

Capítulo 8

DEFORMAÇÃO

8.1 Introdução

De maneira geral, as forças aplicadas sobre um corpo provocam deformação num sólido e fluxo no caso de um fluido, sendo a determinação dos mesmos um dos principais objetivos na análise de problemas de mecânica. Neste capítulo, pretende-se apresentar o conceito de deformação para corpos sólidos, sem se preocupar com a natureza das forças envolvidas, as quais serão abordadas posteriormente.

Nas Figuras 8.1a) e b), ilustram-se, respectivamente, o estiramento de uma barra e a flexão de uma viga. Nestes dois casos, observam-se apenas variações nas dimensões dos corpos envolvidos, caracterizando um alongamento ou deformação normal. Já nas Figuras 8.1c) e d), tem-se, respectivamente, um torque aplicado a um eixo e a forma como os elementos longitudinais do eixo se comportam. Observa-se, neste caso, uma deformação de cisalhamento ou distorção, dada por uma variação angular representada por α .

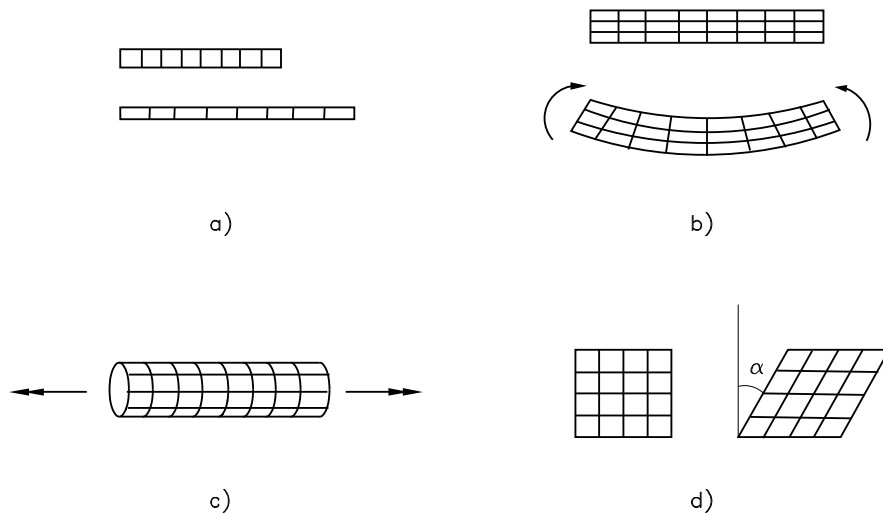


Figura 8.1: Deformações numa a) barra; b) viga; c) e d) eixo.

No caso de um corpo sólido, verifica-se a presença de deformações normal e de cisalhamento. Como será discutido ao longo deste capítulo, a deformação, no caso geral, será descrita por um tensor. A partir da definição da cinemática, descrita por um campo de deslocamentos ou velocidades, obtém-se as suas componentes de deformação derivando a cinemática dada.

Assim, o principal objetivo deste capítulo é apresentar um conceito de deformação suficientemente geral, podendo ser aplicado a vários problemas de mecânica. Para isso, inicialmente, caracterizam-

se os conceitos de corpo, deformação, campo de deslocamentos e gradientes envolvidos. A partir daí, consideram-se as descrições material e espacial de problemas de mecânica, deduzindo medidas de deformação dadas, respectivamente, pelos tensores de Green e Almansi.

Assumindo que a ordem de grandeza dos deslocamentos e de seus gradientes é pequena, chega-se ao conceito de deformação infinitesimal, a qual é caracterizada por um tensor simétrico, além de definir uma rotação rígida local. Finalmente, discutem-se as deformações principais, dilatação e taxa de deformação.

8.2 Caracterização da Deformação

Todo corpo tem como característica física o fato de ocupar regiões do espaço euclidiano \mathcal{E} . Assim, um corpo qualquer pode ocupar diferentes regiões em tempos distintos. Embora nenhuma destas regiões possa ser associada ao corpo, torna-se conveniente selecionar uma delas, denominada *configuração de referência* \mathcal{B} , identificando pontos do corpo com as suas posições em \mathcal{B} . Desta maneira, um corpo \mathcal{B} passa a ser uma região regular de \mathcal{E} , sendo os pontos $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ denominados *pontos materiais*. Qualquer subregião regular limitada de \mathcal{B} é chamada *parte*. Estes conceitos estão ilustrados na Figura 8.2.

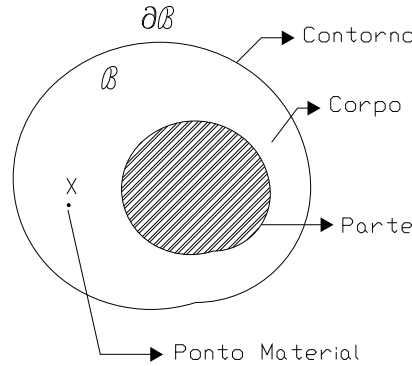


Figura 8.2: Configuração de referência \mathcal{B} e seu contorno $\partial\mathcal{B}$.

Como um corpo pode ocupar diferentes regiões ao longo de um movimento, torna-se necessário a introdução de um parâmetro $t \in [t_0, t_f]$, designando uma certa configuração \mathcal{B}_t do corpo. Observa-se que em vários problemas t não representa necessariamente o tempo.

A partir daí, um corpo é deformado através de uma aplicação \mathbf{f}_t mapeando uma configuração \mathcal{B} numa outra \mathcal{B}_t ,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_t: \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{B}_t \\ \mathbf{X} &\rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{f}_t(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (8.1)$$

ou seja, levam-se pontos materiais $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ em pontos espaciais $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$.

No entanto, a aplicação \mathbf{f}_t deve satisfazer algumas condições para caracterizar uma deformação, tais como:

- não deve haver interpenetração de material, implicando que \mathbf{f}_t é biunívoca;
- deve-se evitar que um corpo de volume não-nulo passe a ter um volume nulo após a deformação. Verifica-se que $\det \nabla \mathbf{f}_t$ representa localmente o volume após a deformação por unidade original de volume. Logo, tem-se que $\det \nabla \mathbf{f}_t > 0$.

Assim, entende-se como uma deformação de um corpo, ao passar da configuração \mathcal{B} para \mathcal{B}_t , como a aplicação biunívoca (8.1), satisfazendo,

$$\begin{aligned} \det \nabla \mathbf{f}_t &> 0 & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B} \\ \mathbf{f}_t(\mathcal{B}) &= \mathcal{B}_t \\ \mathbf{f}_t(\partial\mathcal{B}) &= \partial\mathcal{B}_t \end{aligned} \quad (8.2)$$

Descreve-se a deformação a partir de um campo vetorial \mathbf{u}_t , definido a partir das posições que uma partícula ocupa antes e depois da deformação, sendo válido para todos pontos do corpo \mathcal{B} . Tomando-se a Figura 8.3, observa-se que,

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_t(\mathbf{X}) - \mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

ou ainda,

$$\mathbf{f}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}_t(\mathbf{X}) \quad (8.3)$$

O campo \mathbf{u}_t é denominado *campo de deslocamentos* relativo à configuração \mathcal{B} , devendo satisfazer certas restrições para garantir que as condições (8.2) sejam válidas. Define-se, então, o tensor $\mathbf{F}_t(\mathbf{X}) = \nabla \mathbf{f}_t(\mathbf{X})$ como gradiente da deformação. Logo, a partir de (8.3) tem-se que,

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{X}) = \nabla \mathbf{f}_t(\mathbf{X}) = \nabla \mathbf{X} + \nabla \mathbf{u}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_t(\mathbf{X}) \quad (8.4)$$

sendo \mathbf{I} o tensor identidade.

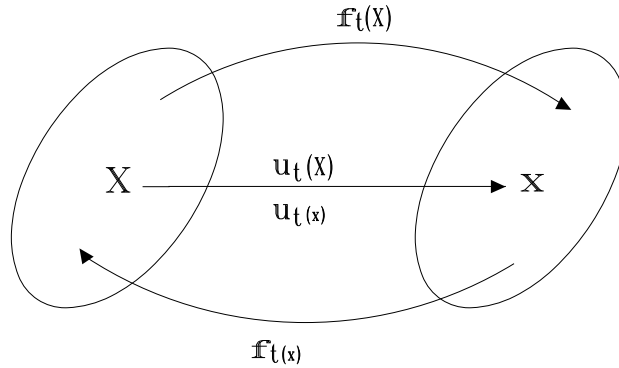


Figura 8.3: Campos vetoriais $\mathbf{u}_t(\mathbf{X})$ e $\mathbf{u}_t(\mathbf{x})$ caracterizando, respectivamente, a deformação $\mathbf{f}_t(\mathbf{X})$ e sua inversa $\mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{X})$.

