Apêndice D

Propriedades Geométricas de Seções Transversais

D.1 Momento Estático

Considere uma superfície plana de área A e dois eixos ortogonais x e y de seu plano mostrados na Figura D.1. Seja dA um elemento diferencial de área da superfície, o qual está genericamente posicionado com relação ao sistema de referência adotado.

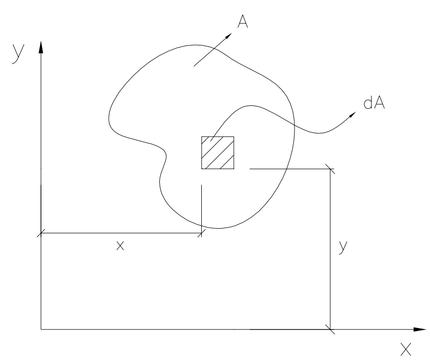


Figura D.1: Elemento de área dA numa área plana A.

Define-se o momento estático de um elemento de área dA com relação aos eixos x e y, respectivamente, como

$$dM_{s_x} = ydA, \tag{D.1}$$

$$dM_{s_y} = xdA. \tag{D.2}$$

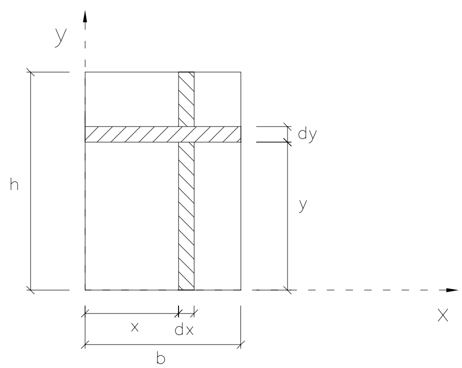
Por sua vez, o momento estático ou momento de primeira ordem da área A com relação aos eixos x e y são obtidos somando-se a contribuição dos momentos estáticos de cada elemento diferencial dA da seção. Logo, os momentos estáticos são dados pelas seguintes integrais

$$M_{s_x} = \int_A ydA, \tag{D.3}$$

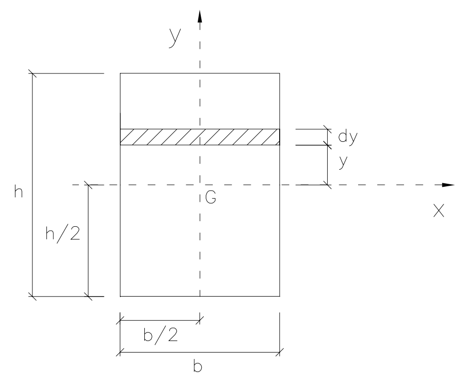
$$M_{s_y} = \int_A xdA. \tag{D.4}$$

Supondo que as dimensões da seção estejam indicadas em cm, a unidade dos momento estáticos M_{s_x} e M_{s_y} são cm^3.

Exemplo D.1 *Determinar os momentos estáticos M_{s_x} e M_{s_y} para a superfície ilustrada na Figura D.2(a).*



(a) Sistema de referência na base.



(b) Sistema de referência no CG.

Figura D.2: Elementos de área numa seção retangular.

Inicialmente, calcula-se o momento estático em relação ao eixo x. Para isso, utiliza-se (D.1) com o elemento de área $dA = bdy$ ilustrado na Figura D.2(a). A partir da expressão (D.1) vem que

$$M_{s_x} = \int_A y dA = b \int_0^h y dy = \frac{b}{2} y^2|_0^h = \frac{bh^2}{2}. \tag{D.5}$$

O momento estático M_{s_y} é obtido empregando (D.2) com o elemento de área $dA = bdx$. Logo

$$M_{s_y} = \int_A x dA = h \int_0^b x dx = \frac{h}{2} x^2|_0^b = \frac{hb^2}{2}. \tag{D.6}$$

□

Exemplo D.2 *Determinar os momentos estáticos M_{s_x} e M_{s_y} do retângulo da Figura D.2(b) em relação aos eixos x e y que passam ao longo do centro de gravidade da seção.*

O procedimento é análogo ao do exemplo anterior devendo-se mudar apenas os limites de integração. Portanto

$$M_{s_x} = \int_A y dA = b \int_{-h/2}^{h/2} y dy = \frac{b}{2} y^2|_{-h/2}^{h/2} = \frac{b}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(-\frac{h}{2}\right)^2\right] = 0, \tag{D.7}$$

$$M_{s_y} = \int_A x dA = h \int_{-b/2}^{b/2} x dx = \frac{h}{2} x^2|_{-b/2}^{b/2} = \frac{h}{2}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(-\frac{b}{2}\right)^2\right] = 0. \tag{D.8}$$

Assim, os momentos estáticos em relação aos eixos que passam pelo centro de gravidade são nulos.

