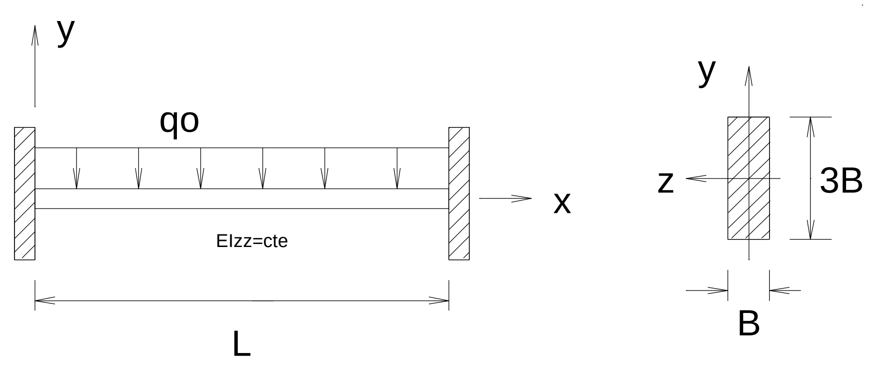
**EM 421 - RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS I**
**3. Prova Data: 06/12/96**
**Profs. Marco Lúcio Bittencourt e Euclides de Mesquita Neto**

**GABARITO**

**1. QUESTÃO (VALOR 6.0)** A viga bi-engastada abaixo mostrada deverá ser construída com um material cuja tensão normal admissível de trabalho é no máximo $\sigma_{xxmax}$=200 N/mm$^2$. O material do qual a viga será construída possue um módulo de elasticidade longitudinal (Young) E=2,0x10$^6$ N/mm$^2$. A viga deve suportar uma carga uniformemente distribuída $q_o$= 10.000 N/m ao longo de um vão L=5m. Outro dado de projeto é que a flecha máxima não deve ultrapassa $v_{max}$=L/1000. Por razões construtivas a seção transversal de viga deverá ser um retângulo com dimensões Bx3B, tal como mostrado. Para esta viga solicita-se: a) as equações e os diagramas de esforço cortante, momento fletor, deflexão angular (rotação) e deflexão linear (flecha), b) as reações de apoio, c) a dimensão mínima B para que os requisitos de tensão e deslocamento máximo sejam respeitados.




**SOLUÇÃO**:

1) Equação do carregamento

$q(x)= - q_o$ (1)

2) Condições de contorno

$v(x=0)=0$ (2)

$\theta_z(x=0)=0$ (3)

$v(x=L)=0$ (4)

$\theta_z(x=L)=0$ (5)

3) Integração da equação diferencial

$EI_{zz}d^4v/dx^4= -q_o$ (6)

integrando com relação a ‘x’

$E\ I_{zz}d^3v/dx^3= V_y(x)= -q_o\ x +C_1$ (7)

$EI_{zz}d^2v/dx^2=M_z(x)=$
$-q_o\ x^2/2 +C_1\ x + C_2$ (8)

$EI_{zz}dv/dx=\theta_z(x)=$
$-q_o\ x^3/6 +C_1\ x^2/2 + C_2\ x +C_3$ (9)

$EI_{zz}v(x)=$
$-q_o\ x^4/24 +C_1\ x^3/6 + C_2\ x^2/2$
$+C_3\ x + C_4$ (10)

4) Determinação das constantes de integração.

de (2) em (10)

$E\ I_{zz}\ v(0)= -q_o\ (0)^4/24 +C_1\ (0)^3/6 + C_2\ (0)^2/2 +C_3\ (0) + C_4 =0$

logo:

$C_4=0$ (11)

de (3) em (9)

$EI_{zz}dv/dx=\theta_z(0)=-q_o\,(0)^3/6 + C_1\,(0)^2/2 + C_2\,(0) + C_3 = 0$

logo:

$C_3 = 0$ (12)

de (4), (11,12) em (10)

$EI_{zz}v(L) = -q_o\,(L)^4/24 + C_1\,(L)^3/6 + C_2\,(L)^2/2 + (0)\,(L) + (0) = 0$

ainda,

$-q_o\,L^4/24 + C_1\,L^3/6 + C_2\,L^2/2 = 0$ (13)

de (5) e (11, 12) em (9)

$EI_{zz}dv/dx=\theta_z(L) = -q_o\,(L)^3/6 + C_1\,(L)^2/2 + C_2\,(L) = 0,$

ainda,

$-q_o\,L^3/6 + C_1\,L^2/2 + C_2\,L = 0$ (14)

As equações (13) e (14) devem ser resolvidas simultaneamente para as constantes $C_1$ e $C_2$. A solução formece:

$C_1 = q_o\,L/2$ (15)

$C_2 = -\,q_o\,L^2/12$ (16)

5) Equações finais, valores e gráficos.

