

Capítulo 2

EQUILÍBRIO

2.1 Introdução

Neste capítulo, faz-se uma apresentação das abordagens newtoniana e analítica para o tratamento de problemas de mecânica. Posteriormente, consideram-se convenções diagramáticas para suportes e carregamentos. Finalmente, estuda-se o equilíbrio de partículas e corpos segundo o Princípio da Potência Virtual (PPV) comparando-se com as condições de equilíbrio dadas pelas lei de Newton. Antes de iniciar o conteúdo deste capítulo, torna-se essencial estudar notação inidicial e revisar o conceito de vetor abordados nos Apêndices ?? e B.

2.2 Objetivos da Mecânica do Contínuo

Como se sabe a matéria não é contínua, sendo formada de moléculas as quais são constituídas de partículas. No entanto, vários fenômenos físicos podem ser analisados sem se preocupar com a estrutura molecular dos materiais. Para isso, aplica-se a teoria dos meios contínuos, a qual trata da descrição dos fenômenos físicos como um todo, negligenciando o comportamento do material em menor escala.

A teoria do contínuo considera a matéria como indefinidamente divisível, sendo aceita a idéia de um volume infinitesimal de material, o qual é denominado partícula. Desta maneira, em qualquer vizinhança de uma partícula, existe sempre material presente. A validade desta hipótese depende da situação considerada e deve ser comprovada através de testes e ensaios. No entanto, a aplicação dos conceitos de mecânica do contínuo é plenamente justificável para vários casos, como por exemplo os problemas que serão analisados posteriormente neste texto.

Basicamente, a mecânica do contínuo estuda a resposta de materiais para diferentes condições de carregamento. Esta teoria pode ser dividida em duas partes principais:

- princípios gerais comuns aos vários meios,
- equações constitutivas para materiais idealizados.

Os princípios gerais são axiomas obtidos a partir da observação dos fenômenos físicos, podendo-se citar a conservação de massa e energia, assim como os princípios da quantidade de momento linear e angular. Na segunda parte da teoria, tem-se as equações constitutivas, as quais são empregadas para definir o comportamento de materiais idealizados, tais como o caso de um sólido elástico linear.

2.3 Definição de Corpos

Todo corpo tem como característica física o fato de ocupar regiões do espaço euclidiano \mathcal{E} . Assim, um corpo qualquer pode ocupar diferentes regiões em tempos distintos. Embora nenhuma destas regiões possa ser associada ao corpo, torna-se conveniente selecionar uma delas, denominada *configuração de referência* \mathcal{B} , identificando pontos do corpo com as suas posições em \mathcal{B} . Desta maneira, um corpo \mathcal{B} passa a ser uma região regular de \mathcal{E} , sendo os pontos $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ denominados *pontos materiais*. Qualquer subregião regular limitada de \mathcal{B} é chamada *parte*. Estes conceitos estão ilustrados na Figura 2.1.

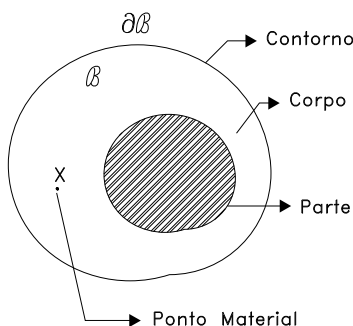


Figura 2.1: Configuração de referência \mathcal{B} e seu contorno $\partial\mathcal{B}$.

Como um corpo pode ocupar diferentes regiões ao longo de um movimento, torna-se necessário a introdução de um parâmetro $t \in [t_0, t_f]$, designando uma certa configuração \mathcal{B}_t do corpo. Observa-se que em vários problemas t não representa necessariamente o tempo.

2.4 Abordagens Newtoniana e Analítica

Uma das maiores dificuldades ao longo da história da Mecânica tem sido encontrar uma representação físico-matemática satisfatória para o conceito de ação de um determinado corpo sobre a configuração (estado) de outro.

A partir dos postulados de movimento estabelecidos por Newton, a mecânica desenvolveu-se ao longo de duas linhas principais. A primeira, denominada mecânica vetorial, parte diretamente das leis de Newton e representa a ação através de forças, dadas por vetores segundo um certo sistema de referência. Desta forma, o conceito de força surge como um ente abstrato, definido de forma totalmente desvinculada da cinemática adotada para modelar o problema. Essa abordagem é aplicada no desenvolvimento da física newtoniana, sendo a análise e síntese de forças e momentos a sua principal preocupação.

Leibniz, um contemporâneo de Newton, introduziu uma segunda linha de abordagem denominada mecânica analítica, a qual baseia o estudo do equilíbrio e do movimento em duas grandezas escalares básicas, ou seja, as energias cinética e potencial. Aparentemente mais abstrato, este tratamento traduz a experiência concreta diária. Adota-se como elementos principais da caracterização de ação entre corpos o movimento e a potência (trabalho) dispendida para efetuá-lo. A partir daí, o conceito de força surge naturalmente, não como uma definição abstrata *a-priori*, mas como um elemento de ligação entre a ação de movimento do corpo e a potência dispendida para realizá-la.

Esta segunda descrição é, ao contrário do que possa parecer, tão antiga quanto a própria Mecânica. De fato, desde os primeiros passos no sentido de dar uma estrutura matemática formal à Mecânica, o conceito de potência surgiu como algo básico e fundamental. Neste sentido, destacam-se os trabalhos de pioneiros como J. Bernoulli (1717), definitivamente consagrados por D'Alembert (1743). Essa descrição é também mais natural pois representa, na verdade, o enunciado matemático de uma experiência física

bastante comum. Por exemplo,

- quando se deseja conhecer o peso de um objeto, levanta-se o mesmo ligeiramente, avaliando-se o seu peso pela potência (ou trabalho) para efetuar tal movimento. Em outras palavras, introduz-se um movimento virtual tirando o objeto do movimento natural (repouso) em que se encontrava (ver Figura 2.2);
- de uma maneira similar, para se conhecer a tensão numa correia, desloca-se a mesma de sua configuração natural introduzindo um pequeno movimento com os dedos. Logo, efetua-se uma ação de movimento virtual e através da potência dispendida para realizá-la, avalia-se a tensão da correia (ver Figura 2.3).

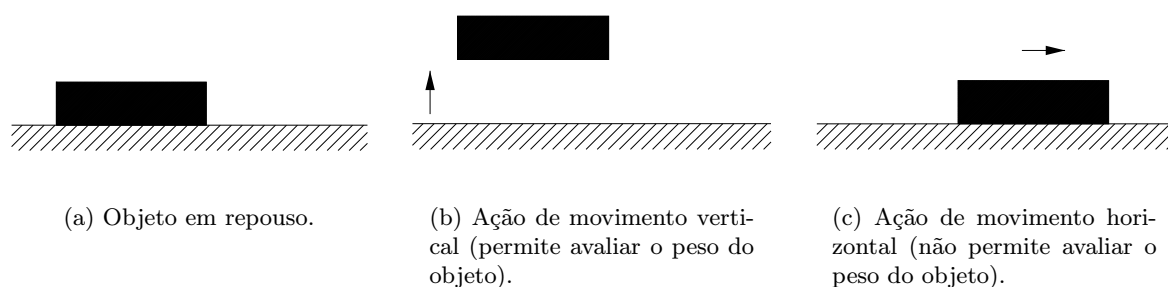


Figura 2.2: Avaliação do peso de um objeto.

Verifica-se que esta última abordagem difere consideravelmente na sua metodologia em relação à mecânica vetorial. O peso do objeto ou a tensão na correia são determinados introduzindo uma ação de movimento apropriada para cada caso. Baseado na potência ou trabalho dispendido para realizar a respectiva ação de movimento é possível avaliar o peso do objeto ou a tensão na correia. A denominação virtual significa que a ação de movimento não é uma ação de movimento natural do corpo em estudo. Uma ação virtual adequada é introduzida apenas para avaliar o estado de forças internas ou externas do objeto. Como ilustrado na Figura 2.2(b), a ação de movimento adequada para avaliar o peso do objeto deve ser na direção vertical. Um movimento horizontal não permite determinar o peso do objeto. No caso da correia, uma ação de movimento normal à correia permite avaliar a tensão como mostrado na Figura 2.3(c). Já uma ação tangencial, não determina o nível de tensão na correia.

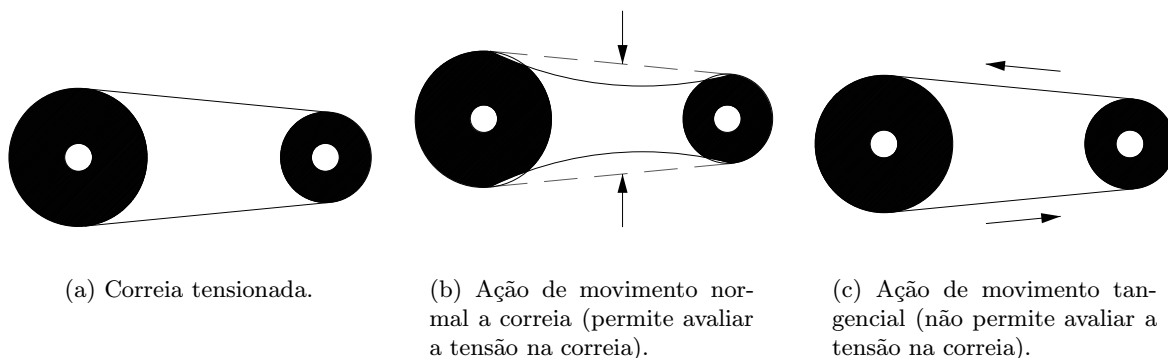


Figura 2.3: Avaliação da tensão na correia.

A lei fundamental de movimento estabelecida por Newton, ou seja, massa vezes aceleração é igual a força, é válida em primeira instância apenas para uma única partícula. Esta lei foi deduzida para o movimento de uma partícula no campo gravitacional da Terra e aplicada ao movimento de planetas sob a ação do sol. Nestes dois problemas, o corpo em movimento pode ser idealizado como uma partícula, ou seja, um ponto simples no qual associa-se uma massa. A lei de Newton fornece uma equação diferencial de movimento e através da sua integração é possível resolver o problema dinâmico.

Entretanto, no caso de um corpo sólido ou fluido, as partículas estão associadas entre si, devendo-se tomar algumas precauções para aplicar a lei de Newton. Deve-se isolar uma partícula das demais e determinar as forças exercidas pelas partículas vizinhas. Desta forma, cada partícula é uma unidade independente seguindo a lei de movimento. Esta análise em termos de forças torna-se trabalhosa, pois não se conhece em geral a natureza das forças de interação. Para resolver esta limitação, Newton introduziu o princípio da ação e reação como a terceira lei de movimento. Entretanto, nem todos os problemas podem ser resolvidos através deste postulado, sendo necessárias novas hipóteses, como por exemplo no caso do estudo de corpos rígidos. Verifica-se ainda que a abordagem newtoniana falha em fornecer uma única resposta para problemas mais complexos.

A mecânica analítica trata os problemas de uma forma diferente. A partícula não é mais isolada, fazendo parte de um sistema como todo. Um sistema mecânico é uma montagem de partículas, as quais interagem entre si. Desta maneira, uma partícula simples não tem significância, mas sim o sistema como um todo, não havendo a necessidade de desmembrar o sistema em partes. Ao contrário do tratamento vetorial, onde cada partícula deve ser considerada de forma especial e a força atuante determinada independentemente das outras partículas, na abordagem analítica tem-se uma única função descrevendo as forças atuantes nas partículas do sistema.