□

D.2 Centro de Gravidade

O centro de gravidade de uma superfície plana de área A ilustrada na Figura D.2 é definido como sendo o ponto CG de coordenadas x_G e y_G dadas por

$$x_G = \frac{M_{s_y}}{A}, \tag{D.9}$$

$$y_G = \frac{M_{s_x}}{A}, \tag{D.10}$$

sendo M_{s_x} e M_{s_y} os momentos estáticos da superfície com relação aos eixo x e y, respectivamente, e A é área da seção transversal.

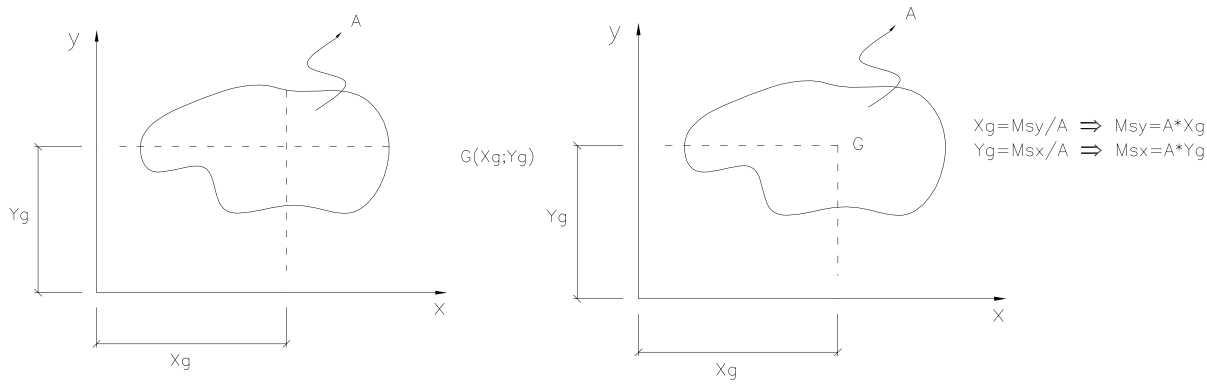


Figura D.3: Centro de gravidade de uma área plana.

Dada uma superfície plana de área A, adota-se o seguinte procedimento para determinar o seu centro de gravidade:

1. Escolhe-se um sistema de referência conveniente para o cálculo do CG. Por exemplo, se a superfície é simétrica, deve-se colocar o sistema de referência ao longo da simetria.
2. Calculam-se os momentos estáticos $M_{s_x} = \int_A y dA$ e $M_{s_y} = \int_A x dA$.
3. Determinam-se as coordenadas do centro de gravidade $x_G = \dfrac{M_{s_y}}{A}$ e $y_G = \dfrac{M_{s_x}}{A}$.

Exemplo D.3 *Determinar o centro de gravidade da superfície da Figura D.2(a).*

Neste caso, os dois primeiros passos do procedimento anterior já foram efetuados no exemplo D.1. Adotou-se o sistema de coordenadas xy conforme ilustrado na Figura D.2(a) e calcularam-se os momentos estáticos M_{s_x} e M_{s_y}. Lembrando que a área do retângulo é $A = bh$, basta agora empregar as equações (D.9) e (D.10) para obter as coordenadas (x_G, y_G) do centro de gravidade. Logo,

$$
\begin{aligned}
x_G &= \frac{M_{s_y}}{A} = \frac{\frac{hb^2}{2}}{bh} = \frac{b}{2}, \\
y_G &= \frac{M_{s_x}}{A} = \frac{\frac{bh^2}{2}}{bh} = \frac{h}{2}.
\end{aligned}
$$

