EM421 - RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS I
SEGUNDO SEMESTRE DE 1999
PROVA I - 17/09/1999

Nome:
RA:

Questão 1 (Valor 5,0): A viga bi-engastada mostrada abaixo possui rótulas nas seções B e C. A viga deve suportar uma carga uniformemente distribuída $q_o = 2000N/m$ ao longo de um vão $L = 3m$. Por razões construtivas a seção transversal da viga deverá ser um retângulo com dimensões $b \times 2b$. Para esta viga solicita-se: a) as equações e os diagramas de esforço cortante e momento fletor a serem obtidas através da integração da equação diferencial do momento fletor, b) as reações de apoio, c) a dimensão mínima b da seção transversal sendo a tensão normal admissível do material $\bar{\sigma} = 200N/mm^2$.

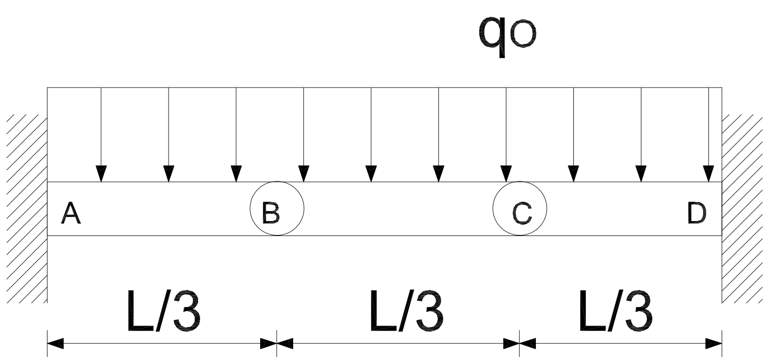


Figura 1: Viga da questão 1.

Questão 2 (Valor 5,0): A Figura abaixo ilustra um eixo de uma máquina de comprimento $L = 3m$. Na extremidade $x = 0$, tem-se um motor que aplica um torque externo $T = 1600Nm$. Além disso, o eixo está submetido a um torque distribuído linear de intensidade $t_o = 800Nm/m$. Pede-se traçar o diagrama do momento torçor e determinar a reação de apoio através da integração da equação diferencial do momento torçor. Suponha agora que o eixo tenha seção circular vazada com a seguinte relação entre os diâmetros interno e externo $d_i = 0,8d_e$. Sabendo-se que a tensão de cisalhamento admissível do material é $\bar{\tau} = 50MPa$, dimensione o eixo. Após dimensionar o eixo determinar o ângulo de torção nas seções $x = 0$ e $x = 2m$ sendo $G = 80GPa$.

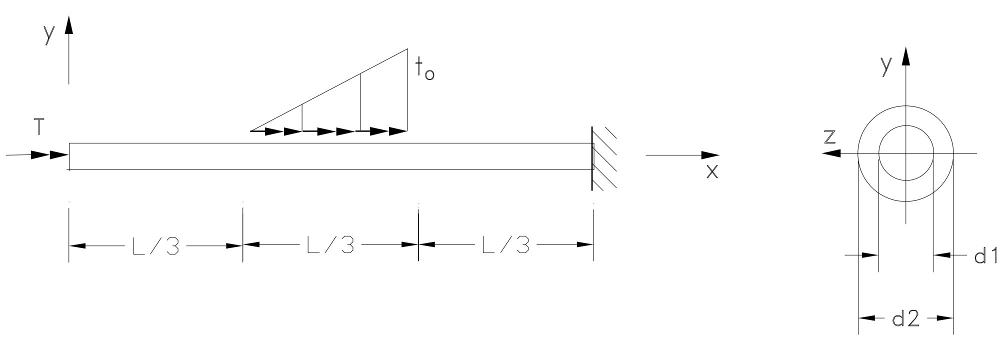


Figura 2: Eixo da questão 2.