Por sua vez, o tensor $\nabla \mathbf{u}_t(\mathbf{X})$ é o gradiente de deslocamentos, sendo dado em componentes cartesianas como,

$$[\nabla \mathbf{u}_t] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

Uma deformação é homogênea se o seu gradiente é constante. Demonstra-se que toda deformação homogênea \mathbf{f} , com $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{f}$, admite a seguinte representação,

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}(\mathbf{Y}) + \mathbf{F}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{B} \quad (8.6)$$

Como exemplos de deformação homogênea tem-se a translação, além de uma rotação e um estiramento em relação a um ponto fixo. No primeiro caso, $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ é uma translação se,

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}$$

onde \mathbf{u} é um vetor constante, indicando uma translação, e $\nabla \mathbf{f} = \mathbf{I}$.

Por sua vez, $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ é uma rotação em torno de um ponto fixo \mathbf{Y} se

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{Y} + \mathbf{R}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})$$

sendo \mathbf{R} um tensor de rotação constante e portanto antissimétrico. Da mesma maneira,

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{Y} + \mathbf{U}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})$$

constitui um estiramento a partir de \mathbf{Y} , sendo \mathbf{U} um tensor simétrico e positivo-definido.

Supondo agora uma deformação $\mathbf{f}_t(\mathbf{X})$ geral, não necessariamente homogênea, e efetuando uma expansão de \mathbf{f}_t numa vizinhança próxima de um ponto $\mathbf{Y} \in \mathcal{B}$ arbitrário vem que,

$$\mathbf{f}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_t(\mathbf{Y}) + \mathbf{F}_t(\mathbf{Y})(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) + o(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \quad (8.7)$$

Assim, em torno de uma vizinhança de \mathbf{Y} , com erro da ordem $o(\mathbf{X} - \mathbf{Y})$, uma deformação geral comporta-se como uma deformação homogênea.

8.3 Descrições Material e Espacial

Considere a barra ilustrada na Figura 8.4 deformada de um comprimento inicial L_0 para um comprimento final L . Como medida deste alongamento ou deformação empregam-se as seguintes expressões,

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} \quad \varepsilon' = \frac{L - L_0}{L} \quad (8.8)$$

Estas relações adimensionais eliminam a influência dos comprimentos absolutos L_0 e L na medida de deformação. Observa-se que numericamente as expressões anteriores são diferentes, pois para $L = 2$ e $L_0 = 1$, tem-se $\varepsilon = 1$ e $\varepsilon' = \frac{1}{2}$. No entanto, para $L = 1.01$ e $L_0 = 1.00$, vem que $\varepsilon = \varepsilon' = 0.01$. Assim, para alongamentos infinitesimais, as medidas em (8.8) são iguais. No entanto, para alongamentos finitos, as expressões resultam em valores diferentes.

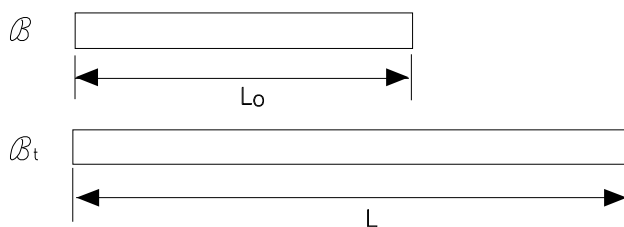


Figura 8.4: Barra alongada de um comprimento L_0 para L .

A partir de (8.8), verifica-se que a deformação ε é medida em relação ao comprimento inicial L_0 da barra, enquanto que ε' é calculada tomando-se o comprimento final L após o alongamento. As grandezas ε e ε' são, respectivamente, as descrições material e espacial do alongamento da barra. De forma geral, estas descrições são utilizadas no estudo da deformação e do movimento em problemas de mecânica.

Basicamente, na descrição material, observa-se o comportamento dos pontos materiais $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ ao longo do tempo. Tomando-se um ponto $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ e a expressão (8.1) vem que,

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_t(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (8.9)$$

Logo, a expressão anterior descreve a trajetória da partícula \mathbf{X} ao longo do tempo t , ou seja, o conjunto de posições $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ ocupadas por \mathbf{X} , com $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t_o) = \mathbf{X}$ onde t_o indica o tempo inicial. Considerando todo o corpo \mathcal{B} , tem-se que

$$\mathcal{B}_t = \mathbf{x}(\mathcal{B}, t) \quad (8.10)$$

representa o movimento do corpo \mathcal{B} , isto é, o conjunto de regiões \mathcal{B}_t do espaço euclidiano \mathcal{E} ocupado por \mathcal{B} ao longo do tempo.

Tomando-se \mathbf{X} e \mathbf{x} em termos de componentes, ou seja, $\mathbf{X} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, expressa-se (8.9) como,

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_2 = x_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_3 = x_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad (8.11)$$

Quando um corpo está em movimento, grandezas associadas ao mesmo, tais como temperatura e velocidade, variam com o tempo. Estas variações podem ser descritas de formas material e espacial. Dada uma certa grandeza Φ , observam-se as seguintes características destas descrições:

- **material:** neste caso, Φ é expresso em função das partículas ou pontos materiais $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$, dados pelas coordenadas materiais X_1 , X_2 e X_3 . Logo,

$$\Phi = \Phi(X_1, X_2, X_3, t)$$

Esta descrição também é conhecida como Lagrangeana ou de referência.

- **espacial:** a grandeza Φ é dada em função de uma posição espacial fixa e do tempo, ou seja,

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3, t)$$

Assim, observa-se como Φ varia numa posição fixa, definida por coordenadas espaciais (x_1, x_2, x_3) . As posições espaciais são ocupadas por diferentes partículas ao longo do tempo. Esta descrição é também conhecida como Euleriana.

No caso da deformação de corpos, a expressão (8.1) é a descrição material, sendo o campo de deslocamento associado dado por (8.3). Como $\mathbf{f}_t(\mathbf{X})$ é biunívoca, existe a função inversa $\mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{x})$,

$$\begin{array}{l} \mathbf{f}_t^{-1} : \mathcal{B}_t \rightarrow \mathcal{B} \\ \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{x}) \end{array} \quad (8.12)$$

Neste caso, o campo vetorial $\mathbf{u}_t(\mathbf{x})$ associado é descrito como,

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{f}_t^{-1} = \mathbf{x} - \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \quad (8.13)$$

Verifica-se que as descrições material e espacial estão relacionadas pelo movimento. Logo, se o movimento é conhecido, uma descrição pode ser obtida a partir da outra.

Exemplo 8.1 *Seja o movimento de um corpo*

$$x_1 = X_1 + ktX_2 \quad x_2 = X_2 \quad x_3 = X_3 \quad (8.14)$$

e o campo de temperatura dado pela descrição espacial

$$\theta = x_1 + x_2 \quad (8.15)$$

1. Encontrar a descrição material da temperatura.
2. Expressar a taxa de troca de temperatura nas descrições material e espacial.

Solução:

1. Substituindo (8.14) em (8.15), obtém-se,

$$\theta = x_1 + x_2 = X_1 + (kt + 1)X_2$$

2. Para uma certa partícula material X_i , a taxa de troca de temperatura é dada por,

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{X_i \text{ fixo}} = kX_2 = kx_2$$

Nota-se que embora a descrição espacial da temperatura é independente do tempo, cada partícula experimenta variação em temperatura, pois a partícula flui de uma posição espacial para outra.