## 5.1 Equações finais

de (15) e (16) em (7) a (10):

$V_y(x) = -q_o\,x + q_o\,L/2$ (17)

$M_z(x) = -q_o\,x^2/2 + q_o\,L\,x/2 - q_o\,L^2/12$ (18)

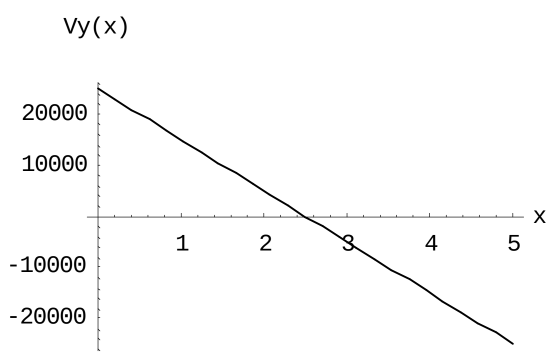
$E\,I_{zz}\,\theta_z(x) = -q_o\,x^3/6 + q_o\,L\,x^2/4 - q_o\,L^2\,x/12$ (19)

$E\,Izz\,v(x) = -q_o\,x^4/24 + q_o\,L\,x^3/12 - q_o\,L^2\,x^2/24$ (20)

## 5.2 Valores e gráficos

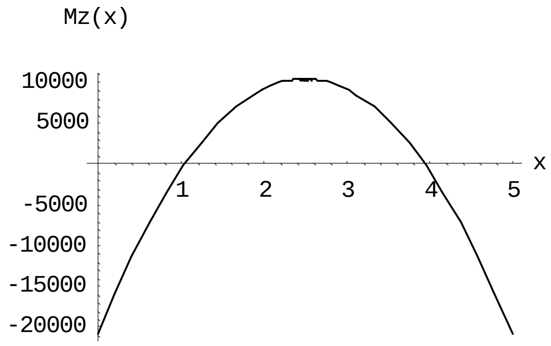
Esforço Cortante $V_y(x)$

$V_y[0.0] = 25000.$
$V_y[0.5] = 20000.$
$V_y[1.0] = 15000.$
$V_y[1.5] = 10000.$
$V_y[2.0] = 5000.$
$V_y[2.5] = 0.0$
$V_y[3.0] = -5000.$
$V_y[3.5] = -10000.$
$V_y[4.0] = -15000.$



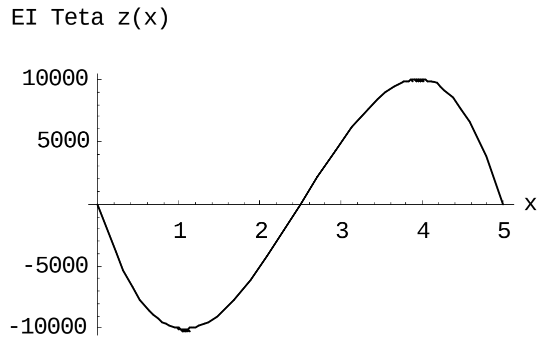
$V_y[4.5]=-20000.$
$V_y[5.0]=-25000.$

Momento Fletor, $M_z(x)$



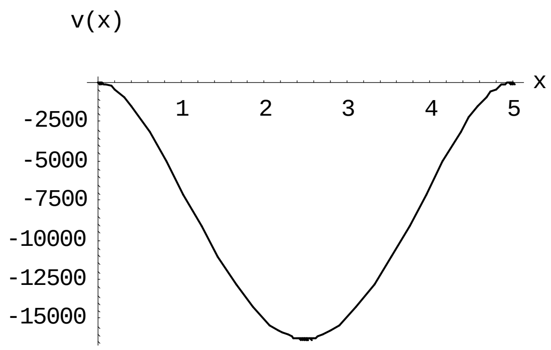

$M_z[0.0]=-20833.3$
$M_z[0.5]=-9583.33$
$M_z[1.0]=-833.333$
$M_z[1.5]= 5416.67$
$M_z[2.0]= 9166.67$
$M_z[2.5]= 10416.7$
$M_z[3.0]= 9166.67$
$M_z[3.5]= 5416.67$
$M_z[4.0]=-833.333$
$M_z[4.5]=-9583.33$
$M_z[5.0]=-20833.3$