Uma outra diferença fundamental refere-se ao tratamento de condições auxiliares, como no caso de relações cinemáticas conhecidas para o sistema em estudo. Por exemplo, as partículas de um sólido podem se mover como se o corpo fosse rígido, ou seja, a distância entre dois pontos quaisquer permanece fixa. No caso da mecânica newtoniana, há a necessidade de forças para manter esta condição. Já na abordagem analítica não é necessário o conhecimento destas forças, sendo levada em conta apenas a condição cinemática estabelecida. Analogamente, para o caso de fluidos não é necessário conhecer o tipo de forças presentes entre as partículas. Leva-se em conta apenas o fato empírico de que um fluido resiste consideravelmente a qualquer tentativa de alterar o seu volume, enquanto tem-se uma resistência menor a ações que alterem a forma e não o volume do fluido. Logo, despreza-se a natureza das forças entre as partículas, estabelecendo-se condições cinemáticas tais que durante uma ação de movimento, o volume de qualquer parte do fluido deve ser preservada.

No entanto, a principal diferença entre as duas abordagens está no fato de um princípio único sobre o qual está fundamentada a mecânica analítica. Para um sistema complexo, o número de equações de movimento pode ser bastante grande. Os princípios variacionais da mecânica analítica permitem uma base única a partir da qual derivam-se todas as equações. Dado o conceito fundamental de ação, o princípio de estacionariedade desta ação resulta no conjunto de equações diferenciais do sistema. Além disso, esta formulação é invariante com respeito a qualquer transformação de coordenadas.

Logo, as quatro principais diferenças entre os tratamentos vetorial e analítico podem ser resumidas como:

1. a mecânica vetorial isola a partícula, tratando-a de forma individual; já o caso analítico considera o sistema como um todo;
2. a mecânica vetorial constrói uma resultante de forças para cada partícula; o tratamento analítico considera uma única função (energia potencial) contendo todas as forças necessárias;
3. o caso vetorial deve considerar o conjunto de forças necessárias para manter qualquer relação esta-

belecionada entre as coordenadas de um sistema; na mecânica analítica qualquer condição cinemática representa mais um parâmetro conhecido do sistema;

- na abordagem analítica, todo o conjunto de equações pode ser desenvolvido a partir de um único princípio, o qual toma a forma de minimizar uma certa ação. Este princípio é independente de qualquer sistema de coordenadas empregado, sendo possível escolher aquele mais natural a cada problema analisado.

Ao longo deste capítulo, pretende-se mostrar estas duas abordagens para o caso de equilíbrio de corpos rígidos. Nos capítulos seguintes, considera-se a caracterização da deformação em modelos de barra, eixo e viga, procurando ressaltar as vantagens do tratamento analítico ou variacional.

2.5 Convenções Diagramáticas

Como mencionado anteriormente, o objetivo básico da resistência dos materiais é determinar o nível de solicitação de uma estrutura mecânica e estabelecer critérios para a validação de seu projeto atual. Desta maneira, todo carregamento aplicado causa apenas deformação na estrutura. Para isso, deve existir um número suficiente de restrições ou suportes para evitar movimentos de corpo rígido. Assim, tem-se um conjunto de restrições cinemáticas, as quais devem ser satisfeitas para qualquer ação desenvolvida pela estrutura.

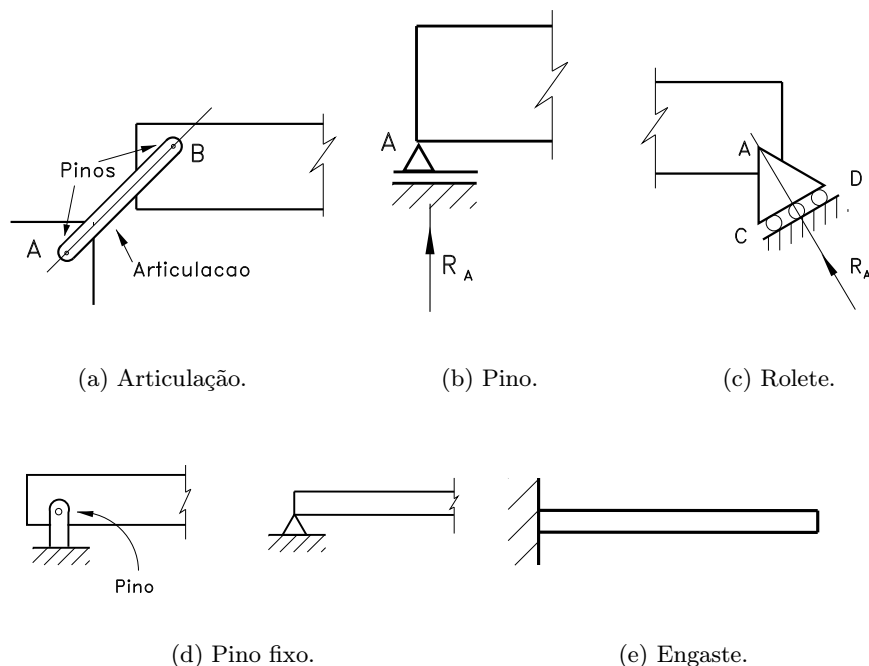


Figura 2.4: Suportes.

2.5.1 Suportes

Torna-se essencial estabelecer algumas convenções para representar os suportes responsáveis por manter uma estrutura em repouso quando submetida a carregamentos externos. Basicamente, os suportes

são identificados pelo tipo de restrição cinemática presente ou de forma equivalente pelas reações que oferecem às forças externas.

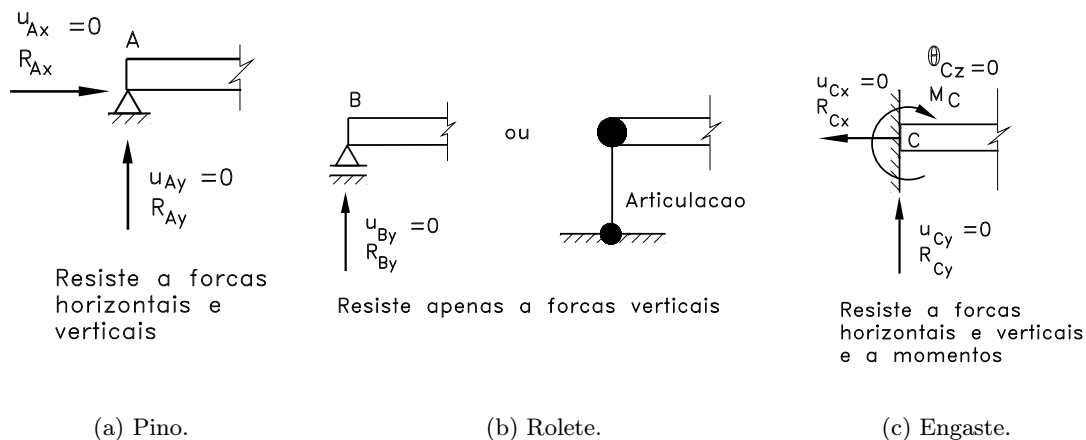


Figura 2.5: Restrições cinemáticas e reações.

Num primeiro caso, tem-se um rolete ou uma articulação como exemplificado nas Figuras 2.4a), b), c). Neste caso, verifica-se um deslocamento nulo ou uma força resistiva em uma linha de ação específica. Portanto, na Figura 2.4

- caso a), qualquer ação de movimento deve respeitar a restrição cinemática de deslocamento nulo ao longo da linha AB. Visto pelo lado da mecânica vetorial, a articulação resiste apenas à forças na direção AB;
- caso b), o deslocamento é nulo na direção vertical e o rolete resiste apenas a uma força vertical;
- caso c), tem-se um deslocamento nulo, originando uma força resistente na direção perpendicular ao plano CD.

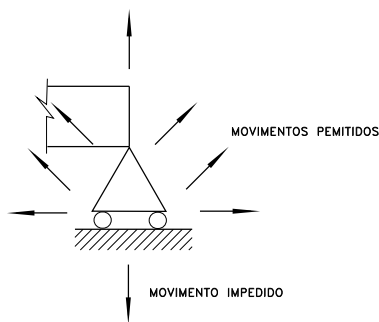


Figura 2.6: Restrição unilateral.

Em todos estes casos, verifica-se uma única reação ou incógnita para as equações de equilíbrio. Nos problemas planos, a relação entre as duas componentes de reação é fixa. O pino ilustrado na Figura 2.4d) é outro tipo de suporte. Observa-se que os deslocamentos nas direções horizontal e vertical são nulos, fazendo surgir duas forças de reação. Por sua vez na Figura 2.4e), ilustra-se um suporte fixo ou

engastamento, onde além dos deslocamentos, também a rotação é nula. Da mesma forma, este suporte resiste a uma força em qualquer direção, além de um momento puro. Como exemplo típico, tem-se um engastamento de uma viga num bloco de concreto. A Figura 2.5 resume as diferenças entre os suportes discutidos, enfatizando as restrições cinemáticas presentes, assim como as reações impostas.

Um outro tipo de vínculo encontrado frequentemente em vários problemas de mecânica, tais como contato e conformação, está ilustrado na Figura 2.6. Esta restrição é denominada unilateral, sendo caracterizada pelo fato de que se a ação de movimento estiver impedida numa direção, não estará na direção oposta. Este caso induz uma não-linearidade ao problema estando fora do escopo desse texto.

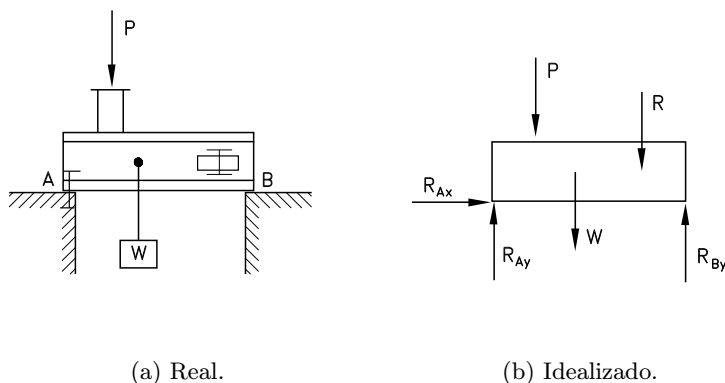


Figura 2.7: Carregamento concentrado numa viga.

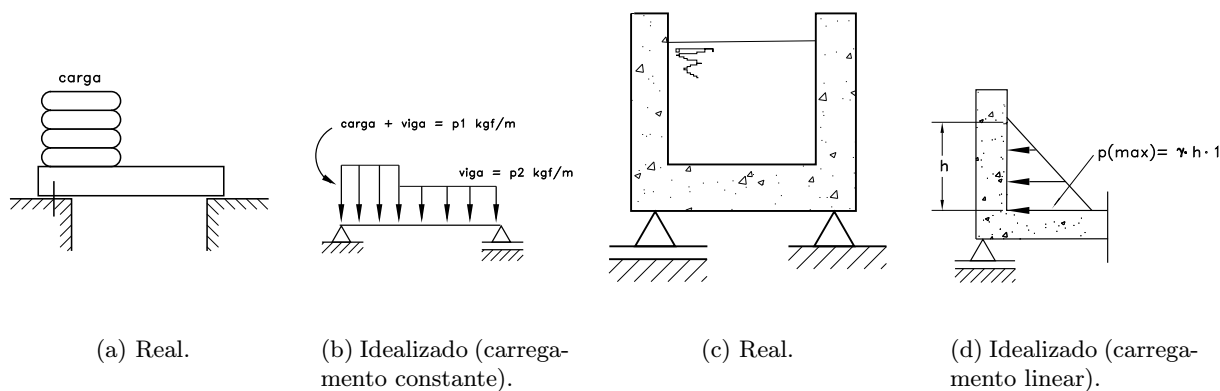


Figura 2.8: Forças distribuídas constante e linear.

2.5.2 Carregamentos

Os carregamentos aplicados sobre uma estrutura podem ser idealizados como forças concentradas, distribuídas e de volume. No caso de uma viga, os carregamentos concentrados podem ser aplicados por exemplo através de um pilar, uma alavanca ou um componente rebitado como mostrado na Figura 2.7(a). Observa-se que estes arranjos aplicam a força numa parcela limitada da viga e são idealizados como forças concentradas, conforme o diagrama da Figura 2.7(b).