8.4 Descrição Material da Deformação

Como mencionado anteriormente, a expressão (8.1) consiste na descrição material da deformação. Deseja-se agora determinar uma medida da deformação. Para isso, considere a Figura 8.5 onde um elemento $d\mathbf{X}$ da configuração de referência \mathcal{B} , na vizinhança de \mathbf{X} , é deformado para o elemento $d\mathbf{x}$ em \mathcal{B}_t . Substituindo $\mathbf{X} = \mathbf{X} + d\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ em (8.7) e desprezando o termo de ordem $o(\cdot)$, vem que,

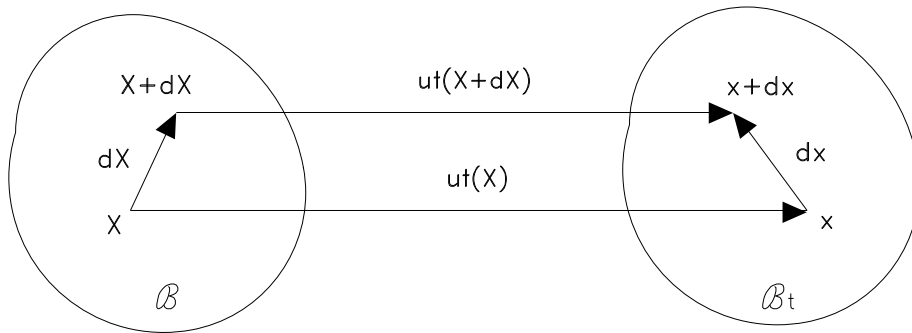


Figura 8.5: Descrições material ($\mathbf{u}_t(\mathbf{X})$) e espacial ($\mathbf{u}_t(\mathbf{x})$) da deformação.

$$\mathbf{f}_t(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \mathbf{f}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{F}_t(\mathbf{X})(\mathbf{X} + d\mathbf{X} - \mathbf{X}) \Rightarrow \mathbf{x} + d\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{F}_t(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \Rightarrow d\mathbf{x} = \mathbf{F}_t d\mathbf{X} \quad (8.16)$$

Logo, o comprimento da fibra $d\mathbf{x}$ é dada por,

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F}_t d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}_t d\mathbf{X} = \mathbf{F}_t^T \mathbf{F}_t d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (8.17)$$

Desta maneira, uma medida da deformação da fibra $d\mathbf{X}$ ao ser deformada para $d\mathbf{x}$ é calculada como,

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{F}_t^T \mathbf{F}_t d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{F}_t^T \mathbf{F}_t - \mathbf{I}) d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = 2\mathbf{E}^* d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (8.18)$$

onde \mathbf{E}^* é denominado *tensor de deformação de Green* e dado por,

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_t^T \mathbf{F}_t - \mathbf{I}) \quad (8.19)$$

Substituindo (8.4) em (8.19), verifica-se que,

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2} [(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_t)^T (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_t) - \mathbf{I}] = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_t + \nabla \mathbf{u}_t^T + \nabla \mathbf{u}_t^T \nabla \mathbf{u}_t) \quad (8.20)$$

Assim, as componentes de \mathbf{E}^* , com respeito a um sistema cartesiano, são dadas por,

$$E_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (8.21)$$

8.5 Descrição Espacial da Deformação

De forma análoga a seção anterior, pode-se deduzir uma medida de deformação considerando uma descrição espacial. Para isso, seja $\mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{x}) = \text{grad } \mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{x})$ o gradiente da deformação inversa \mathbf{f}_t^{-1} , mapeando pontos espaciais $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ em pontos $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$. Logo, a partir de (8.13) verifica-se que,

$$\mathbf{F}_t^{-1}(\mathbf{x}) = \text{grad } \mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{x}) = \text{grad } \mathbf{x} - \text{grad } \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{I} - \text{grad } \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \quad (8.22)$$

sendo grad a notação para o gradiente em relação à variável espacial \mathbf{x} .

Além disso, tem-se por analogia com (8.7),

$$\mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{y}) + \mathbf{F}_t^{-1}(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + o(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (8.23)$$

Observando a Figura 8.5, substituindo $\mathbf{x} = \mathbf{x} + d\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ na expressão anterior e desprezando $o(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ vem que,

$$\mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_t^{-1}(\mathbf{x})(\mathbf{x} + d\mathbf{x} - \mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{X} + d\mathbf{X} - \mathbf{X} = \mathbf{F}_t^{-1}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \Rightarrow d\mathbf{X} = \mathbf{F}_t^{-1} d\mathbf{x} \quad (8.24)$$

Assim, a medida de deformação é dada por,

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - \mathbf{F}_t^{-T} \mathbf{F}_t^{-1} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{F}_t^{-T} \mathbf{F}_t^{-1}) d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = 2\bar{\mathbf{E}} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \quad (8.25)$$

onde $\bar{\mathbf{E}}$ é o *tensor de deformação de Almansi*, ou seja,

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}_t^{-T} \mathbf{F}_t^{-1}) \quad (8.26)$$

Substituindo (8.22) em (8.26), tem-se que,

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{u}_t + \text{grad } \mathbf{u}_t^T - \text{grad } \mathbf{u}_t^T \text{grad } \mathbf{u}_t) \quad (8.27)$$

ou em termos de componentes cartesianas,

$$\bar{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (8.28)$$

Exemplo 8.2 Dadas as componentes de deslocamento

$$u_1 = kX_2^2 \quad u_2 = u_3 = 0$$

Pede-se:

1. Esboçar a forma deformada de um quadrado unitário $OABC$, onde o ponto O está na origem e com os lados OA e OC alinhados com os eixos x e y , respectivamente.
2. Determinar os vetores deformados (i.e., $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$) dos elementos materiais $d\mathbf{X}_1 = dX_1\mathbf{e}_1$ e $d\mathbf{X}_2 = dX_2\mathbf{e}_2$ localizados no ponto C .
3. Determinar a razão entre os comprimentos deformados e não-deformados dos elementos diferenciais (chamado alongamento) e a variação do ângulo entre os elementos do item anterior.

Solução:

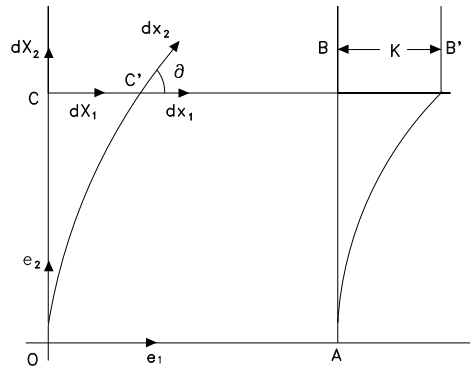


Figura 8.6: Quadrado unitário $OABC$ deformado para $OAB'C'$.

1. Seguindo o esquema da Figura 8.6, para a linha material OA , $X_2 = 0$ e portanto $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. Logo, a linha OA não sofre deslocamento. Para a linha material CB , $X_2 = 1$, $u_1 = k$ e portanto a linha é deslocada de k unidades para a direita. Para as linhas materiais OC e AB , $u_1 = kX_2^2$ e as linhas assumem uma forma parabólica. A forma final é dada então por $OAB'C'$ na Figura 8.6.
2. Para o ponto material C , a matriz gradiente do deslocamento é

$$[\nabla \mathbf{u}_t] = \begin{bmatrix} 0 & 2kX_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{X_2=1}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_1 &= \mathbf{F}_t d\mathbf{X}_1 = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_t) d\mathbf{X}_1 \\ [d\mathbf{x}_1] &= \begin{bmatrix} 1 & 2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dX_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow d\mathbf{x}_1 = dX_1 \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_2 &= \mathbf{F}_t d\mathbf{X}_2 = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_t) d\mathbf{X}_2 \\ [d\mathbf{x}_2] &= \begin{bmatrix} 1 & 2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ dX_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2k dX_2 \\ dX_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow d\mathbf{x}_2 = 2k dX_2 \mathbf{e}_1 + dX_2 \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

3. A partir dos resultados do item anterior, tem-se,

$$\frac{|d\mathbf{x}_1|}{|d\mathbf{X}_1|} = 1 \quad \frac{|d\mathbf{x}_2|}{|d\mathbf{X}_2|} = \sqrt{(1+4k^2)} \quad \cos \theta = \frac{d\mathbf{x}_1}{|d\mathbf{x}_1|} \cdot \frac{d\mathbf{x}_2}{|d\mathbf{x}_2|} = \frac{2k}{\sqrt{(1+4k^2)}}$$

Se γ denota o decréscimo no ângulo, inicialmente reto, entre $d\mathbf{X}_1$ e $d\mathbf{X}_2$, então,

$$\cos \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) = \sin \gamma = \frac{2k}{\sqrt{(1+4k^2)}} \Rightarrow \gamma = \sin^{-1} \frac{2k}{\sqrt{(1+4k^2)}}$$

□

8.6 Deformação Infinitesimal

Em vários problemas práticos, a deformação de um corpo é tal que as componentes $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ e $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ do gradiente de deslocamento são bem menores que 1, por exemplo da ordem 10^{-4} . Assim, supondo que os deslocamentos e seus gradientes são suficientemente pequenos, ou seja,

$$\|\mathbf{u}_t\|, \|\nabla \mathbf{u}_t\|, \|\text{grad } \mathbf{u}_t\| < \xi \quad (8.29)$$

onde $\xi > 0$ é um valor pequeno, pode-se desprezar os termos de maior ordem $\nabla \mathbf{u}_t^T \nabla \mathbf{u}_t$ e $\text{grad } \mathbf{u}_t^T \text{grad } \mathbf{u}_t$ nos tensores de Green e Almansi frente aos termos $\nabla \mathbf{u}_t$ e $\text{grad } \mathbf{u}_t$, respectivamente.