□

Pode-se calcular os momento estáticos M_{s_x} e M_{s_y} a partir da definição do centro de gravidade dada em (D.9) e (D.10) conforme ilustrado na Figura D.2. Para isso, considere uma superfície plana de área A e dois eixos ortogonais x e y de seu plano. Supondo que se conheça previamente a posição do seu centro de gravidade, calculam-se M_{s_x} e M_{s_y} a partir de (D.9) e (D.10) como

$$M_{s_y} = A x_G, \tag{D.11}$$
$$M_{s_x} = A y_G. \tag{D.12}$$

Logo, a seguinte definição é válida: o *momento estático de uma superfície de área A com relação a um eixo qualquer de seu plano é igual ao produto da área A da superfície pela distância do seu centro de* *gravidade ao eixo de interesse.* Por exemplo, tomando-se o retângulo da Figura D.4, os momentos estáticos M_{s_x} e M_{s_y} são dados pelo produto da área $A = bh$ do retângulo, respectivamente, pelas distâncias $c + \frac{h}{2}$ e $a + \frac{h}{2}$ do centro de gravidade do retângulo aos eixos x e y, ou seja,

$$
\begin{aligned}
M_{s_x} &= bh[c + \frac{h}{2}], \\
M_{s_y} &= bh[a + \frac{h}{2}].
\end{aligned}
$$

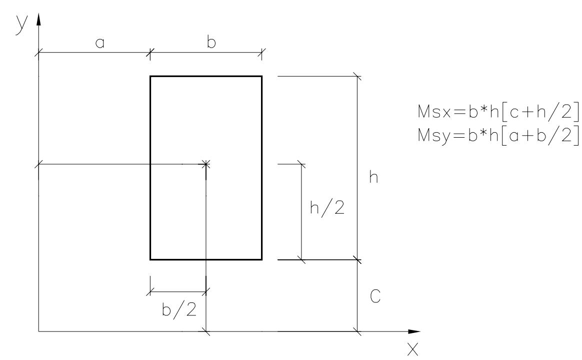


Figura D.4: Cálculo do momento estático a partir da definição do centor de gravidade.

Uma propriedade do momento estático é a seguinte: *o momento estático de uma superfície com relação a um eixo que passa pelo seu centro de gravidade é zero,e inversamente se o momento estático de uma superfície com relação a um eixo é zero, este eixo passa pelo seu centro de gravidade.* Esta propriedade está ilustrada na Figura D.5 para as duas superfícies. Para a área da Figura D.5(a), o eixo r passa pelo CG e o momento estático em relação a r será nulo, ou seja,

$$M_{s_r} = A(0) = 0.$$

No caso da superfície da Figura D.5(b), os momentos estáticos em relação aos eixos r e t serão dados pelo produto da área A pelas respectivas distâncias d_r e d_t do CG da área aos eixos r e t. Portanto,

$$
\begin{aligned}
M_{s_r} &= Ad_r, \\
M_{s_t} &= Ad_t.
\end{aligned}
$$

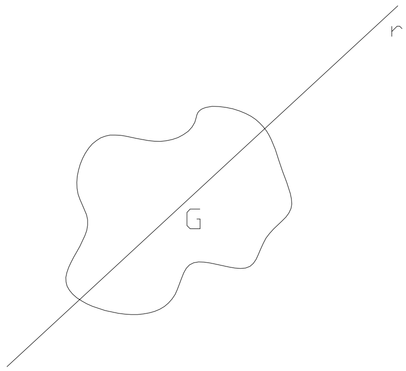
Por sua vez, como o eixo u passa pelo CG da seção, o momento estático em relação a exte eixo é nulo, isto é, $M_{s_u} = 0$.

Exemplo D.4 *Determinar o centro de gravidade para o perfil T ilustrado na Figura D.6. Neste caso, considera-se o perfil T como constituído dos retângulos 1 e 2 mostrados na Figura D.6.*

O sistema de coordenadas é colocado de tal forma que o eixo y seja um eixo de simetria da seção. Logo, a coordenada x_G do centro de gravidade é nula, ou seja,

$$x_G = \frac{M_{s_y}}{A} = \frac{0}{A} = 0.$$

Assim, o CG sempre estará ao longo de um eixo de simetria.