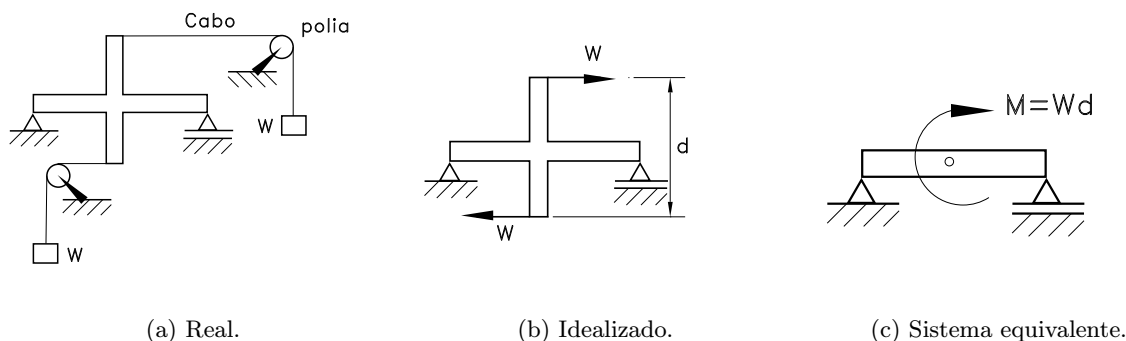


Figura 2.9: Momento concentrado numa viga.

Em outros casos, as forças são aplicadas ao longo de uma porção maior da estrutura, sendo denominados carregamentos distribuídos. A Figura 2.8 ilustra forças distribuídas uniformes e variáveis juntamente com as suas idealizações. Como último caso, pode-se carregar uma viga com um momento concentrado num ponto, conforme mostrado na Figura 2.9.

2.6 Equilíbrio de Partículas e Corpos Rígidos

2.6.1 Mecânica analítica

Partícula

Uma partícula é um ponto material com uma certa massa associada e cujas dimensões não são relevantes. Considere a partícula P livre de qualquer restrição cinemática, localizada no espaço tridimensional cartesiano \mathcal{R}^3 , conforme ilustrado na da Figura 2.10. Dessa forma, qualquer ação de movimento de P é dada por um vetor \mathbf{v} de \mathcal{R}^3 . A potência externa P_e associada a uma ação de movimento \mathbf{v} é dada de forma geral por

$$\begin{aligned} f : \mathcal{R}^3 &\rightarrow \mathcal{R} \\ \mathbf{v} &\rightarrow f(\mathbf{v}) = P_e \end{aligned}$$

ou seja, potência P_e é uma função f que opera sobre um vetor \mathbf{v} de \mathcal{R}^3 e fornece um escalar.

Como a cinemática de P é descrita por um vetor \mathbf{v} , a única operação sobre \mathbf{v} resultando num escalar, ou seja, na potência, é um produto escalar de vetores. Logo, associado à potência P_e e a ação de movimento \mathbf{v} , existe um vetor \mathbf{F} de \mathcal{R}^3 de tal forma que a potência P_e pode ser escrita como

$$P_e = f(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.1)$$

O vetor \mathbf{F} é denominado resultante das forças externas na partícula P . Isso mostra que a partir do conceito de potência, recupera-se a idéia clássica de força. Logo, os esforços externos compatíveis com a cinemática da partícula são vetores força descritos aqui pela resultante de forças \mathbf{F} .

Alguns Aspectos sobre a Definição de Potência

Uma função, tal como a potência externa P_e , que associa a cada elemento de um espaço vetorial um escalar é chamada funcional. A potência é linear em \mathbf{v} , ou seja, quanto maior o módulo do vetor velocidade \mathbf{v} ,

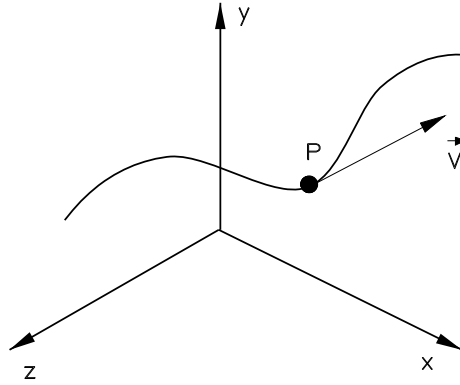


Figura 2.10: Partícula livre de restrição com ação de movimento \mathbf{v} .

maior será o valor da potência P_e . Da mesma maneira, se o módulo de \mathbf{v} diminuir, a potência P_e diminuirá na mesma proporção. De forma geral, diz-se que a potência P_e é um funcional linear das ações de movimento \mathbf{v} .

Observa-se que a potência P_e dada em (2.1) é um funcional do vetor velocidade \mathbf{v} , pois para cada \mathbf{v} associa-se um valor real da potência P_e . Além disso, a expressão (2.1) é um funcional linear de \mathbf{v} . Dado um número real α e duas ações de movimento \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , as seguintes relações são válidas

$$\begin{aligned} P_e &= f(\alpha\mathbf{v}) = \mathbf{F} \cdot (\alpha\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) = \alpha P_e, \\ P_e &= f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_1) + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_2) = P_{e_1} + P_{e_2}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

sendo $P_{e_1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_1$ e $P_{e_2} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_2$ os valores das potências associadas às ações de movimento \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 . As duas propriedades anteriores mostram a linearidade da potência pois, ao se multiplicar \mathbf{v} por um escalar α , a potência também é multiplicada por α . Além disso, a potência P_e associada à soma de duas ações de movimento \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 é igual a soma das potências individuais P_{e_1} e P_{e_2} . As propriedades anteriores podem ser escritas em uma única expressão para α e β escalares e \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 vetores de velocidade

$$\begin{aligned} P_e &= f(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) = \mathbf{F} \cdot (\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) = \mathbf{F} \cdot (\alpha\mathbf{v}_1) + \mathbf{F} \cdot (\beta\mathbf{v}_2) \\ &= \alpha(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_1) + \beta(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_2) = \alpha P_{e_1} + \beta P_{e_2}. \end{aligned}$$

Finalmente, observa-se que a propriedade de linearidade de (2.1) vem do fato que o produto escalar de vetores é linear como discutido no Apêndice B.

O espaço cartesiano \mathfrak{R}^3 é um exemplo do conceito mais geral de espaços vetoriais (ver Apêndice B). A Figura 2.11 ilustra a relação entre ações de movimento \mathbf{v} e forças \mathbf{F} sobre a partícula em \mathfrak{R}^3 , a partir da potência associada ao movimento. Esta relação é denominada relação de dualidade entre as ações de movimento \mathbf{v} e a resultante das forças \mathbf{F} na partícula. O conceito de dualidade será constantemente empregado ao longo deste texto. Observa-se que este conceito é introduzido a partir da definição de potência.

Corpos Rígidos

Considere agora o caso de um corpo rígido \mathcal{B} , mostrado na Figura 2.12, livre de qualquer restrição ao seu movimento. As únicas ações de movimento admissíveis devem preservar a hipótese inicial de que o corpo é rígido, ou seja, quaisquer deslocamentos e rotações rígidas devem manter as dimensões do corpo inalteradas.

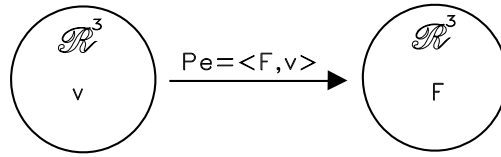


Figura 2.11: Relação de dualidade entre ações de movimento e forças numa partícula.

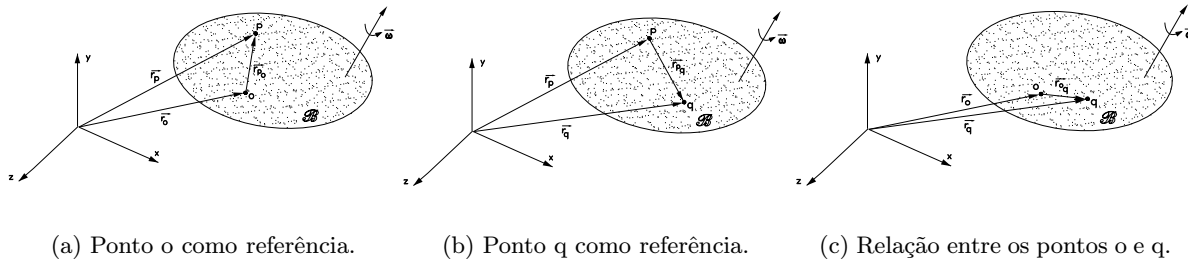


Figura 2.12: Ação de movimento de um corpo rígido.

Para descrever o movimento do corpo, adota-se um sistema de coordenadas e seleciona-se um ponto arbitrário do corpo. A Figura 2.12(a) ilustra o sistema de referência cartesiano xyz e o ponto o adotado para descrever o movimento do corpo. A partir daí, o vetor posição de qualquer ponto p é dado por

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_o + \mathbf{r}_{po}. \tag{2.3}$$

Quando o corpo se movimenta, os vetores posição \mathbf{r}_p , \mathbf{r}_o e \mathbf{r}_{po} variam ao longo do tempo. A taxa de variação destes vetores representa a velocidade instantânea. Derivando a expressão anterior em relação ao tempo, obtém-se a velocidade \mathbf{v}_p do ponto p (a relação seguinte será mostrada posteriormente)

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{po},$$

sendo \mathbf{v}_o a velocidade do ponto o representando a translação de \mathcal{B} ; $\boldsymbol{\omega}$ é o vetor velocidade angular descrevendo a rotação instantânea do corpo e \times representa o produto vetorial (ver Apêndice B).

Decompondo os vetores \mathbf{v}_o e $\boldsymbol{\omega}$, segundo o sistema cartesiano ilustrado na Figura 2.12, tem-se no total seis componentes para representar uma ação de movimento de um corpo rígido. Três delas estão associadas a translações dadas pelas componentes \mathbf{v}_{ox} , \mathbf{v}_{oy} e \mathbf{v}_{oz} de \mathbf{v}_o . As demais 3 componentes são dadas pelas projeções ω_x , ω_y e ω_z da rotação $\boldsymbol{\omega}$. A Figura 2.13 ilustra as 3 componentes de translação e as 3 componentes de rotação de um corpo rígido.

A expressão da potência associada a ação de movimento de corpo rígido é dada a partir de (2.1) por

$$P_e = f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{po}). \tag{2.4}$$

Logo, como a velocidade de cada ponto do corpo rígido é descrita por um vetor velocidade \mathbf{v} e a potência P_e associada a \mathbf{v} é escalar, tem-se, de forma análoga ao caso da partícula, um vetor \mathbf{F}_o , de tal forma que a potência P_e é dada pelo seguinte produto escalar dos vetores \mathbf{v} e \mathbf{F}_o , ou seja,

$$P_e = f(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{F}_o, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{F}_o \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F}_o \cdot [\mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{po}]. \tag{2.5}$$

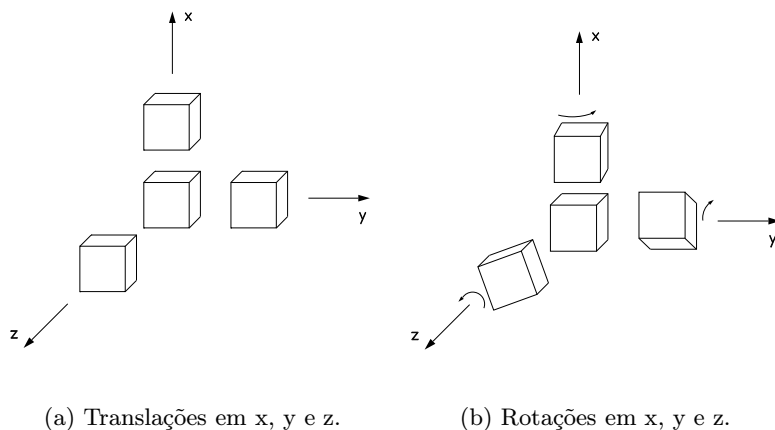


Figura 2.13: Movimentos de um corpo rígido.