Assim, igualando os termos do lado direito das expressões (8.18) e (8.25) e empregando (8.16) vem que,

$$\mathbf{E}^* d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \bar{\mathbf{E}} dx \cdot dx = \bar{\mathbf{E}} (\mathbf{F}_t d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F}_t d\mathbf{X}) = \mathbf{F}_t^T \bar{\mathbf{E}} \mathbf{F}_t d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{E}^* = \mathbf{F}_t^T \bar{\mathbf{E}} \mathbf{F}_t \quad (8.30)$$

Logo, substituindo (8.4) na equação anterior, obtém-se

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{F}_t^T \bar{\mathbf{E}} \mathbf{F}_t = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_t)^T \bar{\mathbf{E}} (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_t) = \bar{\mathbf{E}} + \nabla \mathbf{u}_t^T \bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{E}} \nabla \mathbf{u}_t + \nabla \mathbf{u}_t^T \bar{\mathbf{E}} \nabla \mathbf{u}_t = \bar{\mathbf{E}} + o(\bar{\mathbf{E}})$$

Desta maneira, sob a hipótese (8.29), os tensores de Green e de Almansi diferem por termos de ordem superior. Desprezando estes termos, conclui-se que $\nabla = \text{grad}$, ou seja, os gradientes material e espacial coincidem. Portanto,

$$\mathbf{E}^* = \bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_t + \nabla \mathbf{u}_t^T) = \mathbf{E} = (\nabla \mathbf{u}_t)^s \quad (8.31)$$

sendo \mathbf{E} o *tensor de deformação infinitesimal*. Observa-se ainda que \mathbf{E} é igual à parte simétrica de $\nabla \mathbf{u}_t$, ou seja, $\mathbf{E} = (\nabla \mathbf{u}_t)^s$. Neste caso, a equação (8.18) pode ser reescrita como,

$$dx \cdot dx - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = 2\mathbf{E} d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = 2d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{X} \quad (8.32)$$

As componentes de \mathbf{E} com respeito a um sistema cartesiano são dadas por,

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (8.33)$$

ou ainda matricialmente,

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (8.34)$$

A partir de (8.31), observa-se que a deformação infinitesimal será rígida se a medida de deformação dada pelo tensor \mathbf{E} for nula. Como consequência, tem-se $\nabla \mathbf{u}_t = -\nabla \mathbf{u}_t^T$, ou seja, o gradiente do campo de deslocamentos correspondente a uma deformação rígida é um tensor antissimétrico. Denomina-se $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \{ (\nabla \mathbf{u}_t - \nabla \mathbf{u}_t^T) \}$ como *tensor de rotação infinitesimal*.

A partir daí, é possível introduzir a seguinte definição: um campo de deslocamento infinitesimal é rígido se o seu gradiente, denotado por um tensor $\mathbf{W} = \nabla \mathbf{u}_t$ é constante e antissimétrico. Logo, a partir de (8.6),

$$\mathbf{u}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_t(\mathbf{Y}) + \mathbf{W}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{B}$$

Tomando o vetor axial ω associado a \mathbf{W} vem que,

$$\mathbf{u}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_t(\mathbf{Y}) + \omega \times (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{B}$$

Considerando um campo de deslocamentos \mathbf{u}_t satisfazendo (8.29), tem-se a partir de (8.7),

$$\mathbf{u}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_t(\mathbf{Y}) + \nabla \mathbf{u}_t(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) + o(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{B} \quad (8.35)$$

Decompondo o gradiente do campo de deslocamentos na suas partes simétrica $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_t + \nabla \mathbf{u}_t^T)$ e antissimétrica $\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_t - \nabla \mathbf{u}_t^T)$, a expressão anterior pode ser reescrita como,

$$\mathbf{u}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_t(\mathbf{Y}) + \mathbf{E}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) + \mathbf{W}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) + o(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{B} \quad (8.36)$$

Logo, na vizinhança de \mathbf{Y} com erro $o(\mathbf{X} - \mathbf{Y})$, um campo de deslocamentos infinitesimal constante de uma parte correspondente a deformação e a rotação rígida local em cada ponto do corpo.

8.7 Interpretação das Componentes de Deformação

As componentes do tensor de deformação infinitesimal (8.34) possuem uma interpretação geométrica simples. Tomando, inicialmente, os termos da diagonal de \mathbf{E} , seja $d\mathbf{X} = (dS)\mathbf{n}$ um elemento material, na direção especificada pelo vetor unitário \mathbf{n} , de tamanhos original dS e deformado ds . A partir de (8.32), tem-se que,

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2(dS)^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n} \quad (8.37)$$

Para pequenas deformações, verifica-se que,

$$(ds)^2 - (dS)^2 = (ds - dS)(ds + dS) \approx 2dS(ds - dS)$$

e substituindo em (8.37) tem-se

$$\frac{ds - dS}{dS} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n} \quad (8.38)$$

Assim, a variação no comprimento $(ds - dS)$ por unidade de comprimento inicial dS , conhecida como alongamento unitário ou deformação normal, de um elemento material $d\mathbf{X}$ é determinada a partir do tensor de deformação \mathbf{E} . Para $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1, \mathbf{n} = \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$, a equação (8.38) fornece,

$$E_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}_1 = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} = \varepsilon_{xx}$$

$$E_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}_2 = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} = \varepsilon_{yy}$$

$$E_{33} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = \varepsilon_{zz}$$

ou seja, tem-se, respectivamente, os alongamentos ou extensões unitários nas direções X_1, X_2, X_3 ou x, y, z . A Figura 8.7 ilustra o alongamento ε_{xx} para um elemento infinitesimal $d\mathbf{X}$, considerando $\frac{\partial u_1}{\partial X_1} > 0$ e $\frac{\partial u_1}{\partial X_1} < 0$, assim como $u_2 = u_3 = 0$.

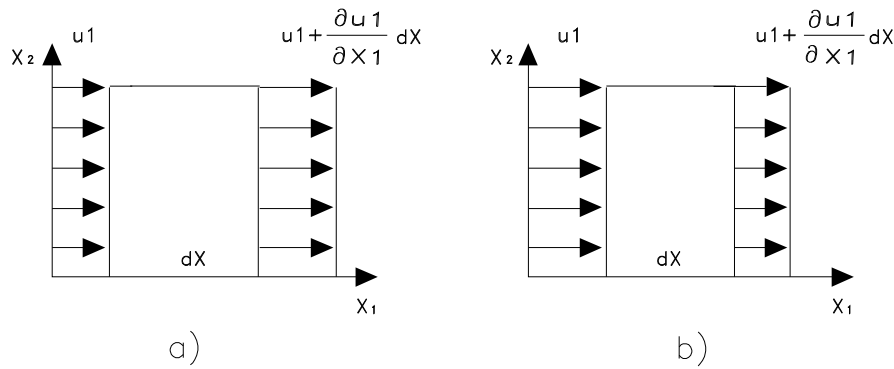


Figura 8.7: Interpretação da componente de deformação ε_{xx} : a) $\frac{\partial u_1}{\partial X_1} > 0$, b) $\frac{\partial u_1}{\partial X_1} < 0$.

Para interpretar os termos fora da diagonal principal do tensor \mathbf{E} , considere os elementos materiais $d\mathbf{X}_1 = (dS_1) \mathbf{m}$ e $d\mathbf{X}_2 = (dS_2) \mathbf{n}$, onde os vetores unitários \mathbf{m} e \mathbf{n} são perpendiculares entre si, implicando que $d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 = 0$. Logo, a partir de (8.32) vem que,

$$(ds_1)(ds_2) \cos \theta = 2(dS_1)(dS_2) \mathbf{m} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n} \quad (8.39)$$

onde θ é o ângulo entre os elementos deformados $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$.

Tomando $\theta = \pi/2 - \gamma$, então γ é a medida do decrescimento do ângulo entre $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$, conhecido como deformação de cisalhamento. Como $\cos(\pi/2 - \gamma) = \sin \gamma$ e para pequenas deformações $\sin \gamma \approx \gamma$, $\frac{ds_1}{dS_1} \approx 1$, $\frac{ds_2}{dS_2} \approx 1$, tem-se a partir de (8.39),

$$\gamma = 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n} \quad (8.40)$$

Considerando $\mathbf{m} = \mathbf{e}_1$ e $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$, vem que,

$$\gamma = 2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}_2 = 2E_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} = \gamma_{xy}$$

Assim, $2E_{12}$ representa o decréscimo do ângulo entre os elementos materiais $d\mathbf{X}_1$ e $d\mathbf{X}_2$ nas direções X_1 e X_2 . Analogamente, para as componentes $E_{13} = \gamma_{xz}$ e $E_{23} = \gamma_{yz}$. A Figura 8.8 ilustra a deformação γ_{xy} , observando que as derivadas $\frac{\partial u_1}{\partial X_2}$ e $\frac{\partial u_2}{\partial X_1}$ indicam, respectivamente, as inclinações nas direções vertical e horizontal. As componentes γ_{xy} , γ_{xz} e γ_{yz} são denominadas deformações de cisalhamento ou distorções, indicando uma deformação angular.