1. **Solução da Questão 1**

2. Equação do carregamento: $q(x) = -q_0$

3. Condições de contorno

   $v(x=0) = 0 \qquad v(x=L) = 0$

   $\theta_z(x=0) = 0 \qquad \theta_z(x=L) = 0$

4. Restrições adicionais nas rótulas

   $M_z(x = \frac{L}{3}) = 0 \qquad M_z(x = \frac{2L}{3}) = 0$

5. Integração da equação diferencial: $\frac{d^2 M_z}{dx^2} = q(x) = -q_0$

   - 1^a integração: força cortante
     $V_y(x) = -q_0 x + C_1$
   - 2^a integração: momento fletor
     $M_z(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$

6. Determinação das constantes de integração

   $M_z(x = \frac{L}{3}) = -q_0 \frac{(L/3)^2}{2} + C_1 \frac{L}{3} + C_2 = 0 \rightarrow C_1 + \frac{3}{L} C_2 = q_0 \frac{L}{6}$

   $M_z(x = \frac{2L}{3}) = -q_0 \frac{(2L/3)^2}{2} + C_1 \frac{2L}{3} + C_2 = 0 \rightarrow C_1 + \frac{3}{2L} C_2 = q_0 \frac{L}{3}$

   Resolvendo o sistema constituído das duas equações anteriores, tem-se $C_1 = q_0 \frac{L}{2}$ e $C_2 = -q_0 \frac{L^2}{9}$.

7. Equações finais

   Substituindo as constantes de integração C_1 e C_2 e os valores dados $L = 3m$ e $q_0 = 2000 N/m$ vem que

   - força cortante: $V_y(x) = -q_0 x + q_0 \frac{L}{2} = -2000x + 3000$
   - momento fletor: $M_z(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 \frac{L}{2} x - q_0 \frac{L^2}{9} = -1000x^2 + 3000x - 2000$

8. Diagramas da força cortante e momento fletor

   $V_y(x=0) = 3000N \qquad M_z(x=0) = -2000Nm$

   $V_y(x=1) = 1000N \qquad M_z(x=1) = 0$

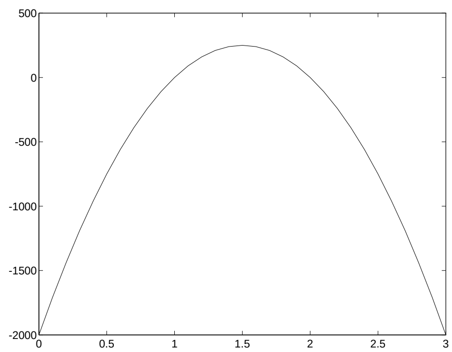
   $V_y(x=1,5) = 0 \qquad M_z(x=1,5) = 250$

   $V_y(x=2) = -1000N \qquad M_z(x=2) = 0$

   $V_y(x=3) = -3000N \qquad M_z(x=3) = -2000Nm$

9. Reações nos apoios

Forças:	$R_{Ay} = V_y(x=0) = 3000N$	$R_{By} = -V_y(x=3) = 3000$
Momentos:	$M_{Az} = -M_z(x=0) = 2000Nm$	$M_{Bz} = M_z(x=3) = -2000Nm$



(a) Força cortante.

(b) Momento fletor.

Figura 3: Diagramas para a viga da questão 1.

10. Dimensionamento

As seções $x = 0^+$ e $x = 3^-$ são as mais solicitadas da viga pois os momentos fletores em módulo são máximos na viga e com valor de $|M_z| = 2000Nm = 2 \times 10^6 Nm$.

O módulo de resistência da seção é dado por $W_z = \dfrac{I_z}{y_{\max}}$. Por sua vez, $I_z = \dfrac{bh^3}{12} = \dfrac{b(2b)^3}{12} = \dfrac{2}{3}b^4$ e $y_{\max} = b$. Logo, $W_z = \dfrac{2}{3}b^3$.