(a) Eixo r passa pelo CG.

(b) Eixos r e t não passam pelo CG.

Figura D.5: Centro de gravidade de uma área plana.

Para o cálculo de y_G, emprega-se (D.12). Observa-se que a área A e o momento estático M_{s_x} da seção são dados pela soma das áreas e momentos estáticos dos dois retângulos. Portanto,

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2, \\ M_{s_x} &= (M_{s_x})_1 + (M_{s_x})_2 \end{aligned}$$

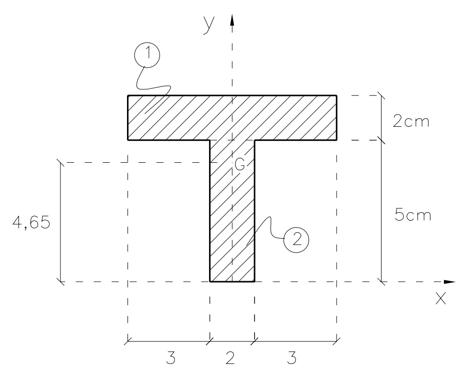


Figura D.6: Perfil T.

Da Figura D.6, vem que

$$\begin{aligned} A &= (8)(2) + (2)(5) = 26cm^2, \\ M_{s_x} &= A_1 d_1 + A_2 d_2 = (8)(2)(6) + (2)(5)(2,5) = 121cm^3. \end{aligned}$$

Portanto,

$$y_G = \frac{M_{s_x}}{A} = \frac{121}{26} = 4,65cm.$$

□

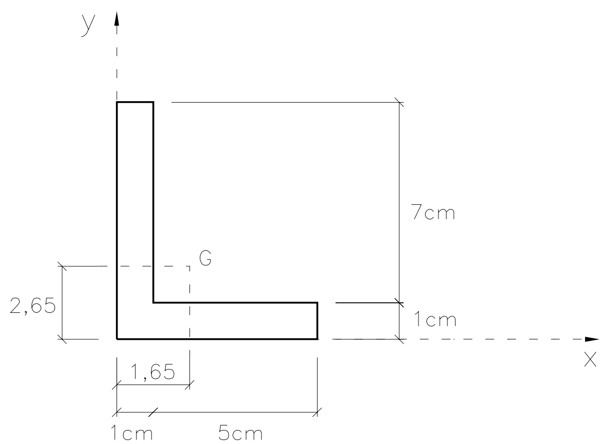


Figura D.7: Perfil L.

Exemplo D.5 *Determinar o centro de gravidade para a superfície da Figura D.7.*

Neste caso, os eixos x e y do sistema de referência adotado não são eixos de simetria. Deve-se, então, calcular as duas coordenadas (x_G, y_G) do centro de gravidade. Novamente, a área e os momentos estáticos são dados pela soma das respectivas áreas e dos momentos estáticos dos retângulos 1 e 2 ilustrados na Figura D.7.

Para o cálculo de x_G, emprega-se (D.11), sendo

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = (1)(8) + (5)(1) = 13cm^2, \\ M_{s_y} &= \left(M_{s_y}\right)_1 + \left(M_{s_y}\right)_2 = (1)(8)(0,5) + (5)(1)(3,5) = 21,5cm^3. \end{aligned}$$

Logo,

$$x_G = \frac{M_{s_y}}{A} = \frac{21,5}{13} = 1,65cm.$$

De forma análoga para y_G, tem-se que

$$M_{s_x} = (M_{s_x})_1 + (M_{s_x})_2 = (1)(8)(4) + (1)(5)(0,5) = 34,5cm^3.$$

Portanto,

$$y_G = \frac{M_{s_x}}{A} = \frac{34,5}{13} = 2,65cm.$$

□

Exemplo D.6 *Determinar o centro de gravidade da superfície ilustrada na Figura D.8.*

Adotando o sistema de referência xy da Figura D.8, deve-se calcular as duas coordenadas (x_G, y_G) do centro de gravidade. Para o cálculo de x_G, observa-se que

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 = (5)(1) + (10)(1) + (5)(1) = 20cm^2, \\ M_{s_y} &= \left(M_{s_y}\right)_1 + \left(M_{s_y}\right)_2 + \left(M_{s_y}\right)_3 = (1)(5)(0,5) + (1)(10)(6) + (1)(5)(11,5) = 120cm^3. \end{aligned}$$