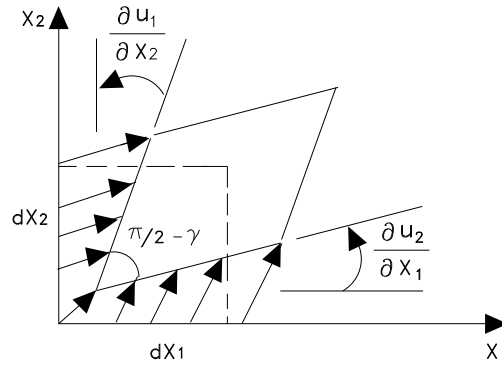


Figura 8.8: Interpretação da deformação de cisalhamento γ_{xy} .

Exemplo 8.3 Dadas as componentes de deslocamento

$$u_1 = kX_2^2 \quad u_2 = u_3 = 0 \quad k = 10^{-4}$$

1. Obter o tensor \mathbf{E} de deformação infinitesimal.
2. Usando o tensor de deformação \mathbf{E} , determinar o alongamento unitário para os elementos materiais $d\mathbf{X}_1 = dX_1\mathbf{e}_1$ e $d\mathbf{X}_2 = dX_2\mathbf{e}_2$ no ponto $C(0, 1, 0)$ da Figura 8.6. Determinar também a variação no ângulo entre estes dois elementos.
3. Comparar os resultados com aqueles do Exemplo 8.2.

Solução:

1. A partir da cinemática dada, o gradiente do campo de deslocamentos é dado por,

$$[\nabla \mathbf{u}_t] = \begin{bmatrix} 0 & 2kX_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$[\mathbf{E}] = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}_t + \nabla \mathbf{u}_t^T] = [\nabla \mathbf{u}_t]^S = \begin{bmatrix} 0 & kX_2 & 0 \\ kX_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. No ponto C , $X_2 = 1$, então,

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para os elementos $d\mathbf{X}_1 = dX_1\mathbf{e}_1$ e $d\mathbf{X}_2 = dX_2\mathbf{e}_2$, os alongamentos unitários são $E_{11} = 0$ e $E_{22} = 0$. O decréscimo no ângulo é dado por $2E_{12}$, isto é, $2k = 2 \times 10^{-4}$.

3. Dos resultados do Exemplo 8.2, tem-se,

$$\frac{|d\mathbf{x}_1| - |d\mathbf{X}_1|}{|d\mathbf{X}_1|} = 0 \quad \frac{|d\mathbf{x}_2| - |d\mathbf{X}_2|}{|d\mathbf{X}_2|} = \sqrt{(1+4k^2)} - 1 \quad \text{sen}\gamma = \frac{2k}{\sqrt{(1+4k^2)}}$$

Como $k = 10^{-4}$, tem-se,

$$\sqrt{(1+4k^2)} - 1 \simeq 1 + 2k^2 - 1 = 2k^2 = 2 \times 10^{-8}$$

e $\text{sen}\gamma = 2k = 2 \times 10^{-4}$ e assim $\gamma = 2 \times 10^{-4}$. Como 10^{-8} é desprezível se comparado a 10^{-4} , vê-se que os resultados do Exemplo 8.2 se reduzem a estes valores para k pequeno.

□

Exemplo 8.4 Dado o campo de deslocamentos

$$u_1 = k(2X_1 + X_2^2) \quad u_2 = k(X_1^2 - X_2^2) \quad u_3 = 0$$

onde $k = 10^{-4}$.

1. Determinar os alongamentos unitários e a variação do ângulo para os dois elementos $d\mathbf{X}_1 = dX_1\mathbf{e}_1$ e $d\mathbf{X}_2 = dX_2\mathbf{e}_2$ que se originam da partícula material $\mathbf{X} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$.
2. Determinar a posição deformada para os dois elementos $d\mathbf{X}_1$ e $d\mathbf{X}_2$.

Solução:

1. Avalia-se $[\nabla\mathbf{u}_t]$ em $X_1 = 1$, $X_2 = -1$, $X_3 = 0$ como,

$$[\nabla\mathbf{u}_t] = k \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, a matriz de deformação é a seguinte

$$[\mathbf{E}] = k \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $E_{11} = E_{22} = 2k$, ambos os elementos têm um alongamento unitário de 2×10^{-4} . Além disso, como $E_{12} = 0$, estas linhas permanecem perpendiculares entre si.

2. A partir de

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}_t d\mathbf{X} = (\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}_t) d\mathbf{X}$$

tem-se,

$$[d\mathbf{x}_1] = ([\mathbf{I}] + [\nabla\mathbf{u}_t]) [d\mathbf{X}_1] = \begin{bmatrix} 1+2k & -2k & 0 \\ 2k & 2k+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = dX_1 \begin{Bmatrix} 1+2k \\ 2k \\ 0 \end{Bmatrix}$$

De maneira similar,

$$[dx_2] = dX_2 \begin{Bmatrix} -2k \\ 1+2k \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A posição deformada desses elementos está representado na Figura 8.9, podendo-se observar que,

$$\alpha \simeq \tan \alpha \simeq \frac{2kdX_1}{dX_1} = 2k$$

e

$$\beta \simeq \tan \beta \simeq \frac{2kdX_2}{dX_2} = 2k$$

Portanto, como obtido previamente, não há nenhuma variação no ângulo entre $d\mathbf{X}_1$ e $d\mathbf{X}_2$.

□

Exemplo 8.5 Num cubo unitário, com lados paralelos aos eixos coordenados, é aplicado o campo de deslocamentos,

$$u_1 = kX_1 \quad u_2 = u_3 = 0 \quad k = 10^{-4}$$

Deterninar o aumento no comprimento da diagonal AB (ver Figura 8.10),

1. utilizando o tensor de deformação;
2. geometricamente.

Solução:

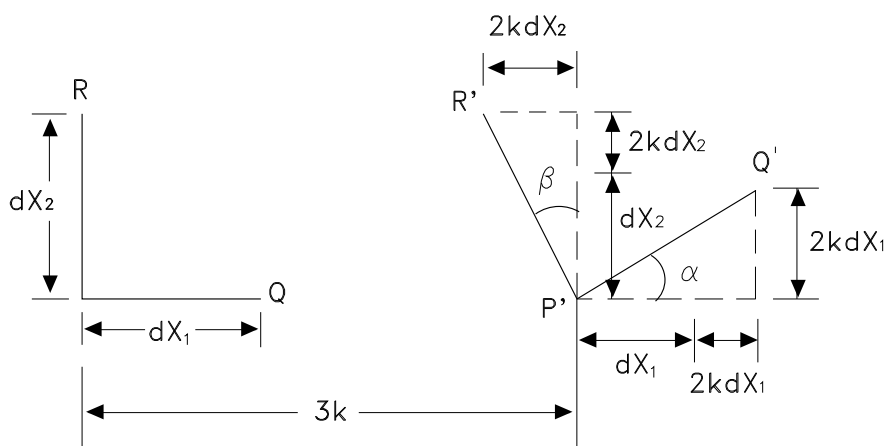


Figura 8.9: Deformação dos elementos $d\mathbf{X}_1$ e $d\mathbf{X}_2$.

1. O tensor de deformação é facilmente calculado como sendo,

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a diagonal AB estava originalmente na direção $\mathbf{n} = \sqrt{2}/2 (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$, seu alongamento unitário é dado por

$$E_{(n)(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{k}{2}$$

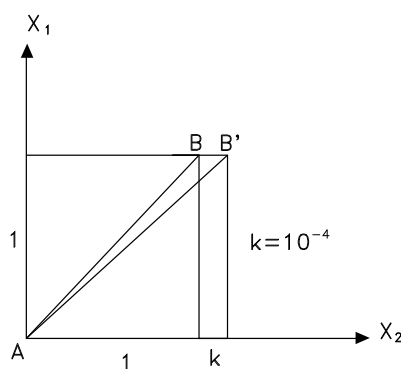


Figura 8.10: Deformação da diagonal AB .