Como o produto escalar de vetores é distributivo (ver Apêndice B), a expressão anterior pode ser reescrita como

$$P_e = (\mathbf{F}_o \cdot \mathbf{v}_o) + \mathbf{F}_o \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{po}]. \quad (2.6)$$

Pode-se comutar a ordem dos produtos escalar e vetorial de 3 vetores (ver Apêndice B). De forma geral, dados 3 vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} a seguinte relação é válida

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}.$$

Aplicando a propriedade anterior à equação (2.3) vem que

$$\begin{aligned} P_e &= (\mathbf{F}_o \cdot \mathbf{v}_o) + [\mathbf{r}_{po} \times \mathbf{F}_o] \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= (\mathbf{F}_o \cdot \mathbf{v}_o) + (\mathbf{m}_o \cdot \boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Os vetores \mathbf{F}_o e \mathbf{m}_o representam, respectivamente, a resultante de forças e a resultante de momentos em relação ao ponto o gerados pela resultante \mathbf{F}_o .

Observa-se que a escolha do ponto o para representar a ação de movimento de \mathcal{B} foi inteiramente arbitrária. Tomando-se um ponto q distinto de o , tem-se a seguinte relação para o vetor de posição do ponto p (ver Figura 2.12(b))

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_q + \mathbf{r}_{pq},$$

e conseqüentemente a velocidade instantânea p passa a ser dada por

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_q + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{pq}.$$

Seguindo o mesmo procedimento anterior, a potência P_e associada à ação de movimento tomando-se o ponto q como referência será

$$P_e = (\mathbf{F}_q \cdot \mathbf{v}_q) + (\mathbf{m}_q \cdot \boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{F}_q \cdot \mathbf{v}_q) + \mathbf{F}_q \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{pq}). \quad (2.8)$$

Pode-se reescrever a velocidade do ponto q tomando-se o ponto o como referência (ver Figura 2.12(c)). Logo, tem-se as seguintes relações para os vetores posição e velocidade do ponto q

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_q &= \mathbf{r}_o + \mathbf{r}_{qo}, \\ \mathbf{v}_q &= \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{qo}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Como a ação de movimento é a mesma, mudando-se apenas a sua representação, a potência envolvida é igual tomando-se os dois pontos o e q como referência. Logo, igualando (2.7) e (2.8), obtém-se

$$\mathbf{F}_o \cdot \mathbf{v}_o + \mathbf{m}_o \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{v}_p + \mathbf{m}_p \cdot \boldsymbol{\omega},$$

ou ainda

$$(\mathbf{F}_o \cdot \mathbf{v}_o - \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{v}_p) + (\mathbf{m}_o - \mathbf{m}_p) \cdot \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Substituindo (2.9) vem que

$$0 = (\mathbf{F}_o - \mathbf{F}_p) \cdot \mathbf{v}_o + [\mathbf{m}_o - \mathbf{m}_p - (\mathbf{r}_{qo} \times \mathbf{F}_p) \cdot \boldsymbol{\omega}].$$

Para que a relação anterior seja satisfeita para qualquer ação rígida descrita pelos vetores \mathbf{v}_o e $\boldsymbol{\omega}$, tem-se que

$$\mathbf{F}_o - \mathbf{F}_p = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{m}_o - \mathbf{m}_p - (\mathbf{r}_{qo} \times \mathbf{F}_p) = \mathbf{0},$$

ou seja,

$$\mathbf{F}_o = \mathbf{F}_p = \mathbf{F} \quad \text{e} \quad \mathbf{m}_o - \mathbf{m}_p = (\mathbf{r}_{qo} \times \mathbf{F}_p).$$

Assim, recuperam-se os resultados clássicos da mecânica de corpos rígidos. As forças estão caracterizadas por um vetor \mathbf{F} chamado de resultante das forças, o qual é independente do ponto do corpo escolhido para descrever a ação cinemática. Além disso, tem-se mais um vetor \mathbf{m}_o , dependente da escolha do ponto de referência, denominado resultante dos momentos.

2.6.2 Princípio das potências virtuais (PPV)

Como pode ser observado a partir da seção anterior, a condição de equilíbrio de uma partícula ou de um corpo rígido é obtida impondo-se que a potência das forças externas seja nula para qualquer ação de movimento, compatível cinematicamente, a partir da posição de equilíbrio. Desta maneira, é possível recuperar as condições de equilíbrio da mecânica de Newton. O enunciado acima constitui-se no *princípio das potências virtuais* (PPV) para o caso de equilíbrio de corpos, sendo um dos princípios variacionais da mecânica analítica. Observa-se que uma ação cinematicamente admissível é aquela que respeita as condições de vínculo ou apoios da estrutura.

Estas ações de movimento, a partir da posição de equilíbrio, não são fisicamente realizadas, sendo por isso denominadas *ações virtuais*. Portanto, estas ações são introduzidas apenas para avaliar o estado de equilíbrio. O princípio estabelece que para qualquer ação ou variação a partir da posição de equilíbrio, a potência é nula, ou seja, o sistema mecânico permanece em equilíbrio.

Considere o ponto material A da Figura 2.14 submetido à ação de várias forças. Suponha que esse ponto sofra uma ação de movimento, compatível com a sua cinemática, do ponto A para A'. As forças podem estar equilibradas e o corpo permanecer em repouso ou se mover na direção AA'. A ação de movimento considerada é portanto imaginária, sendo denominada ação de movimento virtual e designada por $\delta\mathbf{v}$. Supondo que o ponto A esteja em equilíbrio, a ação $\delta\mathbf{v}$ representa uma variação da posição da

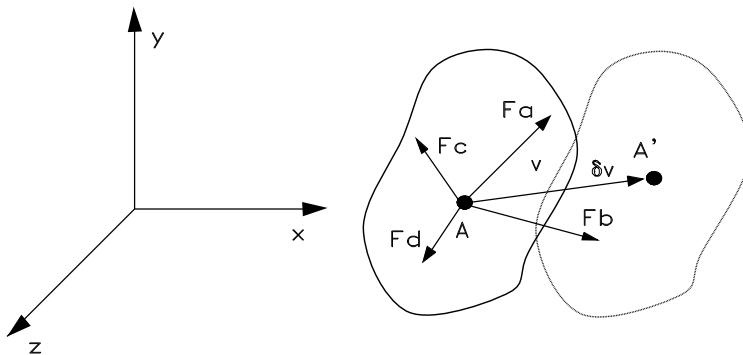


Figura 2.14: Corpo sujeito à ação de um conjunto de forças.

partícula em relação ao seu estado de equilíbrio. Logo, pelo PPV a potência P_e associada a $\delta \mathbf{v}$ é nula, ou seja,

$$P_e = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{v} = 0. \quad (2.10)$$

Logo, a resultante das forças \mathbf{F} sobre a partícula deve ser nula pois a variação $\delta \mathbf{v}$ é arbitrária. Recupera-se assim a condição de equilíbrio dada pelas leis de Newton, ou seja, a resultante das forças externas \mathbf{F} deve ser nula para uma partícula em equilíbrio.

Observa-se que a condição anterior é necessária e suficiente. Se a potência é nula para qualquer ação virtual $\delta \mathbf{v}$, então o produto escalar $\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{v}$ é nulo, implicando que a resultante das forças \mathbf{F} deve ser zero, pois $\delta \mathbf{v}$ é arbitrário. Da mesma maneira, se o ponto está em equilíbrio, a resultante das forças é nula e portanto a potência virtual também é nula.

No caso da análise de corpos em equilíbrio estático, como não estão envolvidas velocidades, o princípio das potências virtuais é aplicado em termos de deslocamentos virtuais, sendo então chamado de *princípio dos trabalhos virtuais* (PTV). O PTV para um ponto material estabelece que, se o ponto está em equilíbrio, o trabalho virtual total das forças aplicadas é zero, para qualquer deslocamento virtual.

Tomando-se o exemplo ilustrado na Figura 2.2 para avaliar o peso do objeto, verifica-se que não é necessário impor um grande deslocamento ao objeto para ter uma idéia do seu peso. Observa-se que na iminência de se deslocar o objeto, pode-se avaliar o seu peso. Isto implica que as ações de movimento podem ser arbitrariamente pequenas ou diferenciis visando avaliar o estado de equilíbrio de uma partícula ou corpo rígido.

Para o caso de um corpo rígido, tomando-se uma ação virtual de movimento rígida $\delta \mathbf{v} = \delta \mathbf{v}_o + \delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, tem-se que no equilíbrio a potência é nula. Logo, a partir da seção anterior, a potência é dada por

$$P_e = \mathbf{F}_o \cdot \delta \mathbf{v}_o + \mathbf{m}_o \cdot \delta \boldsymbol{\omega} = 0, \quad (2.11)$$

implicando que as resultantes em termos de forças e momentos devem ser nulas para qualquer ação virtual.

Observa-se que a potência das forças internas num corpo rígido é nula, como ilustrado na Figura 2.15. Tomando-se os pontos A e B, as forças exercidas entre si são \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$. Mesmo considerando ações virtuais distintas $\delta \mathbf{v}$ e $\delta \mathbf{v}'$, as componentes destas ações ao longo de AB devem ser iguais, pois como o corpo é rígido, a distância entre os pontos deve ser constante. Logo, a potência associada às forças internas será nula. Da mesma maneira, como as ações virtuais são compatíveis com a cinemática do corpo, as reações de apoio não realizam trabalho.

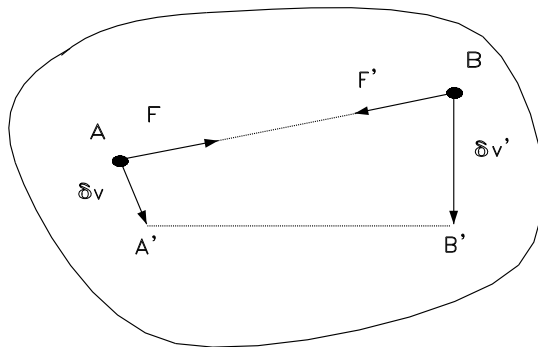
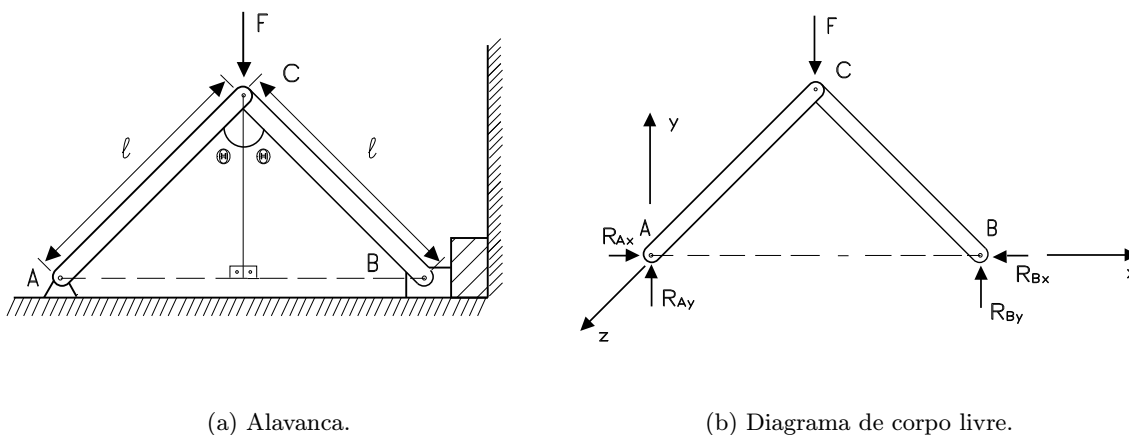


Figura 2.15: Potência das forças internas.