No dimensionamento impõe-se que a tensão máxima na viga $\sigma_{\max} = \dfrac{M_{z\,\max}}{W_z}$ seja igual a tensão admissível do material, ou seja,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\,\max}}{W_z} = \frac{M_{z\,\max}}{\frac{2}{3}b^3} = \bar{\sigma} \rightarrow b = \left(\frac{3M_{z\,\max}}{2\bar{\sigma}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{(3)(2 \times 10^6)}{(2)(200)}\right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow b = 24,7mm.$$

1. **Solução da Questão 2**

2. Equação do carregamento: $t(x) = \dfrac{t_0}{L/3}\left\langle x - \dfrac{L}{3}\right\rangle^1 - \dfrac{t_0}{L/3}\left\langle x - \dfrac{2L}{3}\right\rangle^1 - t_0\left\langle x - \dfrac{2L}{3}\right\rangle^0$

3. Condições de contorno

   $M_x(x=0) = -T \qquad \theta(x=L) = 0$

4. Integração da equação diferencial: $GI_p\dfrac{d^2\theta}{dx^2} = -t(x) = -\dfrac{t_0}{L/3}\left\langle x - \dfrac{L}{3}\right\rangle^1 + \dfrac{t_0}{L/3}\left\langle x - \dfrac{2L}{3}\right\rangle^1 + t_0\left\langle x - \dfrac{2L}{3}\right\rangle^0$

   - 1^a integração: momento torçor

     $M_x(x) = -\dfrac{t_0}{2L/3}\left\langle x - \dfrac{L}{3}\right\rangle^2 + \dfrac{t_0}{2L/3}\left\langle x - \dfrac{2L}{3}\right\rangle^2 + t_0\left\langle x - \dfrac{2L}{3}\right\rangle^1 + C_1$

   - 2^a integração: ângulo de torção

     $GI_p\theta(x) = -\dfrac{t_0}{2L}\left\langle x - \dfrac{L}{3}\right\rangle^3 + \dfrac{t_0}{2L}\left\langle x - \dfrac{2L}{3}\right\rangle^3 + \dfrac{t_0}{2}\left\langle x - \dfrac{2L}{3}\right\rangle^2 + C_1x + C_2$

5. Determinação da constante de integração

   $M_x(x=0) = -\dfrac{t_0}{2L/3}(0) + \dfrac{t_0}{2L/3}(0) + t_0(0) + C_1 = -T \rightarrow C_1 = -T$

   $GI_p\theta(x=L) = -\dfrac{t_0}{2L}\left(L - \dfrac{L}{3}\right)^3 + \dfrac{t_0}{2L}\left(L - \dfrac{2L}{3}\right)^3 + \dfrac{t_0}{2}\left(L - \dfrac{2L}{3}\right)^2 + C_1L + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = \dfrac{2t_0}{27}L^2 + TL$

6. Equação final:

   - momento torçor: $M_x(x) = -\dfrac{t_0}{2L/3}\left\langle x - \dfrac{L}{3}\right\rangle^2 + \dfrac{t_0}{2L/3}\left\langle x - \dfrac{2L}{3}\right\rangle^2 + t_0\left\langle x - \dfrac{2L}{3}\right\rangle^1 - T$
   - ângulo de torção: $GI_p\theta(x) = -\dfrac{t_0}{2L}\left\langle x - \dfrac{L}{3}\right\rangle^3 + \dfrac{t_0}{2L}\left\langle x - \dfrac{2L}{3}\right\rangle^3 + \dfrac{t_0}{2}\left\langle x - \dfrac{2L}{3}\right\rangle^2 - Tx + \dfrac{2t_0}{27}L^2 + TL$

   Substituindo os valores dados $L = 3m$, $T = 1600Nm$ e $t_0 = 800Nm/m$ vem que

   $M_x(x) = -400\langle x-1\rangle^2 + 400\langle x-2\rangle^2 + 800\langle x-2\rangle^1 - 1600$

   $GI_p\theta(x) = -\dfrac{400}{3}\langle x-1\rangle^3 + \dfrac{400}{3}\langle x-2\rangle^3 + 400\langle x-2\rangle^2 - 1600x + \dfrac{16000}{3}$

7. Diagrama do momento torçor

   $0 < x < 1 \quad \rightarrow \quad M_x(x) = -1600Nm$

   $1 < x < 2 \quad \rightarrow \quad M_x(x) = -400(x-1)^2 - 1600 = \begin{array}{ll} -1600Nm & (x=1) \\ -2000Nm & (x=2) \end{array}$