Logo,

$$x_G = \frac{M_{s_y}}{A} = \frac{120}{20} = 6cm.$$

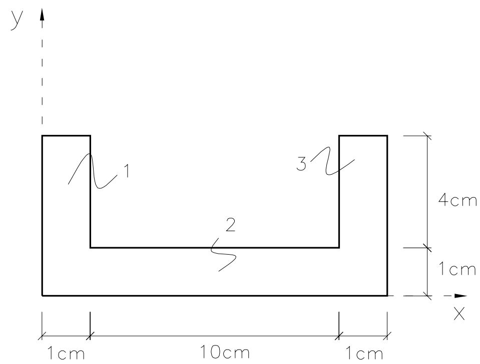


Figura D.8: Perfil U.

De forma análoga para o cálculo de y_G, vem que

$$M_{s_x} = (M_{s_x})_1 + (M_{s_x})_2 + (M_{s_x})_3 = (1)(5)(2,5) + (1)(10)(0,5) + (1)(5)(2,5) = 30cm^3.$$

Portanto,

$$y_G = \frac{M_{s_x}}{A} = \frac{30}{20} = 1,5cm.$$

□

D.3 Momento de Inércia

Considere uma superfície plana de área A e dois eixos ortogonais x e y de seu plano. Seja dA um elemento de superfície genericamente posicionado com relação ao sistema de referência conforme ilustrado na Figura D.1.

Define-se o momento de inércia de um elemento de superfície de área dA com relação aos eixos x e y, respectivamente, por

$$dI_x = y^2 dA, \tag{D.13}$$
$$dI_y = x^2 dA. \tag{D.14}$$

A partir daí, o momento de inércia de área com relação aos eixos x e y são dados pela seguintes integrais

$$I_x = \int_A y^2 dA, \tag{D.15}$$
$$I_y = \int_A x^2 dA. \tag{D.16}$$

Exemplo D.7 *Determinar os momentos de inércia I_{x_G} e I_{y_G} em relação aos eixos que passam pelo centro de gravidade do retângulo da Figura D.2(b).*

Para o cálculo de I_{x_G} emprega-se (D.15) e o elemento de área $dA = bdy$ mostrado na Figura D.2(a). Logo,

$$I_{x_G} = \int_A y^2 dA = b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{b}{3} y^3 |_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right] = \frac{bh^3}{12}. \tag{D.17}$$

Analogamente, utiliza-se (D.16) para determinar I_{y_G} e o elemento de área $dA = hdx$ ilustrado na Figura D.2(a). Portanto,

$$I_{y_G} = \int_A x^2 dA = h \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} x^2 dx = \frac{h}{3}\, x^3\Big|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} = \frac{h}{3}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^3 - \left(-\frac{b}{2}\right)^3\right] = \frac{hb^3}{12}. \tag{D.18}$$

A dimensão que vai ao cubo é sempre aquela cortada pelo eixo em relação ao qual está se calculando o momento de inércia do retângulo.

□

D.3.1 Teorema dos Eixos Paralelos

O teorema dos eixos paralelos ou de Steiner é o seguinte: *o momento de inércia de uma superfície plana de área A com relação a um eixo qualquer de seu plano é igual ao momento de inércia da superfície com relação ao eixo que passa pelo seu centro de gravidade e é paralelo ao eixo anterior mais o produto da área A da superfície pela distância entre os eixos ao quadrado.* Tomando-se a superfície ilustrada na Figura D.9, o momento de inércia em relação ao eixo r é dado pela soma do momento de inércia em relação ao eixo r_G, que passa pelo CG da superfície e é paralelo a r, mais o produto da área A pelo quadrado da distância entre os eixos r e r_G. Logo,

$$I_r = I_{r_G} + Ad_r^2.$$

Analogamente, para o eixo s, tem-se que

$$I_s = I_{s_G} + Ad_s^2.$$

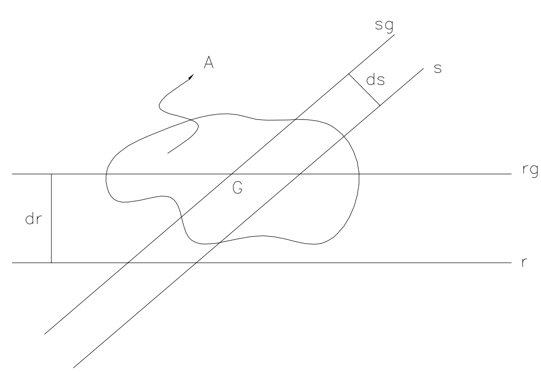


Figura D.9: Teorema dos eixos paralelos.