Torna-se interessante interpretar fisicamente o princípio dos trabalhos virtuais, tomando-se o caso do equilíbrio de uma partícula. De acordo com a mecânica de Newton, no estado de equilíbrio, a resultante das forças, expressa como a soma das forças externas e de reação, agindo sobre qualquer partícula do sistema é nula. Como no equilíbrio, o princípio requer que o trabalho destas forças seja nulo, verifica-se que o trabalho virtual das forças externas pode ser substituído pelo trabalho virtual das forças de reação. Logo, o PTV pode ser reformulado como o seguinte postulado: *o trabalho virtual das forças de reação é sempre nulo para qualquer deslocamento virtual compatível com as restrições cinemáticas.*

Este postulado não é restrito à estática, mas aplica-se igualmente à dinâmica, onde o PTV é generalizado por meio do princípio de d'Alembert. Como todos os outros princípios variacionais (Euler, Lagrange, Jacobi, Hamilton) da mecânica analítica são formulações matemáticas alternativas do princípio de d'Alembert, o enunciado acima é o único postulado na mecânica analítica, sendo portanto de fundamental importância.

Exemplo 2.1 Considere a alavanca articulada mostrada na Figura 2.16(a). Deseja-se determinar a força exercida pela alavanca no bloco quando uma certa força F é aplicada em C (supondo que não há atrito) usando o conceito de trabalho virtual.



(a) Alavanca.

(b) Diagrama de corpo livre.

Figura 2.16: Alavanca articulada com força F .

Objetivo:

1. Ilustrar a construção do diagrama de corpo livre
2. Análise das condições de equilíbrio através da abordagem analítica.

Etapas:

1. Construção do diagrama de corpo livre do sistema.
2. Assumir um deslocamento virtual (conveniente) compatível com os vínculos do sistema.
3. Escrever a expressão do trabalho virtual para o deslocamento assumido para o sistema.
4. Solução das equações.

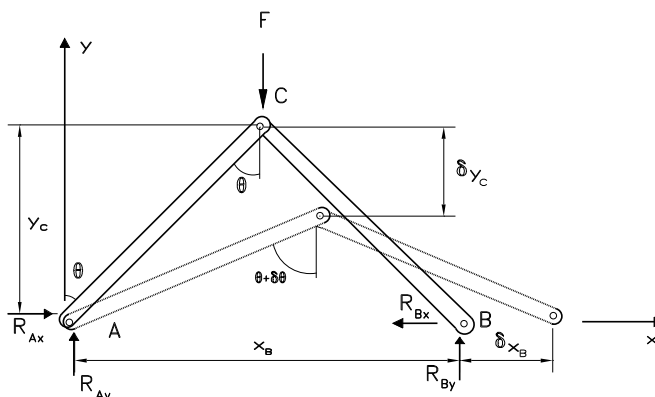


Figura 2.17: Deslocamento virtual para o cálculo de R_{Bx} .

Solução:

1. Construção do diagrama de corpo livre do sistema.

Neste diagrama, apresentam-se de forma idealizada as forças externas e de reação presentes na estrutura. O diagrama de corpo livre está ilustrado na Figura 2.16(b).

2. Assumir um deslocamento virtual conveniente compatível com os vínculos do sistema

Considera-se, em primeiro lugar, um incremento $\delta\theta$ positivo do ângulo θ , pois desta forma a alavanca aplicará uma força horizontal sobre o bloco (ver Figura 2.17). Em seguida, adotando um sistema de coordenadas com origem em A, observam-se as variações δx_B e δy_C respectivamente nas dimensões x_B e y_C . As reações R_{Ax} , R_{Ay} e R_{By} não realizarão trabalho durante o deslocamento virtual considerado, necessitando-se calcular somente o trabalho de F e R_{Bx} . Exprimindo as coordenadas x_B e y_C em termos do ângulo θ obtém-se

$$\begin{aligned} x_B &= 2l \sin \theta, \\ y_C &= l \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ao se impor uma variação virtual $\delta\theta$ a partir da posição de equilíbrio inicial em θ , o ângulo final será $\theta + \delta\theta$ como indicado na Figura 2.17. Logo, as novas posições dos pontos B e C serão respectivamente (ver Figura 2.17)

$$\begin{aligned} x_B + \delta x_B &= x_B(\theta + \delta\theta) = 2l \sin(\theta + \delta\theta), \\ y_C - \delta y_C &= y_C(\theta + \delta\theta) = l \cos(\theta + \delta\theta). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Expandindo $\sin(\theta + \delta\theta)$ e $\cos(\theta + \delta\theta)$ vem que

$$\begin{aligned}x_B + \delta x_B &= 2l [\sin \theta \cos \delta\theta + \cos \theta \sin \delta\theta], \\y_C - \delta y_C &= l [\cos \theta \cos \delta\theta - \sin \theta \sin \delta\theta].\end{aligned}$$

Supondo que o incremento $\delta\theta$ é pequeno, tem-se que $\cos \delta\theta \approx 1$ e $\sin \delta\theta \approx \delta\theta$. Logo

$$\begin{aligned}x_B + \delta x_B &= 2l \sin \theta + 2l \cos \theta (\delta\theta), \\y_C - \delta y_C &= l \cos \theta - l \sin \theta (\delta\theta).\end{aligned}$$

Substituindo (2.12), obtém-se as expressões finais para os incrementos virtuais δx_B e δy_C , ou seja,

$$\begin{aligned}\delta x_B &= 2l \cos \theta (\delta\theta), \\\delta y_C &= l \sin \theta (\delta\theta).\end{aligned}$$

Uma outra forma de se obter expressões para δx_B e δy_C é empregando a série de Taylor. Observe-se que as posições x_B e y_C dos pontos B e C são funções do ângulo θ . Esta dependência pode ser indicada de forma explícita reescrevendo as relações anteriores como

$$\begin{aligned}x_B = x_B(\theta) &= 2l \sin \theta, \\y_C = y_C(\theta) &= l \cos \theta.\end{aligned}$$

Dada uma função $f(y)$, lembre-se que a expansão em série de Taylor em torno de x é dada por

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + \frac{1}{2} f''(x)(y - x)^2 + \dots$$

Expandindo $\sin(\theta + \delta\theta)$ e $\cos(\theta + \delta\theta)$ dados em (1.13) em série de Taylor e desprezando os termos a partir da derivada segunda vem que

$$\begin{aligned}\sin(\theta + \delta\theta) &= \sin \theta + \cos \theta (\theta + \delta\theta - \theta) = \sin \theta + \cos \theta (\delta\theta), \\\cos(\theta + \delta\theta) &= \cos \theta - \sin \theta (\theta + \delta\theta - \theta) = \cos \theta - \sin \theta (\delta\theta).\end{aligned}$$

Substituindo estas relações em (2.13) vem que

$$\begin{aligned}x_B + \delta x_B &= 2l \sin \theta + 2l \cos \theta (\delta\theta) = x_B + 2l \cos \theta (\delta\theta) \rightarrow \delta x_B = 2l \cos \theta (\delta\theta), \\y_C - \delta y_C &= l \cos \theta - l \sin \theta (\delta\theta) = y_C - l \sin \theta (\delta\theta) \rightarrow \delta y_C = l \sin \theta (\delta\theta).\end{aligned}$$

Assim, observa-se que calcular as variações virtuais δx_B e δy_C é análogo ao cálculo dos diferenciais de x_B e y_C . Por este motivo, muitos autores definem um deslocamento virtual como um diferencial de primeira ordem da posição. Mas um deslocamento virtual não é necessariamente pequeno ou um diferencial da posição.

3. Escrever a expressão do trabalho virtual para o deslocamento do sistema

Como R_{Bx} e δx_B têm sentidos opostos, o trabalho virtual é negativo, ou seja, $\delta T_{R_{Bx}} = -(R_{Bx}) \delta x_B$. Como F e o incremento δy_C têm mesmo sentido, seu trabalho virtual é $\delta T_F = F \delta y_C$. O trabalho virtual total das forças do sistema é então

$$\delta T_e = \delta T_{R_{Bx}} + \delta T_F = -R_{Bx} \delta x_B + F \delta y_C = -2R_{Bx} l \cos \theta \delta \theta + Fl \sin \theta \delta \theta.$$

Da Figura (1.18), obtêm-se as seguintes relações

$$\begin{aligned} x_B + \delta x_B &= 2l \sin(\theta + \delta \theta), \\ y_C + \delta y_C &= l \cos(\theta + \delta \theta). \end{aligned}$$

Expandindo $\sin(\theta + \delta \theta)$ e $\cos(\theta + \delta \theta)$ vem que

$$\begin{aligned} x_B + \delta x_B &= 2l[\sin \theta \cos \delta \theta - \cos \theta \sin \delta \theta], \\ y_C - \delta y_C &= l[\cos \theta \cos \delta \theta - \sin \theta \sin \delta \theta]. \end{aligned}$$

Supondo que o incremento $\delta \theta$ é pequeno tem-se que $\cos \delta \theta \approx 1$ e $\sin \delta \theta \approx \delta \theta$. Logo, as expressões anteriores se simplificam como:

$$\begin{aligned} x_B + \delta x_B &= 2l \sin \theta + 2l \cos \theta \delta \theta, \\ y_C + \delta y_C &= l \cos \theta - l \sin \theta \delta \theta. \end{aligned}$$

Substituindo(1.12), obtêm-se as expressões finais para os incrementos virtuais δx_B e δy_C , ou seja

$$\begin{aligned} \delta x_B &= 2l \cos \theta \delta \theta, \\ \delta y_C &= l \sin \theta \delta \theta. \end{aligned}$$

4. Solução das equações

Fazendo $\delta T_e = 0$ (corpo em equilíbrio), obtêm-se

$$2R_{Bx} l \cos \theta \delta \theta = Fl \sin \theta \rightarrow R_{Bx} = \frac{1}{2} F \tan \theta.$$

Para calcular a reação de apoio R_{By} , basta impor um deslocamento virtual δy_B na direção de R_{By} , mantendo o ponto A fixo. O resultado deste deslocamento está mostrado na Figura 2.18, observando-se que o ponto C sofre um deslocamento δy_C . Como as duas únicas forças realizando trabalho são F e R_{By} , pelo PTV vem que

$$\delta T_e = R_{By} \delta y_B - F \delta y_C = 0.$$

Assumindo que δy_B e δy_C são pequenos, tem-se a partir da Figura 2.18, por semelhança de triângulos, que $\frac{\delta y_C}{\delta y_B} = \frac{1}{2}$. Portanto

$$R_{Bx} = \frac{F}{2}.$$

Logo, para calcular uma reação de apoio, impõe-se um deslocamento virtual na direção da reação. O mesmo procedimento pode ser aplicado para a determinação de R_{Ax} e R_{Bx} .

□

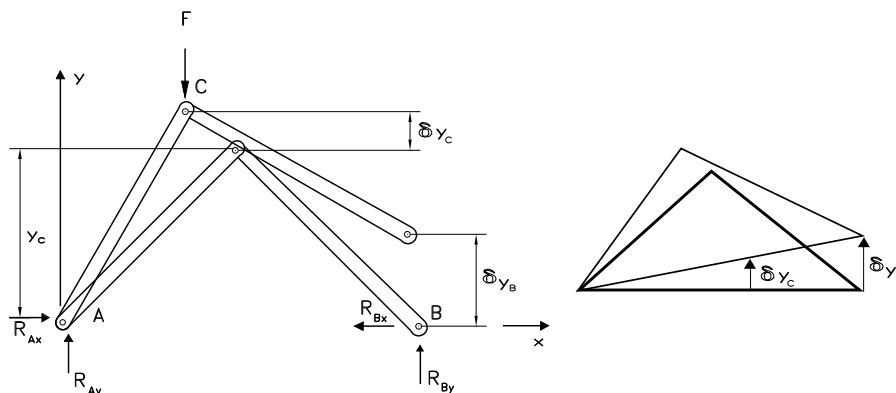


Figura 2.18: Deslocamento virtual para o cálculo de reação de apoio R_{By} .