Mas $AB = \sqrt{2}$ e seu alongamento ΔAB é o seguinte,

$$\Delta AB = \left(\frac{k}{2}\right) \sqrt{2}$$

2. Geometricamente,

$$AB' - AB = \left\{1 + (1+k)^2\right\}^{1/2} - \sqrt{2}$$

ou

$$\Delta AB = \sqrt{2} \left[\left(1 + k + \frac{k^2}{2}\right)^{1/2} - 1 \right]$$

Utilizando o fato de k ser pequeno, expande-se o primeiro termo como,

$$\left(1 + k + \frac{k^2}{2}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \left(k + \frac{k^2}{2}\right) + \dots \simeq 1 + \frac{k}{2}$$

Logo, de acordo com o item 1,

$$\Delta AB = \left(\frac{k}{2}\right) \sqrt{2}$$

□

8.8 Deformações Principais

Como o tensor de deformação infinitesimal \mathbf{E} , dado em (8.30), é simétrico, existem pelo menos 3 direções mutuamente perpendiculares $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ tal que a matriz de \mathbf{E} , relativa a estas direções, é diagonal. Logo,

$$[\mathbf{E}]_{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix} \quad (8.41)$$

Geometricamente, isto significa que os elementos infinitesimais $d\mathbf{X}_i$ nas direções \mathbf{n}_i ($i = 1, 2, 3$), denominadas *direções principais de deformação*, permanecem mutuamente perpendiculares após a deformação. Por sua vez, os alongamentos unitários (E_1, E_2, E_3) são os autovalores ou *deformações principais* de \mathbf{E} .

As deformações principais são determinadas a partir da equação característica de \mathbf{E} , ou seja,

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

onde os invariantes escalares I_1, I_2 e I_3 são dadas por,

$$I_1 = E_{11} + E_{22} + E_{33} \quad I_2 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} & E_{13} \\ E_{31} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} \\ E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} \quad I_3 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{vmatrix}$$

8.9 Dilatação

Considere 3 elementos materiais, segundo as direções principais, com comprimentos iniciais dS_1, dS_2 e dS_3 . Estes elementos formam um paralelepípedo cujos lados são alongados, passando a ter dimensões $(1 + E_1)dS_1, (1 + E_2)dS_2$ e $(1 + E_3)dS_3$, respectivamente, como ilustrado na Figura 8.11, sendo E_1, E_2, E_3 as deformações principais.

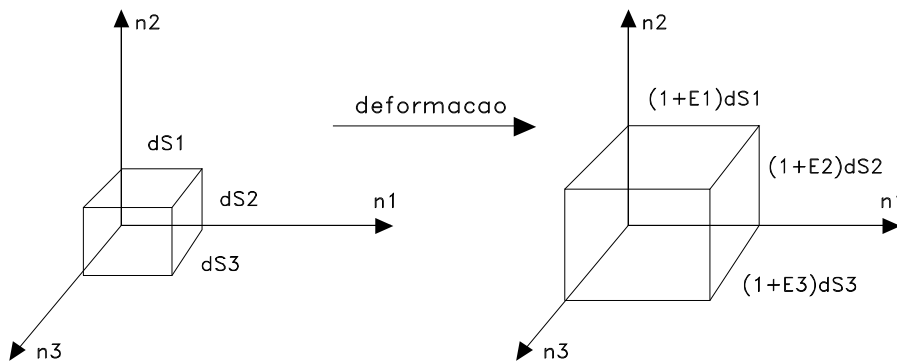


Figura 8.11: Alongamentos nas direções principais.

A variação no volume material dV é dada por,

$$\begin{aligned} \Delta(dV) &= (dS_1)(dS_2)(dS_3)(1 + E_1)(1 + E_2)(1 + E_3) - (dS_1)(dS_2)(dS_3) \\ &= (dV)(E_1 + E_2 + E_3 + E_1E_2 + E_1E_3 + E_2E_3 + E_1E_2E_3) \\ &= (dV)(E_1 + E_2 + E_3 + o(E_i)) \end{aligned}$$

onde o termo de ordem $o(E_i)$ contém produtos entre as componentes E_1, E_2, E_3 . Para pequenas deformações $o(E_i)$ é desprezível e portanto,

$$\epsilon_v = \frac{\Delta(dV)}{dV} = E_1 + E_2 + E_3 = E_{11} + E_{22} + E_{33} = E_{ii} \quad (8.42)$$

Desta maneira, o primeiro invariante escalar I_1 representa a variação unitária do volume material ϵ_V , sendo denominada *dilatação* ou *deformação volumétrica*. Observa-se que,

$$E_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (8.43)$$

8.10 Taxa de Deformação

Seja $d\mathbf{x}$ um elemento material localizado em \mathbf{x} no tempo t . Deseja-se calcular a derivada material $(D/Dt)d\mathbf{x}$, isto é, a taxa de variação do comprimento e da direção de $d\mathbf{x}$ ao longo do tempo. A partir da expressão do movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ vem que,

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (8.44)$$

Logo,

$$\frac{D}{Dt}(d\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \nabla \mathbf{v} d\mathbf{X} \quad (8.45)$$

Na expressão anterior, tem-se a derivada $(D/Dt)d\mathbf{x}$ numa descrição material. Observa-se que $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ é a velocidade do ponto material que ocupa a posição \mathbf{x} no instante t . Empregando-se uma descrição espacial, tem-se que a velocidade é escrita como $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Portanto,

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{grad} \mathbf{v} d\mathbf{x} \quad (8.46)$$

onde $\operatorname{grad} \mathbf{v}$ é o gradiente espacial da velocidade. Em termos de coordenadas cartesianas, as componentes de $\operatorname{grad} \mathbf{v}$ são dadas por,

$$[\operatorname{grad} \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (8.47)$$

Tomando-se dois pontos próximos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_t$ e realizando uma expansão em torno de \mathbf{y} vem que,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) + \operatorname{grad} \mathbf{v}(\mathbf{y}, t)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + o(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B} \quad (8.48)$$

Supondo que $\operatorname{grad} \mathbf{v}$ seja antissimétrico, denotando $\mathbf{W} = \operatorname{grad} \mathbf{v}$ e desprezando o termo $o(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, a equação anterior se reduz a,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{W}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B} \quad (8.49)$$

A partir do vetor axial $\boldsymbol{\omega}$ associado a \mathbf{W} vem que,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B} \quad (8.50)$$

e, portanto, um gradiente de velocidade antissimétrico representa a velocidade angular ω de uma rotação rígida local.

Considerando um tensor geral e denotando $\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}$, tem-se que \mathbf{L} pode ser escrito como uma soma de tensores simétrico \mathbf{D} e antissimétrico \mathbf{W} , ou seja, $\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$, sendo

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (8.51)$$

Observa-se que \mathbf{D} é denominado *tensor taxa de deformação* e \mathbf{W} é o *tensor taxa de rotação*. Substituindo $\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$ em (8.48) vem que,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{W}(\mathbf{y}, t)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{D}(\mathbf{y}, t)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + o(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B} \quad (8.52)$$

Assim, na vizinhança de \mathbf{y} e com erro $o(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, o campo de velocidade é a soma de um campo de velocidade rígido, caracterizado por $\mathbf{W}(\mathbf{y}, t)(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, e de um campo de forma, dado por $\mathbf{D}(\mathbf{y}, t)(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Além disso, o vetor axial ω de \mathbf{W} é a velocidade angular daquela parte do movimento representando uma rotação de corpo rígido.

Em termos de componentes, \mathbf{D} e \mathbf{W} são expressos como,

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (8.53)$$

$$[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (8.54)$$

Pode-se mostrar que o tensor \mathbf{D} está associado ao quadrado da taxa de variação de uma fibra infinitesimal $d\mathbf{x}$, na configuração \mathcal{B}_t , a partir do ponto \mathbf{y} e no instante t . Para isso, seja $d\mathbf{x} = (ds)\mathbf{n}$, onde \mathbf{n} é o vetor unitário na direção de $d\mathbf{x}$. Logo,

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (ds)^2$$

e

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}(ds)^2 \rightarrow 2d\mathbf{x} \cdot \frac{d}{dt}(d\mathbf{x}) = 2ds \frac{d}{dt}(ds)$$

Substituindo (8.46) na expressão anterior tem-se que,

$$d\mathbf{x} \cdot (\text{grad } \mathbf{v})d\mathbf{x} = ds \frac{d}{dt}(ds)$$

ou ainda,

$$(ds)^2 \mathbf{n} \cdot (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{n} = ds \frac{d}{dt}(ds) \rightarrow \frac{1}{ds} \frac{d}{dt}(ds) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}\mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{W}\mathbf{n}$$

Através das definições de tensores transposto e antissimétrico, vem que,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{W}\mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{W}^T \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{W}\mathbf{n} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{W}\mathbf{n}$$

Portanto, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{W}\mathbf{n} = 0$ e

$$\frac{1}{ds} \frac{d}{dt}(ds) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}\mathbf{n} \quad (8.55)$$

Desta forma, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}\mathbf{n}$ fornece a taxa de variação de $(d/dt)(ds)$ por unidade de comprimento original (ds) , sendo denominado taxa de deformação, para um elemento material na direção \mathbf{n} . Assim, D_{11} , D_{22} e D_{33} dão as taxas de deformação para os elementos nas direções x_1 , x_2 , x_3 . Por sua vez, $2D_{12}$ é a taxa de decrescimento do ângulo de dois elementos nas direções \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , conhecido como taxa de cisalhamento.