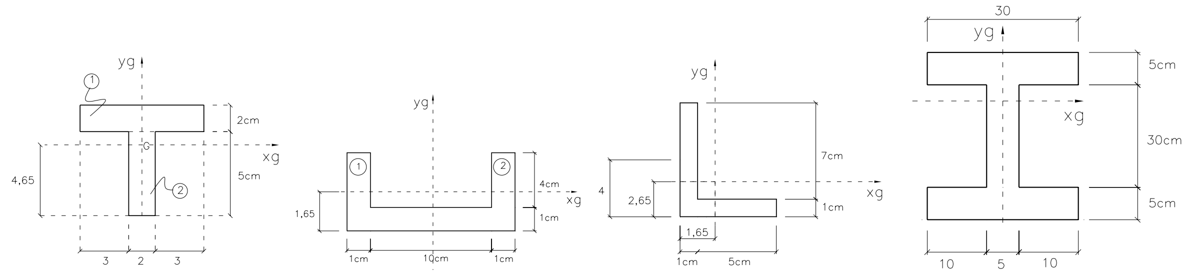
Exemplo D.8 *Determinar os momentos de inércia I_{x_G} e I_{y_G} em relação aos eixos que passam pelo centro de gravidade do perfil T da Figura D.10(a).*

De forma análoga aos momentos estáticos, os momentos de inércia da seção são dados pelas somas dos respectivos momentos de inércias dos retângulos 1 e 2 ilustrados na Figura D.10(a).

Logo, no cálculo de I_{x_G} vem que

$$I_{x_G} = \left(I_{x_G}\right)_1 + \left(I_{x_G}\right)_2 .$$

Para calcular $\left(I_{x_G}\right)_1$ e $\left(I_{x_G}\right)_2$, emprega-se o teorema dos eixos paralelos, ou seja,



(a) Perfil T. (b) Perfil U. (c) Perfil L. (d) Perfil I.

Figura D.10: Cálculo de momento de inércia.

$$
\begin{aligned}
(I_{x_G})_1 &= \frac{(8)(2)^3}{12} + (8)(2)(6 - 4,65)^2 = 34,5cm^4, \\
(I_{x_G})_2 &= \frac{(2)(5)^3}{12} + (5)(2)(4,65 - 2,5)^2 = 67,1cm^4.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$I_{x_G} = 34,5 + 67,1 = 101,6cm^4$$

Para o cálculo de I_{y_G}, observa-se que

$$I_{y_G} = (I_{y_G})_1 + (I_{y_G})_2 = \frac{(8)^3(2)}{12} + \frac{(2)^3(5)}{12} = 85,3 + 3,3 = 88,6cm^4.$$

□

Exemplo D.9 *Determinar os momentos de inércia I_{x_G} e I_{y_G} em relação aos eixos que passam pelo centro de gravidade da superfície da Figura D.10(b).*

No caso de I_{x_G}, verifica-se que

$$I_{x_G} = (I_{x_G})_1 + (I_{x_G})_2 + (I_{x_G})_3 .$$

Os momentos de inércia de cada um dos 3 retângulos são calculados utilizando-se o teorema dos eixos paralelos, ou seja,

$$
\begin{aligned}
(I_{x_G})_1 &= \frac{(5)^3(1)}{12} + (5)(1)(2,5 - 1,5)^2 = 15,4cm^4, \\
(I_{x_G})_2 &= \frac{(5)^3(1)}{12} + (5)(1)(2,5 - 1,5)^2 = 15,4cm^4, \\
(I_{x_G})_3 &= \frac{(1)^3(10)}{12} + (10)(1)(1,5 - 0,5)^2 = 10,8cm^4.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$I_{x_G} = (I_{x_G})_1 + (I_{x_G})_2 + (I_{x_G})_3 = 41,6cm^4.$$