2.6.3 Mecânica Newtoniana

Partícula

Na abordagem newtoniana, uma partícula está em equilíbrio se a resultante das forças externas atuantes sobre a partícula é zero. Nesta forma, isola-se a partícula e substitui-se todas as restrições por forças. Logo, parte-se do conceito de força já definido *a-priori*. Na formulação analítica, considera-se a ação ou a cinemática que a partícula pode estar submetida, recuperando-se a partir daí a definição clássica de força.

Segundo a abordagem vetorial, a condição de equilíbrio de uma partícula é que a resultante \mathbf{F} das forças externas atuantes seja nula, ou seja, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Observa-se que esta mesma condição foi obtida na mecânica analítica a partir da ação de movimento de uma partícula e do conceito de potência. As condições de equilíbrio de uma partícula são usadas extensivamente na análise de treliças pelo método dos nós.

Adotando um sistema de referência cartesiano, tem-se que a condição de equilíbrio $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ implica que a resultante das forças externas nas direções x , y e z são nulas. Logo

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0. \quad (2.14)$$

A Figura 2.19 ilustra uma treliça com cargas externas P_1 e P_2 sobre o nó A sendo F_1 , F_2 e F_3 as forças nos elementos de barra compartilhando o nó A. As condições de equilíbrio desta partícula são dadas por

1. $\sum F_x = 0 \rightarrow P_1 + F_2 \cos \theta + F_3 = 0.$
2. $\sum F_y = 0 \rightarrow P_2 + F_1 + F_2 \sin \theta = 0.$

Corpos Rígidos

Como já mencionado, os corpos rígidos são constituídos de infinitas partículas, sendo constante a distância entre as mesmas para qualquer ação de movimento. Como visto na seção anterior, as condições de equilíbrio de corpos rígidos são tais que as resultantes em termos de forças externas \mathbf{F} e momentos \mathbf{M} sejam nulos, isto é $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, respectivamente. Para um sistema cartesiano, as condições de equilíbrio são obtidas impondo-se o equilíbrio de forças e momentos nas direções x , y e z , ou seja,

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0, & \quad \sum F_y = 0, & \quad \sum F_z = 0, \\ \sum M_x = 0, & \quad \sum M_y = 0, & \quad \sum M_z = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

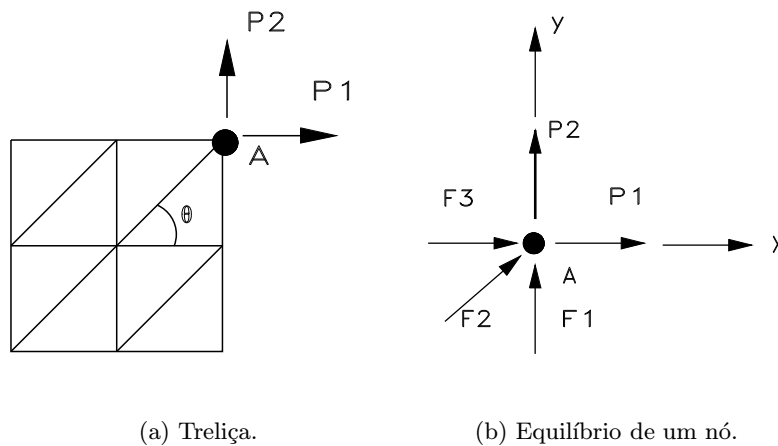


Figura 2.19: Forças sobre um ponto material.

Observa-se novamente que estas condições de equilíbrio foram as mesmas obtidas através do PPV. A diferença básica é que na mecânica analítica, parte-se da ação de movimento e através do conceito de potência, determinam-se os esforços externos compatíveis com a cinemática da partícula e de corpo rígido. Neste sentido, os conceitos de cinemática e de potência são mais naturais (lembre-se dos exemplos do peso do objeto e da tensão na correia), podendo ser observados nos sistemas mecânicos em geral. Já na mecânica newtoniana, considera-se como definição básica o conceito de força. Assim, supondo um veículo em movimento, o que se observa é a ação de movimento e não forças e momentos atuantes no veículo.

Tomando-se um corpo plano, a Figura 2.20 apresenta os movimentos de corpo rígido possíveis, ou seja, translações em x e y e rotação segundo o eixo z . Neste caso, as condições de equilíbrio resumem-se em

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_z = 0. \quad (2.16)$$

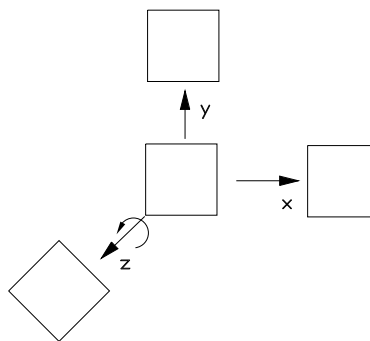


Figura 2.20: Movimentos de corpo rígido num plano.

Exemplo 2.2 Resolver o Exemplo 2.1 empregando a abordagem newtoniana.

Objetivos:

1. Exemplificar análise das condições de equilíbrio pela abordagem newtoniana.

Etapas:

1. Construção do diagrama de corpo livre do sistema.
2. Determinação das equações de equilíbrio do sistema.
3. Solução das equações e determinação das incógnitas do problema.

Solução:

1. Construção do diagrama de corpo livre

O diagrama de corpo livre foi construído no exemplo anterior (ver Figura 2.16(b)).

2. Determinação das equações de equilíbrio do sistema

A partir do diagrama de corpo livre, pode-se escrever as condições de equilíbrio da alavanca, ou seja,

$$\begin{aligned} i) \quad \sum F_x &= 0 \rightarrow R_{Ax} - R_{Bx} = 0, \\ ii) \quad \sum F_y &= 0 \rightarrow R_{Ay} + R_{By} - F = 0, \\ iii) \quad \sum M_{zA} &= 0 \rightarrow 2l \sin \theta R_{By} - l \sin \theta F = 0. \end{aligned}$$

Observa-se que a alavanca constitui um sistema hiperestático, ou seja, o número de incógnitas ($R_{Ax}, R_{Bx}, R_{Ay}, R_{By}$) é maior que o número de condições de equilíbrio. Ao se empregar a mecânica analítica no exemplo 2.1, o fato do sistema ser hiperestático não constituiu uma dificuldade. No caso da abordagem newtoniana, deve-se ter uma condição auxiliar (em geral em termos da geometria ou deformação do componente) para se resolver o problema. Considerando a alavanca articulada como constituída de dois elementos de barra AC e BC, tem-se apenas forças axiais resultantes ao longo de AC e BC. A partir da geometria do problema tem-se a relação

$$iv) \quad \tan \theta = \frac{R_{Bx}}{R_{By}} .$$

3. Solução das equações e determinação das incógnitas

Das equações iii) e iv), obtém-se, respectivamente

$$R_{By} = \frac{F}{2} \quad e \quad R_{Bx} = \left(\frac{F}{2}\right) \tan \theta .$$

sendo R_{Bx} a incógnita procurada. As demais reações são determinadas, a partir de R_{By} e R_{Bx} dados acima, empregando i) e ii). Logo

$$R_{Ax} = \left(\frac{F}{2}\right) \tan \theta \quad e \quad R_{Ay} = \frac{F}{2} .$$

□

2.7 Exercícios Resolvidos

Exercício 2.1 Calcular as reações nos apoios da viga da Figura 2.21(a) usando o princípio dos trabalhos virtuais. Desprezar o peso próprio da viga.

Objetivo:

1. Exemplificar a aplicação do princípio dos trabalhos virtuais na determinação das reações nos apoios de uma viga.

Etapas:

1. Construir o diagrama de corpo livre do sistema (ver Figura 2.21(b)).
2. Determinar os deslocamentos virtuais convenientes.
3. Escrever as expressões do trabalho para cada deslocamento virtual assumido.

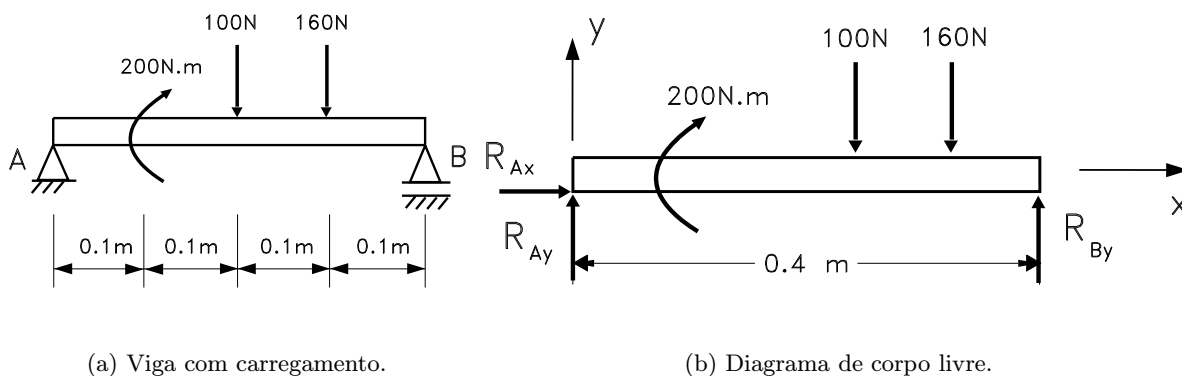


Figura 2.21: Exercícios resolvidos 2.1 e 2.2.

Solução:

- *Determinação de R_{By}*

Em A, tem-se duas componentes de reação desconhecidas, já que a extremidade é articulada num pino. A reação em B, entretanto, pode agir apenas na direção vertical porque a extremidade está sobre um rolete. Considerando a variação angular $\delta\theta$ na posição original da viga em torno do ponto A, como mostrado na Figura 2.22(a), obtém-se um deslocamento virtual do ponto B na direção da incógnita R_{By} . Dessa forma, tem-se a seguinte expressão do trabalho na viga

$$\delta T_e = 200\delta\theta + 100(0,2) \sin \delta\theta + 160(0,3) \sin \delta\theta - R_{By}(0,4) \sin \delta\theta.$$

Como a viga está em equilíbrio, o PTV estabelece que o trabalho exercido pelas forças externas ao sistema é zero, ou seja,

$$\delta T_e = 0 \rightarrow 200\delta\theta + 100(0,2) \sin \delta\theta + 160(0,3) \sin \delta\theta - R_{By}(0,4) \sin \delta\theta = 0.$$

Para uma variação pequena $\delta\theta$, pode-se assumir a aproximação $\sin \delta\theta \cong \delta\theta$. Portanto

$$200\delta\theta + 100(0,2)\delta\theta + 160(0,3)\delta\theta - R_{By}(0,4)\delta\theta = 0 \rightarrow R_{By} = 670N.$$

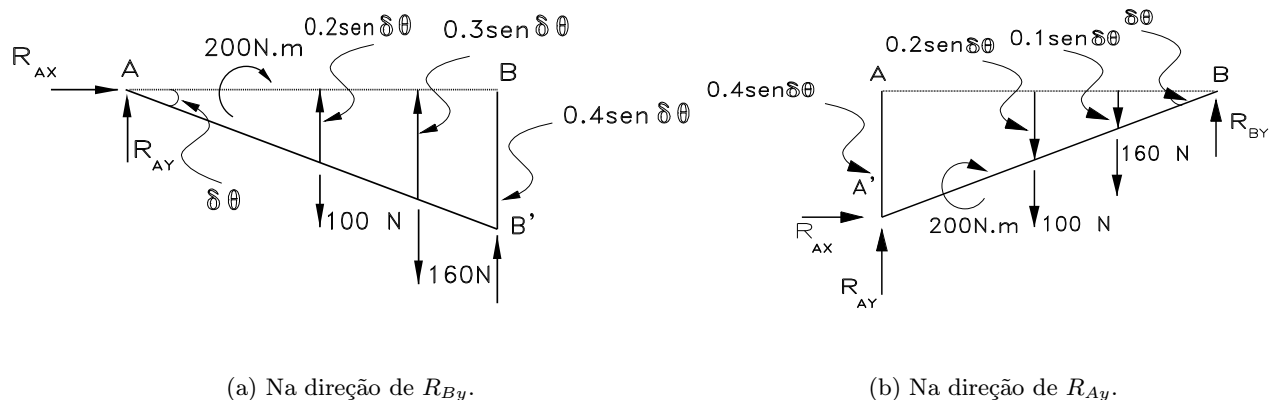


Figura 2.22: Exercício resolvido 2.1: deslocamentos virtuais.