Deflexão Angular, $E\, I_{zz}\, \theta_z(x)$




$E\, I_{zz}\, \theta_z[0.0]=0.$
$E\, I_{zz}\, \theta_z[0.5]=-7500.$
$E\, I_{zz}\, \theta_z[1.0]=-10000.$
$E\, I_{zz}\, \theta_z[1.5]=-8750.$
$E\, I_{zz}\, \theta_z[2.0]=-5000.$
$E\, I_{zz}\, \theta_z[2.5]=0.$
$E\, I_{zz}\, \theta_z[3.0]=5000.$
$E\, I_{zz}\, \theta_z[3.5]=8750.$
$E\, I_{zz}\, \theta_z[4.0]=10000.$
$E\, I_{zz}\, \theta_z[4.5]=7500.$
$E\, I_{zz}\, \theta_z[5.0]=0.$

Deflexão linear, $E\, I_{zz}\, v(x)$




$E\, I_{zz}\, v[0.0]= 0.$
$E\, I_{zz}\, v[0.5]=-2109.38$
$E\, I_{zz}\, v[1.0]=-6666.67$
$E\, I_{zz}\, v[1.5]=-11484.4$
$E\, I_{zz}\, v[2.0]=-15000.$
$E\, I_{zz}\, v[2.5]=-16276.$
$E\, I_{zz}\, v[3.0]=-15000.$
$E\, I_{zz}\, v[3.5]=-11484.4$
$E\, I_{zz}\, v[4.0]=-6666.67$
$E\, I_{zz}\, v[4.5]=-2109.38$
$E\, I_{zz}\, v[5.0]= 0.$

## 5.3 Reações nos apoios.

Uma análise dos diagramas acima e dos correspondentes valores indica que as reações de apoio procuradas são:

Forças: $R_{ay}= R_{by} =$ + 25 000 N

Momentos $M_{az}= M_{bz} =$ - 20 833,3 N.m

## 6) Dimensionamento

### 6.1) Dimensionamento à tensão $\sigma_{xx}$.

Módulo de resistência da seção $W_z = I_{zz} / y_{max}$

$I_{zz} = B\,H^3/12 = B\,(3B)^3/12 = 9\,B^4/4$

$y_{max} = 3B/2$

logo

$$W_z= (9\,B^4/4)/(\,3B/2) = 3\,B^3/2 \qquad (21)$$

Dimensinamento da seção: (considerando o módulo do momento fletor máximo)

$\sigma_{zzmax} = M_{zmax} / W_z = M_{zmax} / (3\,B^3/2)$

logo:

$3\,B^3/2 = M_{zmax} /\sigma_{zzmax}$ ;

$B= \{ (2\,M_{zmax})/(3\,\sigma_{zzmax}) \}^{1/3} = \{ (2x20\,833,4 \text{ N.m})/(3x200 \text{ N/mm}^2) \}^{1/3}$

$B= \{ (2x20\,833,4 \text{ N.m } [10\text{^}3\text{mm/m}])/(3x200 \text{ N/mm}^2) \}^{1/3}$

$B= \{ (2x20\,833,4 \text{ x } 10\text{^}3 \text{ N.mm})/(3x200 \text{ N/mm}^2) \}^{1/3}$

Largura associada à tensão.

**B= 41.1 mm**

### 6.2) Dimensionamento à flecha máxima.

O diagrama mostra que a flecha máxima ocorre quanto x=L/2. Assim vamos determinar algebricamente o valor da deflexão linear máxima.

$E\,Izz\,v(x)= -q_o\,x^4/24 + q_o\,L\,x^3/12 - q_o\,L^2\,x^2/24$

$E\,Izz\,v(x=L/2)= -q_o\,(L/2)^4/24 + q_o\,L\,(L/2)^3/12 - q_o\,L^2\,(L/2)^2/24$

$E\,Izz\,v(x=L/2)= -q_o\,(L/2)^4/24 + q_o\,L\,(L/2)^3/12 - q_o\,L^2\,(L/2)^2/24$

$E\,Izz\,v(x=L/2)= -\,q_o\,L^4/384$,

ou ainda

$v_{max} = v(x=L/2)= -\,q_o\,L^4/(\,E\,Izz\,384)$

Igualando o módulo deste resultado com a expressão para a flecha máxima admissível, temos:

$L/1000 = q_o\,L^4/(\,E\,Izz\,384)$

$1 = 1000\,q_o\,L^3/(\,E\,Izz\,384)$

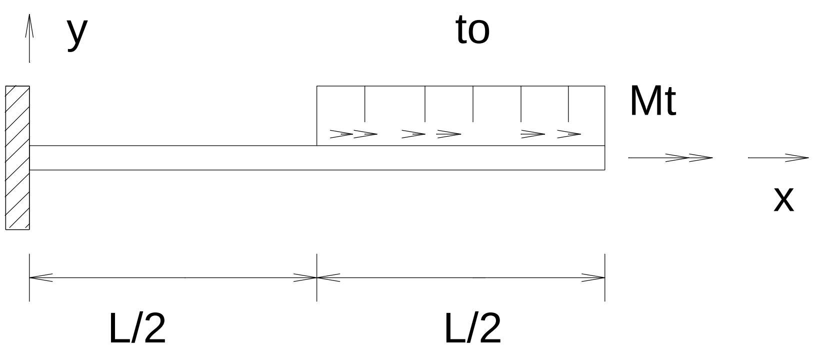
$Izz = 1000\,q_o\,L^3/(\,E\,384)$

Substituindo a expressão para Izz em função de B, já determinada em 5.1), temos:

$I_{zz} = 9\ B^4/4 = 1000\ q_o L^3/(\ E\ 384)$
$B^4 = 4000\ q_o L^3/(9x384\ E\ )$
$B = [4000\ q_o L^3/(9x384\ E\ )]^{1/4} = [4000\ (10\ N/mm)\ (5000mm)^3/(9x384x2.0x10\text{^}6\ N/mm^2)]^{1/4}$

**B=29.16 mm**

**2. QUESTÃO (VALOR 4.0)** Considere o eixo ilustrado abaixo de seção circular com diâmetro d submetido ao carregamento indicado. Pede-se: a) determinar o diâmetro mínimo d para que o eixo permaneça na fase elástica; b) determinar a equação do ângulo de torção; c) suponha agora que a seção do eixo seja circular vazada com diâmetros interno di e externo de, com di/de = 0,8. Pede-se determinar os diâmetros di e de. d) para esta nova seção, determinar a equação do ângulo de torção. e) baseado nos resultados obtidos, determinar qual eixo é mais pesado e qual sofre a maior rotação.
Dados: L = 2m  Mt = 1000 N.m, $\tau_{max}$ = 50 MPa G = 80 GPa  to = 1600 N.m/m




1) Equação do carregamento

$$t(x) = t_0 \langle x-L/2\rangle^0$$

2) Condições de contorno

$$x = 0 \rightarrow \theta = 0$$
$$x = L \rightarrow M_x = M_t$$

3) Integração da equação diferencial do ângulo de torção

$$GI_p\, d^2\theta / dx^2 = -t(x) = -t_0 \langle x-L/2\rangle^0$$

3.1) primeira integração $\rightarrow$ momento torçor:

$$M_x = GI_p\, d\theta / dx = -t_0 \langle x-L/2\rangle^1 + C_1$$

3.2) segunda integração:

$$GI_p\, \theta = -(t_0/2) \langle x-L/2\rangle^2 + C_1 x + C_2$$

4) Determinação das constantes de integração.

$$x=0 : GI_p\, \theta(x = 0) = 0 + C_1 .0 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$x=L : M_x\,(x = L) = -t_0 <L-L/2>^1 + C_1 = M_t$