Da mesma maneira, o primeiro invariante do tensor taxa de deformação \mathbf{D} determina a taxa de variação de volume por unidade de volume, ou seja,

$$\Delta = \frac{1}{dV} \frac{D}{Dt}(dV) = D_{11} + D_{22} + D_{33} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

Como \mathbf{D} é simétrico, existem pelo menos 3 direções mutuamente perpendiculares (autovalores de \mathbf{D}), com as respectivas taxas de alongamento (autovalores de \mathbf{D}), incluindo os valores mínimo e máximo de alongamento.

Exemplo 8.6 Dado o campo de velocidades

$$v_1 = kx_2 \quad v_2 = v_3 = 0$$

1. Determinar a taxa de deformação e o tensor de rotação.
2. Determinar a taxa de deformação dos elementos materiais,

$$d\mathbf{x}_1 = (ds_1)\mathbf{e}_1 \quad d\mathbf{x}_2 = (ds_2)\mathbf{e}_2 \quad d\mathbf{x} = dl(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$$

3. Determinar as taxas de deformação máxima e mínima.

Solução.

1. A matriz do vetor gradiente é dada por

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$[\mathbf{D}] = [\nabla \mathbf{v}]^S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$[\mathbf{W}] = [\nabla \mathbf{v}]^A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{2} & 0 \\ -\frac{k}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. O elemento material $d\mathbf{x}_1$ está na direção \mathbf{e}_1 e então sua taxa de extensão é igual a $D_{11} = 0$. De maneira similar, a taxa de extensão de $d\mathbf{x}_2$ é igual a $D_{22} = 0$.
Para o elemento $d\mathbf{x} = (ds)\mathbf{n}$, onde $\mathbf{n} = (1/\sqrt{5})(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ e $ds = \sqrt{5}dl$, tem-se

$$\frac{1}{ds} \frac{D}{Dt}(ds) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}\mathbf{n} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{5}k$$

3. A partir da equação característica

$$|\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}| = -\lambda(\lambda^2 - k^2/4) = 0$$

determinam-se os autovalores do tensor \mathbf{D} como $\lambda = 0, \pm k/2$. Então, $k/2$ é a máxima e $-k/2$ é a mínima taxa de extensão. Os autovetores $\mathbf{n}_1 = (\sqrt{2}/2)(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ e $\mathbf{n}_2 = (\sqrt{2}/2)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ dão as direções dos elementos tendo estiramentos máximo e mínimo respectivamente.

□

8.11 Exercício Resolvido

Dado o campo de deslocamentos,

$$\mathbf{u} = [(20X_1^2 X_2)\mathbf{e}_1 + 10(X_2^2 + X_3^2)\mathbf{e}_2 + (X_1 + 3X_3^3)\mathbf{e}_3] \times \alpha (cm)$$

Pede-se:

1. se $\alpha = 10^{-2}$, a matriz gradiente do campo de deslocamento $[\nabla \mathbf{u}_t]$;
2. o tensor de Green \mathbf{E}^* , incluindo termos lineares e não-lineares $\nabla \mathbf{u}_t^T \nabla \mathbf{u}_t$, comparando a contribuição que os termos não-lineares trazem para os componentes do tensor;
3. para $\alpha = 10^{-4}$, calcule o tensor de Green \mathbf{E}^* com os termos não-lineares e faça a mesma comparação do item anterior;
4. calcule, assumindo pequenas deformações, o tensor de Cauchy $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_t^T + \nabla \mathbf{u}_t)$;
5. calcule, o tensor de rotações infinitesimais $\mathbf{\Omega}$ e o vetor rotação ω ;
6. calcule a dilatação cúbica para o tensor linear de Cauchy ε_V ;
7. escreva o tensor deviatórico $\mathbf{E}^D = \mathbf{E} - \frac{\varepsilon_V}{3}\mathbf{I}$;
8. particularize os resultados acima para o ponto P(1,1,1);
9. para $\alpha = 10^{-2}$, determine a componente do deslocamento na posição (2,0,1) (original) na direção $\hat{\mathbf{e}} = 0.6\mathbf{e}_1 + 0.8\mathbf{e}_2$.

Solução:

1. Dado o campo de deslocamentos,

$$\mathbf{u} = [(20X_1^2 X_2)\mathbf{e}_1 + 10(X_2^2 + X_3^2)\mathbf{e}_2 + (X_1 + 3X_3^3)\mathbf{e}_3] \times \alpha (cm)$$

a matriz do gradiente do campo de deslocamentos é dada por (8.5),

$$[\nabla \mathbf{u}_t] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 40X_1 X_2 & 20X_1^2 & 0 \\ 0 & 20X_2 & 20X_3 \\ 1 & 0 & 9X_3^2 \end{bmatrix}$$

Considerando o ponto $P(1, 1, 1)$, tem-se que,

$$[\nabla \mathbf{u}_t] = 10^{-2} \begin{bmatrix} 40 & 20 & 0 \\ 0 & 20 & 20 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

2. O tensor de Green incluindo termos não-lineares é calculado a partir de (8.20). Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^* &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_t + \nabla \mathbf{u}_t^T + \nabla \mathbf{u}_t^T \nabla \mathbf{u}_t) \rightarrow [\mathbf{E}^*] = \frac{1}{2}([\nabla \mathbf{u}_t] + [\nabla \mathbf{u}_t]^T + [\nabla \mathbf{u}_t]^T [\nabla \mathbf{u}_t]) \\ [\mathbf{E}^*] &= \frac{1}{2} \left(\alpha \begin{bmatrix} 40X_1 X_2 & 20X_1^2 & 0 \\ 0 & 20X_2 & 20X_3 \\ 1 & 0 & 9X_3^2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 40X_1 X_2 & 0 & 1 \\ 20X_1^2 & 20X_2 & 0 \\ 0 & 20X_3 & 9X_3^2 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2 \begin{bmatrix} 40X_1 X_2 & 0 & 1 \\ 20X_1^2 & 20X_2 & 0 \\ 0 & 20X_3 & 9X_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40X_1 X_2 & 20X_1^2 & 0 \\ 0 & 20X_2 & 20X_3 \\ 1 & 0 & 9X_3^2 \end{bmatrix} \right) \\ [\mathbf{E}^*] &= \frac{1}{2} \left(\alpha \begin{bmatrix} 80X_1 X_2 & 20X_1^2 & 1 \\ 20X_1^2 & 40X_2 & 20X_3 \\ 1 & 20X_3 & 18X_3^2 \end{bmatrix} + \alpha^2 \begin{bmatrix} 1600X_1^2 X_2^2 + 1 & 800X_1^3 X_2 & 9X_3^2 \\ 800X_1^3 X_2 & 400(X_1^4 + X_2^2) & 400X_2 X_3 \\ 9X_3^2 & 400X_2 X_3 & 400X_3^2 + 81X_3^4 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Particularizando para o ponto $P(1, 1, 1)$

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}^*] &= \frac{1}{2} \left(\alpha \begin{bmatrix} 80 & 20 & 1 \\ 20 & 40 & 20 \\ 1 & 20 & 18 \end{bmatrix} + \alpha^2 \begin{bmatrix} 1601 & 800 & 9 \\ 800 & 800 & 400 \\ 9 & 400 & 481 \end{bmatrix} \right) \\ [\mathbf{E}^*] &= \begin{bmatrix} 0,40 & 0,10 & 0,005 \\ 0,10 & 0,20 & 0,10 \\ 0,005 & 0,10 & 0,09 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,08005 & 0,0400 & 0,00045 \\ 0,04000 & 0,0400 & 0,0200 \\ 0,00045 & 0,0200 & 0,02405 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, para $\alpha = 10^{-2}$ as componentes não-lineares possuem uma ordem de grandeza próxima dos valores lineares, não podendo ser desprezadas. Por exemplo, para o termo E_{11}^* observa-se que,

$$E_{11}^* = 0,40 + 0,08005 = 0,48005 \rightarrow \frac{0,08005}{0,40} \approx 20\%$$