- *Determinação de R_{Ay}*

De maneira análoga, considerando um deslocamento angular em torno de B, obtém-se um deslocamento do ponto A na direção da incógnita R_{Ay} , de acordo com a Figura 2.22(b). Escrevendo a expressão do trabalho das forças externas sobre a viga tem-se

$$\delta T_e = -R_{Ay}(0,4)\sin\delta\theta - 200\delta\theta + 100(0,2)\sin\delta\theta + 160(0,1)\sin\delta\theta.$$

Novamente, para uma variação $\delta\theta$ pequena pode-se assumir a aproximação $\sin\delta\theta \cong \delta\theta$. Logo

$$-R_{Ay}(0,4)\delta\theta - 200\delta\theta + 100(0,2)\delta\theta + 160(0,1)\delta\theta = 0 \rightarrow R_{Ay} = -410\text{N}.$$

- *Determinação de R_{Ax}*

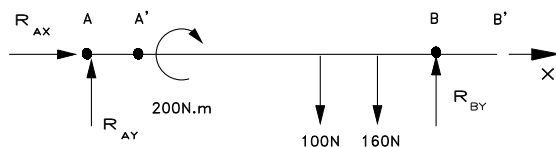


Figura 2.23: Exercício resolvido 2.1: deslocamento virtual na direção de R_{Ax} .

Neste caso, assume-se um deslocamento horizontal δx na direção x , como mostrado na Figura 2.23. Dessa forma, a expressão do trabalho sobre a viga é a seguinte

$$\delta T_e = R_{Ax}\delta x = 0 \rightarrow R_{Ax} = 0.$$

□

Exercício 2.2 Resolver o exercício anterior empregando a mecânica newtoniana.

Objetivos:

1. Ilustrar a construção do diagrama de corpo livre.

2. Exemplificar análise das condições de equilíbrio pela abordagem newtoniana.

Etapas:

1. Construção do diagrama de corpo livre do sistema.
2. Determinação das equações de equilíbrio do sistema.
3. Solução das equações e determinação das incógnitas do problema.

Solução:

O diagrama de corpo livre é mostrado na Figura 2.21(b). A partir do diagrama de corpo livre, pode-se escrever as condições de equilíbrio do sistema

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 : \quad R_{Ax} &= 0. \\ \sum M_{zA} = 0 : \quad -200 - 100(0,2) - 160(0,3) + R_{By}(0,4) &= 0 \rightarrow R_{By} = 670N. \\ \sum M_{zB} = 0 : \quad -R_{Ay}(0,4) - 200 + 100(0,2) + 160(0,1) &= 0 \rightarrow R_{Ay} = -410N. \end{aligned}$$

Pode-se verificar se as reações anteriores, estão corretas tomando-se por exemplo a somatória das forças em y , ou seja

$$\sum F_y = 0 : \quad 670 - 410 - 100 - 160 = 0.$$

□

Exercício 2.3 Determinar as reações da viga mostrada na Figura 2.24(a) através do princípio dos trabalhos virtuais.

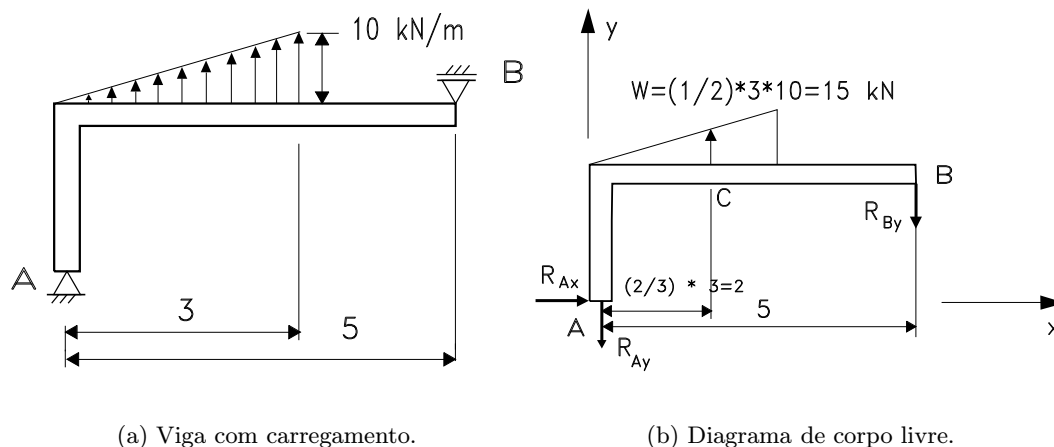


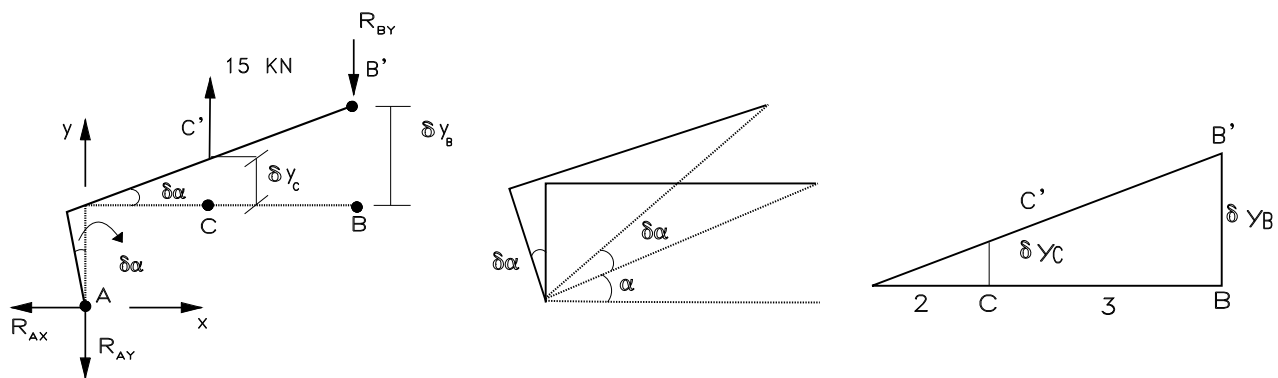
Figura 2.24: Exercícios resolvidos 2.3 e 2.4.

Objetivo:

1. Exemplificar a aplicação do princípio dos trabalhos virtuais na determinação das reações nos apoios de uma viga.

Etapas:

1. Construir o diagrama de corpo livre do sistema (Figura 2.24(b)).
2. Determinar os deslocamentos virtuais convenientes.
3. Escrever as expressões do trabalho para cada deslocamento virtual assumido.



(a) Deslocamento na direção de R_{By} . (b) Ângulo α e sua variação $\delta\alpha$. (c) Relação entre os deslocamentos dos pontos B e C.

Figura 2.25: Exercício resolvido 2.3.

Solução:

- *Determinação de R_{By}*

Considere o diagrama de corpo livre mostrado na Figura 2.24(b) e o deslocamento virtual ilustrado na Figura 2.25(a). As coordenadas y_B e y_C dos pontos B e C são expressas por

$$y_B = 5 \sin \alpha,$$

$$y_C = 2 \sin \alpha.$$

A partir da Figura 2.25(b), tem-se as seguintes relações, assumindo $\delta\alpha$ pequeno ($\cos \delta\alpha \approx 1$ e $\sin \delta\alpha \approx \delta\alpha$)

$$\begin{aligned} y_B + \delta y_B &= 5 \sin(\alpha + \delta\alpha) = 5[\sin \alpha \cos \delta\alpha + \cos \alpha \sin \delta\alpha] \\ &= 5 \sin \alpha + 5 \cos \alpha \delta\alpha \rightarrow \delta y_B = 5 \cos \alpha \delta\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_C + \delta y_C &= 2 \sin(\alpha + \delta\alpha) = 2[\sin \alpha \cos \delta\alpha + \cos \alpha \sin \delta\alpha] \\ &= 2 \sin \alpha + 2 \cos \alpha \delta\alpha \rightarrow \delta y_C = 2 \cos \alpha \delta\alpha. \end{aligned}$$

Por sua vez, sendo $\delta\alpha$ pequeno, os deslocamentos virtuais δy_B e δy_C serão também pequenos.

A partir da Figura 2.25(c), observa-se que os deslocamentos dos pontos B e C têm a seguinte relação

$$\frac{\delta y_C}{\delta y_B} = \frac{2}{5}.$$

O trabalho exercido sobre a viga no deslocamento virtual assumido é dado por

$$\delta T_e = 15\delta y_C - R_{By}\delta y_B.$$

O princípio dos trabalhos virtuais estabelece que δT_e é nulo, se o corpo está em equilíbrio. Logo

$$\delta T_e = 15\delta y_C - R_{By}\delta y_B = 0 \rightarrow R_{By} = 15 \frac{\delta y_C}{\delta y_B} = 6 \text{KN}.$$

• Determinação de R_{Ay}

Para determinar R_{Ay} , adota-se o deslocamento virtual mostrado na Figura 2.26(a). As coordenadas y_A e y_B dos pontos A e B, de acordo com a Figura 2.26(b), serão dadas por

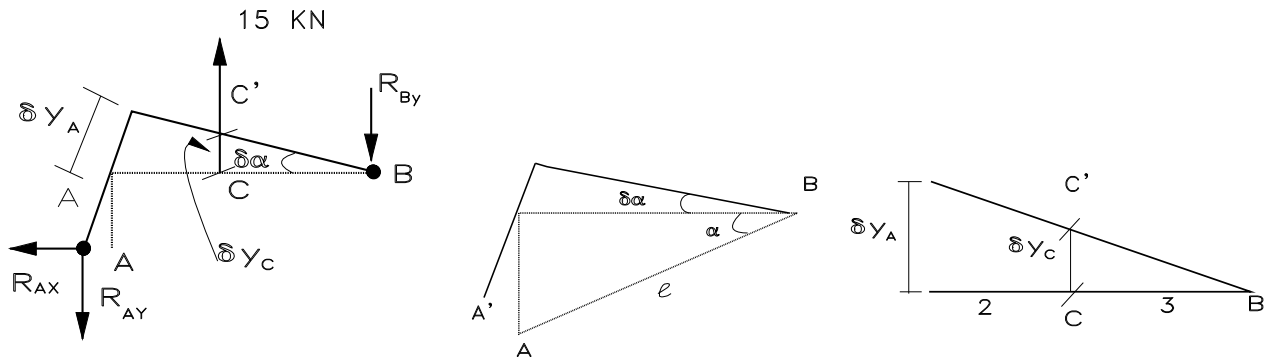
$$y_A = 5 \sin \alpha,$$

$$y_B = 3 \sin \alpha$$

De forma análoga ao item anterior, obtém-se as variações δy_A e δy_B , ou seja

$$\delta y_A = 5\delta\alpha,$$

$$\delta y_B = 3\delta\alpha,$$



(a) Deslocamento na direção de R_{Ay} .

(b) Rotação em torno de B.

(c) Relação entre os deslocamentos dos pontos A e C.

Figura 2.26: Exercício resolvido 2.3.

