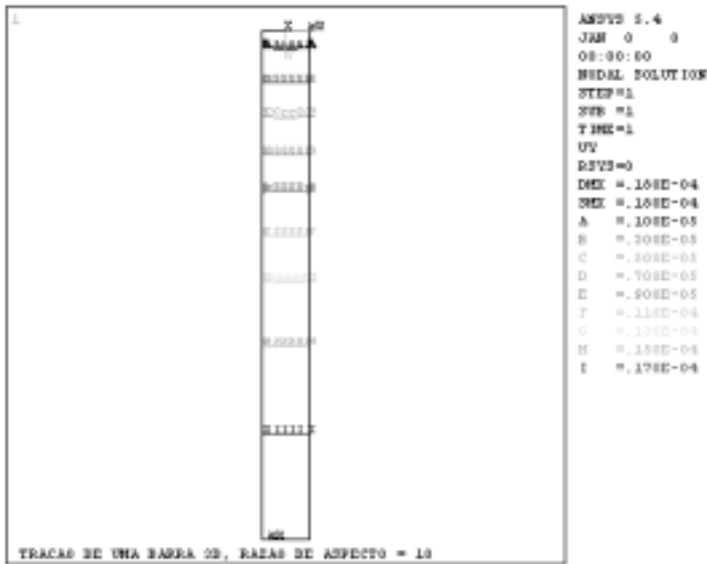


Figura 4.11: Deformação Axial para $R = 10$

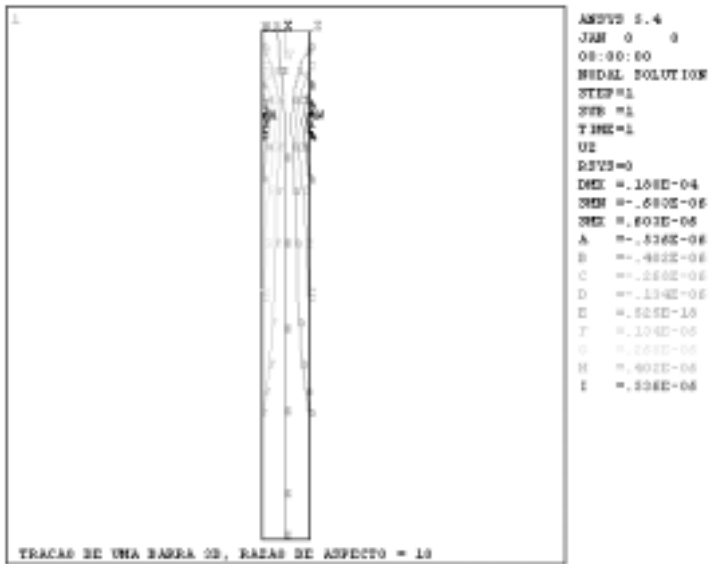


Figura 4.12: Deformação Transversal para $R = 10$

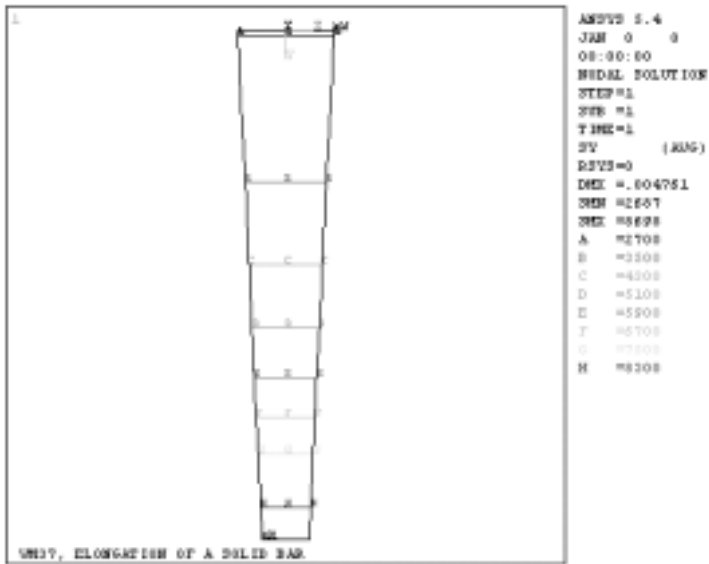


Figura 4.13: Deformação Axial para o problema VM-37

Bibliografia