$C_1 = M_t + t_0 \,.\, L/2$

5) Equações Finais

5.1) Momento Torçor

$M_x(x) = -t_0 <x-L/2>^1 + M_t + t_0 \,.\, L/2$

$M_x(x) = -1600 <x-1>^1 +2600$

5.2) Ângulo de torção

$\theta(x) =1/ GI_p [-800< x-1>^2 + 2600x ]$

6) Diagrama

i) $0 < x < L/2 : M_x\,(x) = 2600$

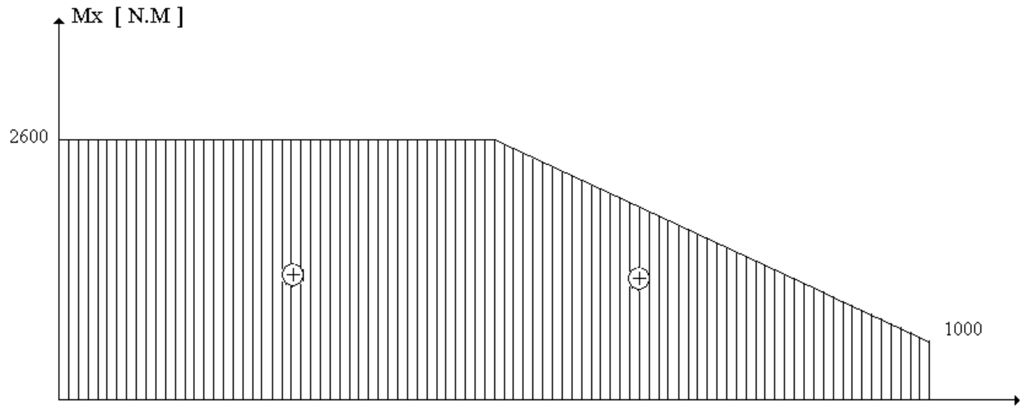
$M_x\,( x \rightarrow 0^+ ) = 2600$ N.m

$M_x\,( x \rightarrow 1^- ) = 2600$ N.m

ii) $L/2 < x < L\ : M_x\,(x) = -1600\,(x-1) +2600 = -1600.x + 4200$

$M_x\,(x \rightarrow 1^+) = 2600$ N.m

$M_x\,(x \rightarrow 2^-) = 1000$ N.m




7) Secção mais solicitada

$x = 0^+ \rightarrow M_x = 2600$ N.m

8) Dimensionamento

8.1) Secção circular

$\tau = ( M_x / I_p ).\,( d / 2 ) = [ M_x / ( \pi\, d^4 / 32 ) ].\,( d / 2 ) = 16\, M_x / \pi\, d^3 = \tau_{máx}$

$d = (16\, M_x / \pi\, \tau_{máx})^{1/3} = ( 16 \times 2600 / \pi \times 50 \times 10^6 ) \rightarrow d = 6{,}42$ cm

8.2) Secção circular vazada

$d_1$ = diâmetro interno
$d_2$ = diâmetro externo

$\tau = ( M_x / I_p ). ( d_2 / 2 ) = M_x / N_x = \tau_{máx}$

$W_x = ( M_x / \tau_{máx} ) = 2600/ 50 \times 10^6 = 5,2 \times 10^{-5}\ m^3$
$W_x = (I_p / (d_2 / 2)) = [( \pi / 32 )( d_2^4 - d_1^4 )] / (d_2 / 2) = ( \pi / 16 ). ( d_2^4 - d_1^4 ) / d_2$
$d_1 / d_2 = 0,8 \rightarrow N_x = ( \pi / 16 ) . [ d_2^4 - ( 0,8d_2^4) ] / d_2 = 5,2 \times 10^{-5}$
$d_2 = [(16/\pi ). (5,2 \times 10^{-5}/ 0,5904 )]^{1/2} = 7,65$ cm
$d_1 = 6,12$ cm

9) Equação do ângulo de torção

9.1) Secção circular

$I_p = \pi .d^4 / 32 = (\pi / 32) . ( 6,42\times10^{-2})^4 = 1,67 \times 10^{-6}\ m^4$
tem-se que $G\ I_p = 133422,78$
$\theta_c ( x ) = 7,49 \times 10^{-6} [ -800.<x-1>^2 + 2600.x ]$

9.2)Secção circular vazada

$I_p = ( \pi / 32 ) ( d_2^4 - d_1^4 ) = ( \pi / 32 ) [ ( 7,65\times10^{-2} )^4 - ( 6,12\times10^{-2})^4] = 1,98 \times 10^{-6}\ m^4$
tem-se que $G\,I_p = 158811,51$
$\theta_v ( x ) = 6,30 \times 10^{-6} [ -800.<x-1>^2 + 2600.x ]$

10) Relação entre os pesos

- massas : $m_c = \rho . V_c$ — $V_c$ = volume da secção circular
  $m_v = \rho . V_v$ — $V_v$ = volume da secção vazada

$$\frac{m_c}{m_v} = \frac{V_c}{V_v} = \frac{L . ( \pi / 4 ) . d^2}{L . ( \pi / 4 ) . (d_2^2 - d_1^2)} = \frac{d^2}{(d_2^2 - d_1^2)} = \frac{6,42^2}{7,65^2 - 6,12^2} = 1,95$$

11) Relação entre as rotações

$$\frac{\theta_c}{\theta_v} = \frac{7,49 \times 10^{-6}}{6,30 \times 10^{-6}} = 1,19$$