Como mostrado na Figura 2.26(c), a relação entre os deslocamentos virtuais dos pontos A e C são dados por

$$\delta y_C = \frac{3}{5}\delta y_A = \frac{3}{5}(5\delta\alpha) = 3\delta\alpha.$$

A expressão do trabalho sobre o corpo para o deslocamento virtual dado é calculado como

$$\delta T_e = 15\delta y_C - R_{Ay}\delta y_A = 15(3\delta\alpha) - R_{Ay}(5\delta\alpha) = 0 \rightarrow R_{Ay} = 9 \text{KN}.$$

- *Determinação de R_{Ax}*

Para o deslocamento δx na direção x , mostrado na Figura 2.27, tem-se a seguinte expressão do trabalho virtual

$$T_e = R_{Ax} \delta x_A = 0 \rightarrow R_{Ax} = 0.$$

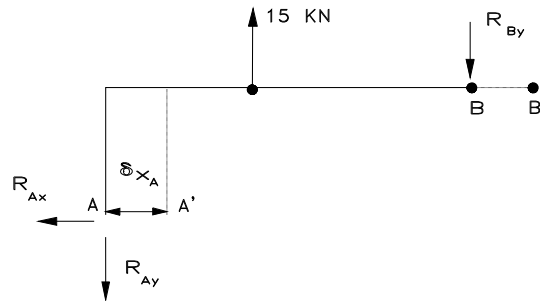


Figura 2.27: Exercício resolvido 2.3: deslocamento virtual na direção de R_{Ax} .

□

Exercício 2.4 Determinar as reações da viga da Figura 2.24(a) usando as equações de equilíbrio de Newton.

Objetivos:

1. Exemplificar a análise das condições de equilíbrio pela abordagem newtoniana.

Etapas:

1. Construção do diagrama de corpo livre do sistema.
2. Determinação das equações de equilíbrio do sistema.
3. Solução das equações e determinação das incógnitas do problema.

Solução:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 : & \quad R_{Ax} = 0. \\ \sum M_{zA} = 0 : & \quad 15(2) - R_{By}(5) = 0 \rightarrow R_{By} = 6KN. \\ \sum M_{zB} = 0 : & \quad -R_{Ay}(5) + 15(3) = 0 \rightarrow R_{Ay} = 9KN. \end{aligned}$$

Empregam-se duas condições de equilíbrio em termo de momentos, para possibilitar o cálculo direto das reações R_{Ay} e R_{By} . Caso se empregasse a condição $\sum F_y = 0$ teria sido obtido

$$-R_{Ay} - R_{By} + 15 = 0,$$

não sendo possível obter os valores das incógnitas apenas com esta condição de equilíbrio.

Verificação: $\sum F_y = 0 : -6 - 9 + 15 = 0$

□

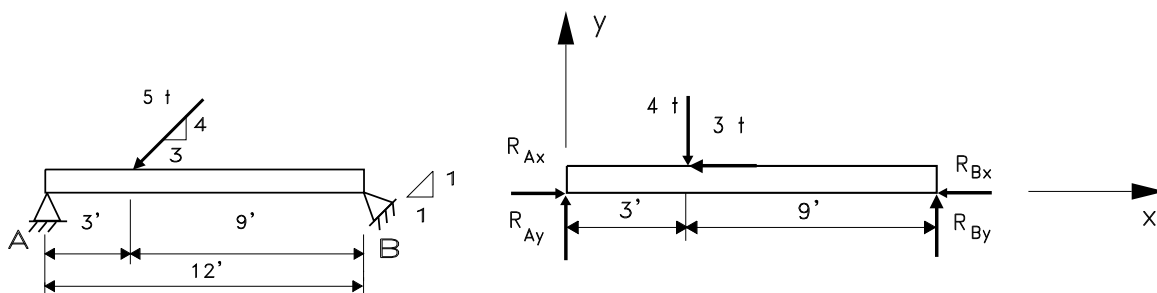
Exercício 2.5 Determinar as reações nos apoios da viga mostrada na Figura 2.28(a) usando o princípio dos trabalhos virtuais.

Objetivo:

1. Exemplificar a aplicação do princípio dos trabalhos virtuais na determinação das reações nos apoios de uma viga.

Etapas:

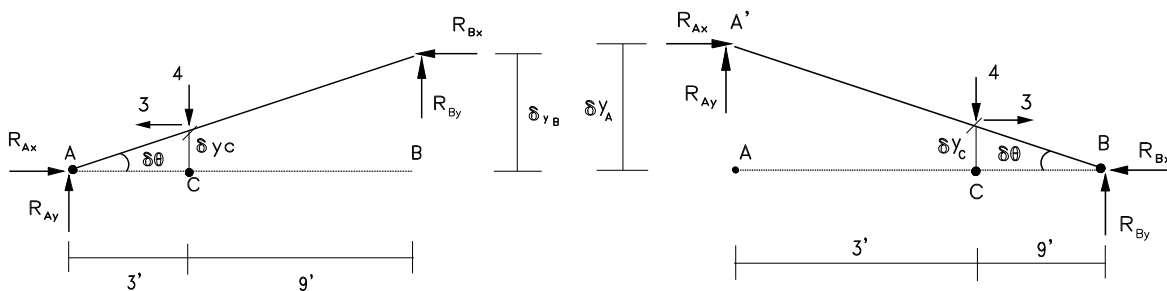
1. Construir o diagrama de corpo livre do sistema.
2. Determinar os deslocamentos virtuais convenientes.
3. Escrever as expressões do trabalho para cada deslocamento virtual assumido.



(a) Viga com carregamento.

(b) Diagrama de corpo livre.

Figura 2.28: Exercícios resolvidos 2.5 e 2.6.



(a) Na direção R_{By} .

(b) Na direção R_{Ay} .

Figura 2.29: Exercício 2.5: deslocamentos virtuais..

Solução:

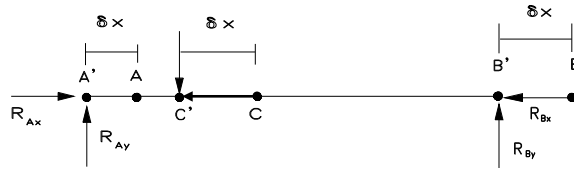


Figura 2.30: Exercício resolvido 2.5: deslocamento virtual na direção de R_{Ax} .

- *Determinação de R_{Bx} e R_{By}*

Em A existem duas componentes desconhecidas R_{Ax} e R_{Ay} . Já em B, a reação R_B é normal ao plano do suporte e constitui uma incógnita. É conveniente substituir essa força pelas duas componentes R_{By} e R_{Bx} , as quais nesse problema, em particular, são numericamente iguais. Analogamente, substitui-se a força inclinada de $5t$ pelas duas componentes mostradas.

Os deslocamentos dos pontos B e C para um deslocamento virtual angular pequeno $\delta\theta$ são respectivamente (ver Figura 1.30(a)).

$$\begin{aligned}\delta y_B &= 12 \sin \delta\theta \approx 12\delta\theta, \\ \delta y_C &= 3 \sin \delta\theta \approx 3\delta\theta.\end{aligned}$$

A expressão do trabalho virtual é então dada por,

$$\delta T_e = -4(3\delta\theta) + R_{By}(12\delta\theta) = 0 \rightarrow R_{By} = 1t$$

Como o deslizador em B está inclinado a 45° , tem-se que $|R_{Bx}| = |R_{By}|$. Portanto, $R_{Bx} = 1t$.

- *Determinação de R_{Ay}*

De acordo com a Figura 2.29(b), tem-se os seguintes deslocamentos virtuais dos pontos A e C

$$\begin{aligned}\delta y_A &= 12 \sin \delta\theta \approx 12\delta\theta, \\ \delta y_C &= 9 \sin \delta\theta \approx 9\delta\theta.\end{aligned}$$

Escrevendo a expressão do trabalho virtual

$$\delta T_e = -4(9\delta\theta) + R_{Ay}(12\delta\theta) = 0 \rightarrow R_{Ay} = 3t.$$

- *Determinação de R_{Ax}*

De acordo com o deslocamento mostrada na Figura 2.30, tem-se a seguinte expressão do trabalho virtual,

$$\delta T_e = R_{Ax}(\delta x) - 3(\delta x) - R_{Bx}(\delta x) = 0 \rightarrow R_{Ax} = 4t.$$

□

Exercício 2.6 Determinar as reações da viga da Figura 2.28 usando as equações de equilíbrio de Newton.

Objetivos:

1. Exemplificar análise das condições de equilíbrio pela abordagem newtoniana.

Etapas:

1. Construção do diagrama de corpo livre do sistema.
2. Determinação das equações de equilíbrio do sistema.
3. Solução das equações e determinação das incógnitas do problema.

Solução:

As condições de equilíbrio são as seguintes:

$$\sum M_{zA} = 0 : \quad 4(3) - R_{By}(12) = 0 \rightarrow R_{By} = 1t \rightarrow R_{Bx} = 1t.$$

$$\sum M_{zB} = 0 : \quad -R_{Ay}(12) + 4(9) = 0 \rightarrow R_{Ay} = 3t.$$

$$\sum F_x = 0 : \quad R_{Ax} - R_{By} - 3 = 0 \rightarrow R_{Ax} = 4t.$$

Os módulos das reações R_A e R_B são determinados, respectivamente, como,

$$R_A = (4^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}} = 5t \quad R_B = (1^2 + 1^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}t.$$

Verificação: $\sum F_y = 0 \rightarrow 3 - 4 + 1 = 0$.

□

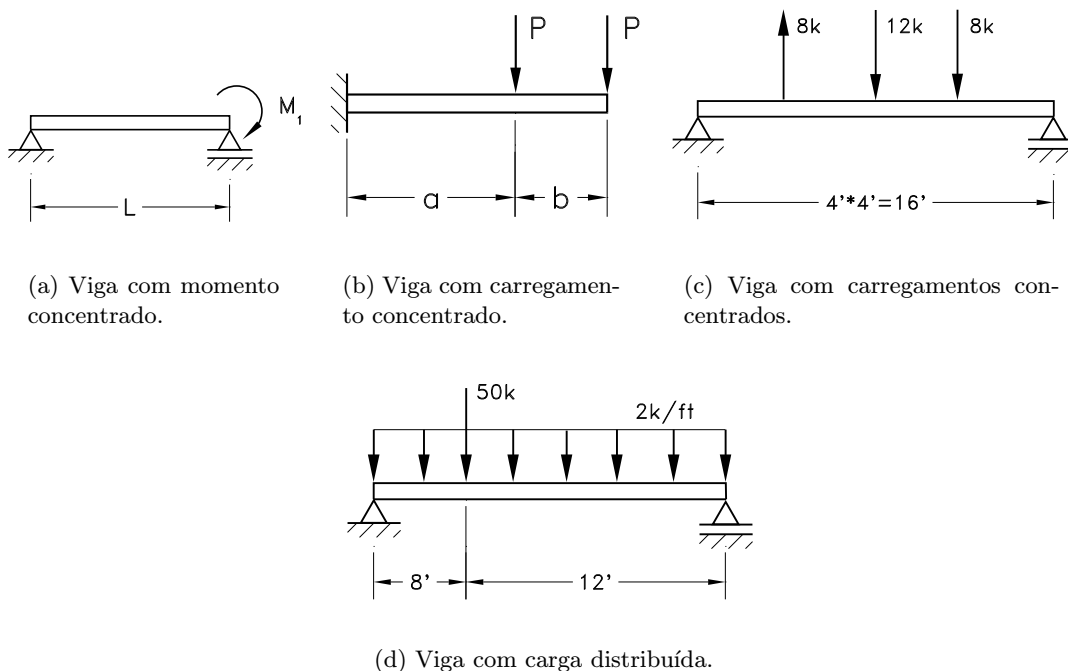


Figura 2.31: Exercícios propostos.

2.8 Exercícios Propostos

Determinar as reações de apoio para as vigas ilustradas na Figura 2.31, empregando as condições de equilíbrio de Newton e o princípio dos trabalhos virtuais.