3. Considerando agora $\alpha = 10^{-4}$ e o ponto $P(1, 1, 1)$ vem que,

$$10^{-4} \begin{bmatrix} 40 & 10 & 0,5 \\ 10 & 20 & 10 \\ 0,5 & 20 & 9 \end{bmatrix} + 10^{-8} \begin{bmatrix} 800,5 & 400 & 4,5 \\ 400 & 400 & 200 \\ 4,5 & 200 & 240,5 \end{bmatrix}$$

Neste caso, a parte não-linear pode ser desprezada, pois a sua contribuição não é significativa. Por exemplo, tomando a componente E_{11}^* novamente vem que,

$$E_{11}^* = 40 \times 10^{-4} + 8,005 \times 10^{-6} = 40,008 \times 10^{-4} \rightarrow \frac{8,005 \times 10^{-6}}{40 \times 10^{-4}} \approx 0,2\%$$

4. O tensor de Cauchy para pequenas deformações é dado por (8.31). Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_t + \nabla \mathbf{u}_t^T) \rightarrow [\mathbf{E}] = \frac{1}{2}([\nabla \mathbf{u}_t] + [\nabla \mathbf{u}_t]^T) \\ [\mathbf{E}] &= \frac{1}{2} \left(\alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 20X_1^2 & 0 \\ 0 & 20X_2 & 20X_3 \\ 1 & 0 & 9X_3^2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 0 & 1 \\ 20X_1^2 & 20X_2 & 0 \\ 0 & 20X_3 & 9X_3^2 \end{bmatrix} \right) \\ [\mathbf{E}] &= \alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 10X_1^2 & 0,5 \\ 10X_1^2 & 20X_2 & 10X_3 \\ 0,5 & 10X_3 & 9X_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para o ponto $P(1, 1, 1)$ e $\alpha = 10^{-4}$ verifica-se que,

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 0,004 & 0,001 & 0,00005 \\ 0,001 & 0,002 & 0,001 \\ 0,00005 & 0,001 & 0,0009 \end{bmatrix}$$

5. O tensor de rotações infinitesimais é definido como,

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_t - \nabla \mathbf{u}_t^T) \rightarrow [\mathbf{\Omega}] = \frac{1}{2}([\nabla \mathbf{u}_t] - [\nabla \mathbf{u}_t]^T) \\ [\mathbf{\Omega}] &= \frac{1}{2} \left(\alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 20X_1^2 & 0 \\ 0 & 20X_2 & 20X_3 \\ 1 & 0 & 9X_3^2 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 0 & 1 \\ 20X_1^2 & 20X_2 & 0 \\ 0 & 20X_3 & 9X_3^2 \end{bmatrix} \right) \\ [\mathbf{\Omega}] &= \alpha \begin{bmatrix} 0 & 10X_1^2 & -0,5 \\ -10X_1^2 & 0 & 10X_3 \\ 0,5 & -10X_3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para o ponto $P(1, 1, 1)$ e $\alpha = 10^{-4}$ verifica-se que,

$$[\mathbf{\Omega}] = \begin{bmatrix} 0 & 0,001 & -0,00005 \\ -0,001 & 0 & 0,001 \\ 0,00005 & -0,001 & 0 \end{bmatrix}$$

O vetor de rotação ω é o vetor axial associado ao tensor antissimétrico Ω . Logo,

$$\omega = \Omega_{32}\mathbf{e}_1 + \Omega_{13}\mathbf{e}_2 + \Omega_{21}\mathbf{e}_3 \rightarrow \omega = -10\alpha X_3\mathbf{e}_1 - 0,5\alpha\mathbf{e}_2 - 10\alpha X_1^2\mathbf{e}_3$$

Para o ponto $P(1, 1, 1)$ e $\alpha = 10^{-4}$,

$$\omega = -0,001\mathbf{e}_1 - 0,00005\mathbf{e}_2 - 0,001\mathbf{e}_3$$

6. A dilatação é dada simplesmente pelo traço do tensor de pequenas deformações. Assim,

$$\varepsilon_V = \text{tr } \mathbf{E} = E_{ii} \rightarrow \varepsilon_V = (40X_1X_2 + 20X_2 + 9X_3^2)\alpha$$

Para o ponto $P(1, 1, 1)$ e $\alpha = 10^{-4}$,

$$\varepsilon_V = (40 + 20 + 9) \times 10^{-4} = 0,0069$$

7. O tensor deviatórico é expresso como,

$$\mathbf{E}^D = \mathbf{E} - \frac{\varepsilon_V}{3}\mathbf{I} \rightarrow [\mathbf{E}^D] = [\mathbf{E}] - \frac{\varepsilon_V}{3}[\mathbf{I}]$$

Portanto,

$$[\mathbf{E}^D] = \alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 - \frac{\varepsilon_V}{3\alpha} & 10X_1^2 & 0,5 \\ 10X_1^2 & 20X_2 - \frac{\varepsilon_V}{3\alpha} & 10X_3 \\ 0,5 & 10X_3 & 9X_3^2 - \frac{\varepsilon_V}{3\alpha} \end{bmatrix}$$

Tomando o ponto $P(1, 1, 1)$ e $\alpha = 10^{-4}$, tem-se que,

$$[\mathbf{E}^D] = \begin{bmatrix} 0,004 - 0,0023 & 0,001 & 0,00005 \\ 0,001 & 0,002 - 0,0023 & 0,001 \\ 0,00005 & 0,001 & 0,0009 - 0,0023 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{E}^D] = \begin{bmatrix} 0,0017 & 0,001 & 0,00005 \\ 0,001 & -0,0003 & 0,001 \\ 0,00005 & 0,001 & -0,0014 \end{bmatrix}$$

8. A posição deformada do elemento material inicialmente no ponto $P(2, 0, 1)$ para $\alpha = 10^{-2}$ é dada por,

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 + 20\alpha X_1^2 X_2 \\ X_2 + 10\alpha(X_2^2 + X_3^2) \\ X_3 + \alpha(X_1 + 3X_3)^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0,1 \\ 1,05 \end{Bmatrix}$$

Por sua vez, o deslocamento \mathbf{u} associado é o seguinte,

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \Rightarrow \{\mathbf{u}\} = \{0 \quad 0,1 \quad 0,05\}^T$$

O valor do deslocamento d na direção $\hat{\mathbf{e}} = 0,6\mathbf{e}_1 + 0,8\mathbf{e}_2$ é obtido pela projeção de \mathbf{u} ao longo de $\hat{\mathbf{e}}$. Portanto,

$$d = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}} = \{0 \quad 0,1 \quad 0,05\} \cdot \begin{Bmatrix} 0,6 \\ 0,8 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0,08$$

8.12 Exercícios Propostos

1. Dado o seguinte campo de pequenos deslocamentos:

$$\mathbf{u} = [(3x^2 + y)\mathbf{e}_1 + 10(3y + z^2)\mathbf{e}_2 + (2z^2)\mathbf{e}_3] \times 10^{-3} (cm)$$

- a) Determine os tensores de deformação e rotação infinitesimal, bem como o vetor rotação. Particularize para o ponto P(2,1,3).
 b) Se um corpo sofre uma pequena rotação dada pelo vetor

$$\boldsymbol{\omega} = 0.002\mathbf{e}_1 + 0.005\mathbf{e}_2 - 0.002\mathbf{e}_3 (rad)$$

qual é o tensor de rotação infinitesimal $\boldsymbol{\Omega}$ correspondente.

2. Dado o campo de pequenos deslocamentos

$$\mathbf{u} = [(6y + 5z)\mathbf{e}_1 + (-6x + 3z)\mathbf{e}_2 + (-5x - 3y)\mathbf{e}_3] \times 10^{-3} (cm)$$

Mostre que este campo induz somente uma rotação de corpo rígido

- a) Determine o vetor de rotação $\boldsymbol{\omega}$ do corpo,
 b) Calcule o tensor de deformação \mathbf{E} em dilatação cúbica ε_v .
 3. Dado o campo de pequenos deslocamentos

$$\mathbf{u} = [(x^3 + 10)\mathbf{e}_1 + 3yz\mathbf{e}_2 + (z^2 - yx)\mathbf{e}_3] \times 10^{-3} (cm)$$

Pede-se:

- a) a translação de corpo rígido do corpo, tomando a origem como ponto de referência;
 b) o tensor de deformações \mathbf{E} ;
 c) o tensor de rotações infinitesimais $\boldsymbol{\Omega}$;
 d) a dilatação cúbica ε_v e o tensor deviatório $\mathbf{E}^D = \mathbf{E} - \frac{\varepsilon_v}{3}\mathbf{I}$;
 e) particularize os resultados acima para o ponto P(2,1,0).