   $2 < x < 3 \quad \rightarrow \quad M_x(x) = -400(x-1)^2 + 400(x-2)^2 + 800(x-2)^1 - 1600 = -2000Nm$

8. Reação no apoio: $T_D = M_x(x=3) = -2000Nm$

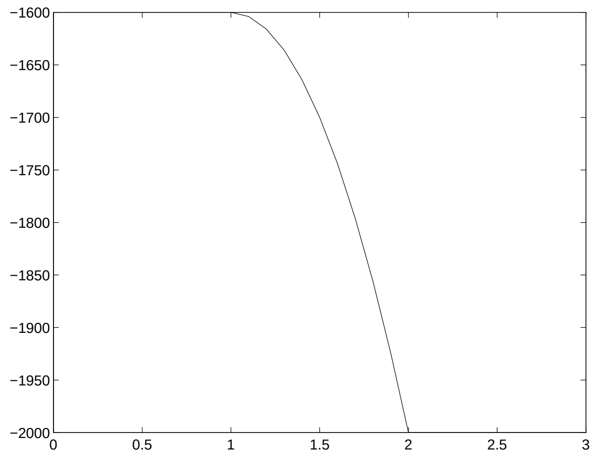


Figura 4: Diagrama de momento torçor para o eixo da questão 2.

9. Dimensionamento

   As seções no intervalo $2 < x < 3$ são as mais solicitadas do eixo e o momento torçor em módulo é $|M_x| = 2000Nm$.

   O módulo de resistência à torção da seção é dado por $W_x = \dfrac{2I_p}{d_e}$. Por sua vez, o momento de inércia da seção é dado por $I_p = \dfrac{\pi}{4}(d_e^4 - d_i^4)$. Como $d_i = 0,8d_e$, tem-se que $I_p = \dfrac{\pi}{4}(0,5904d_e^4) = 0,4637d_e^4$. Logo, $W_x = 0,9274d_e^3$.

   No dimensionamento impõe-se que a tensão de cisalhamento máxima no eixo $\tau_{\max} = \dfrac{M_{x\,\max}}{W_x}$ seja igual a tensão de cisalhamento admissível do material, ou seja,

   $$\tau_{\max} = \frac{M_{x\,\max}}{W_x} = \frac{M_{x\,\max}}{0,9274d_e^3} = \bar{\tau} \rightarrow d_e = \left(\frac{M_{x\,\max}}{0,9274\bar{\tau}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2000}{(0,9274)(50\times 10^6)}\right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow d_e = 35,1mm.$$

   Logo, $d_i = 0,8d_e = 28,1mm$.

10. Ângulos de torção em $x = 0$ e $x = 2m$

    $GI_p\theta(x=0) = -\dfrac{400}{3}(0)^3 + \dfrac{400}{3}(0)^3 + 400(0)^2 - 1600(0) + \dfrac{16000}{3} \rightarrow \theta(x=0) = \dfrac{16000}{3GI_p}$

    $GI_p\theta(x=2) = -\dfrac{400}{3}(2-1)^3 + \dfrac{400}{3}(2-2)^3 + 400(2-2)^2 - 1600(2) + \dfrac{16000}{3} \rightarrow \theta(x=2) = \dfrac{6000}{3GI_p}$

    O momento de inércia polar é calculado como $I_p = \dfrac{\pi}{4}(d_e^4 - d_i^4) = I_p = \dfrac{\pi}{4}((35,1)^4 - (28,1)^4) =.7,024\times 10^5 mm^4 = 7,024\times 10^{-7}m^4$. Logo, $G\ I_p = (80\times 10^9)(7,024\times 10^{-7}) = 56194,59$. Substituindo nas expressões das rotações vem que

    $\theta(x=0) = \dfrac{16000}{3GI_p} = \dfrac{16000}{(3)(56194,59)} = 0.095rd$

    $\theta(x=0) = \dfrac{6000}{3GI_p} = \dfrac{6000}{(3)(56194,59)} = 0.036rd$