Por sua vez, I_{y_G} *é dado por*

$$I_{y_G} = (I_{y_G})_1 + (I_{y_G})_2 + (I_{y_G})_3\,.$$

Utilizando o teorema dos eixos paralelos

$$\begin{aligned}
(I_{y_G})_1 &= \frac{(1)^3(5)}{12} + (1)(5)(6-0,5)^2 = 151,7cm^4, \\
(I_{y_G})_2 &= \frac{(1)^3(5)}{12} + (1)(5)(6-0,5)^2 = 151,7cm^4, \\
(I_{y_G})_3 &= \frac{(10)^3(1)}{12} + (10)(1)(0,65-0,5)^2 = 83,5cm^4.
\end{aligned}$$

Logo,

$$I_{y_G} = (I_{y_G})_1 + (I_{y_G})_2 + (I_{y_G})_3 = 386,9cm^4.$$

□

Exemplo D.10 *Determinar os momentos de inércia* I_{x_G} *e* I_{y_G} *em relação aos eixos que passam pelo centro de gravidade da superfície da Figura D.10(c).*

De forma análoga, aos exemplos anteriores, tem-se para I_{x_G}

$$I_{x_G} = (I_{x_G})_1 + (I_{x_G})_2\,,$$

sendo

$$\begin{aligned}
(I_{x_G})_1 &= \frac{(8)^3(1)}{12} + (1)(8)(4-2,65)^2 = 57,3cm^4, \\
(I_{x_G})_2 &= \frac{(1)^3(5)}{12} + (5)(1)(2,65-0,5)^2 = 23,5cm^4.
\end{aligned}$$

Logo,

$$I_{x_G} = 80,8cm^4.$$

Analogamente, para I_{y_G}

$$I_{y_G} = (I_{y_G})_1 + (I_{y_G})_2\,,$$

sendo

$$\begin{aligned}
(I_{y_G})_1 &= \frac{(1)^3(8)}{12} + (1)(8)(1,65-0,5)^2 = 11,3cm^4, \\
(I_{y_G})_2 &= \frac{(5)^3(1)}{12} + (1)(5)(3,5-1,65)^2 = 27,5cm^4.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$I_{y_G} = 38,8cm^4.$$

□

Exemplo D.11 *Determinar I_{x_G} e I_{y_G} para a superfície da Figura D.10(d).*

Inicialmente, calculam-se as coordenadas do centro de gravidade. Logo,

$$y_G = \frac{M_{s_x}}{A} = \frac{(M_{s_x})_1 + (M_{s_x})_2 + (M_{s_x})_3}{A_1 + A_2 + A_3}.$$

Substituindo os valores vem que

$$y_G = \frac{(5)(25)(2,5) + (5)(30)(20) + (5)(30)(37,5)}{(5)(25) + (5)(30) + (5)(30)} = \frac{38937,5}{425} = 21,0cm.$$

A coordenada x_G é zero, pois o a seção é simétrica em relação ao eixo vertical adotado.

O momento de inércia I_{x_G} é dado por

$$I_{x_G} = (I_{x_G})_1 + (I_{x_G})_2 + (I_{x_G})_3 \, .$$

Pelo teorema dos eixos paralelos

$$\begin{aligned}
(I_{x_G})_1 &= \frac{(5)^3(25)}{12} + (5)(25)(21,03 - 2,5)^2 = 43180,53cm^4, \\
(I_{x_G})_2 &= \frac{(30)^3(5)}{12} + (5)(30)(21,03 - 20)^2 = 11409,14cm^4, \\
(I_{x_G})_3 &= \frac{(30)(5)^3}{12} + (3)(50)(37,5 - 21,03)^2 = 41001,63cm^4.
\end{aligned}$$

Logo,

$$I_{x_G} = 95591,31cm^4.$$

Finalmente, o momento de inércia I_{y_G} é dado por

$$I_{x_G} = (I_{x_G})_1 + (I_{x_G})_2 + (I_{x_G})_3 = \frac{(25)^3(5)}{12} + \frac{(5)^3(20)}{12} + \frac{(25)^3(5)}{12} = 18072,92cm^4.$$

□