EM 421 - RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS I
GABARITO
2. Prova Data: 05/11/96
Profs. MarcoLúcio e Euclides

GABARITO

1. QUESTÃO (Valor 3,5): Deseja-se determinar o estado de tensão em um determinado ponto, leia-se, determinar as componentes do tensor de tensões no ponto em questão. Através de considerações teóricas e experimentais foi possível a determinação direta de uma das componentes do tensor de tensões, σ_{12}=40 N/mm^2. Também foi possível a determinação das componentes de dois vetores $t_a=\{70*\sqrt{2}, 60*\sqrt{2}, 20*\sqrt{2}\}^T$ e $t_b=\{110/\sqrt{3}, 190/\sqrt{3}, -10/\sqrt{3}\}^T$, que representam as tensões que atuam em planos que passam pelo ponto pesquisado e cujas normai são dadas respectivamente por $n_a=\{1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\}^T$ e $n_b=\{1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\}^T$, ver figuras abaixo. De posse destas informações solicita-se: a) a determinação das componentes do tensor de tensões no sistema coordenado cartesiano x_1, x_2, x_3, bem como um esboço (figura) do estado de tensões em questão e também os módulos dos vetores - resultante, normal e tangencial - que atuam em cada face cuja normal é paralela aos eixos cartesianos, b) as componentes do vetor tensão t_c que atua em um plano cuja normal é dada por $n_c=\{0, 1/2, \sqrt{3}/2\}^T$. Para esta orientação ($n_c$) especifique o valor das componentes normal t_{cn} e tangencial t_{ct}.

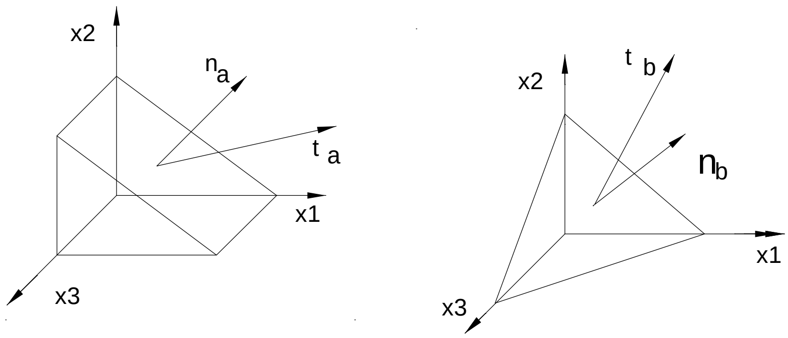

Figura 1.1: Esboço dos planos em que as tensões são conhecidas.

Solução

1) Determinação das componentes do tensor de tensões.

Utilizando-se a fórmula de Cauchy é possível escrever expressões relacionando a componentes do tensor de tensões σ_{ij} com o vetor tensão t_i que atua em uma face cuna normal é descrita pelas componentes n_j.

$$\sigma_{ij}\ n_j = t_i \qquad (1.1)$$

Aplicando-se esta equação inicialmente para o plano determinado pela normal n_a :

$$\sigma_{11}\ n_{a1} + \sigma_{12}\ n_{a2} + \sigma_{13}\ n_{a3} = t_{a1} \qquad (1.2a)$$
$$\sigma_{21}\ n_{a1} + \sigma_{22}\ n_{a2} + \sigma_{23}\ n_{a3} = t_{a2} \qquad (1.2b)$$
$$\sigma_{31}\ n_{a1} + \sigma_{32}\ n_{a2} + \sigma_{33}\ n_{a3} = t_{a3} \qquad (1.2c)$$

Aplicando-se esta equação para o plano determinado pela normal n_b :

$$\sigma_{11}\ n_{b1} + \sigma_{12}\ n_{b2} + \sigma_{13}\ n_{b3} = t_{b1} \qquad (1.3a)$$
$$\sigma_{21}\ n_{b1} + \sigma_{22}\ n_{b2} + \sigma_{23}\ n_{b3} = t_{b2} \qquad (1.3b)$$
$$\sigma_{31}\ n_{b1} + \sigma_{32}\ n_{b2} + \sigma_{33}\ n_{b3} = t_{b3} \qquad (1.3c)$$

Substituindo-se os valores numéricos fornecidos para a componente σ_{12}= 40, e para as equações (1.2)
$n_{a1}=1/\sqrt{2}$, $n_{a2}=1/\sqrt{2}$, $n_{a3}=0$, $t_{a1}=70\sqrt{2}$, $t_{a2}=60\sqrt{2}$, $t_{a3}=20\sqrt{2}$

e para as equações (1.3)
$n_{b1}=1/\sqrt{3}$, $n_{b2}=1/\sqrt{3}$, $n_{b3}=1/\sqrt{3}$, $t_{b1}=110/\sqrt{3}$, $t_{b2}=190/\sqrt{3}$, $t_{b3}=-10/\sqrt{3}$

e observando a simetria do tensor de tensões $\sigma ij=\sigma ij$, obtem-se o seguinte sistema algébrico:

$$\sigma_{11}\ 1/\sqrt{2} + 40\ \ 1/\sqrt{2} + \sigma_{13}\ 0 = 70\sqrt{2} \qquad (1.4a)$$
$$40\ \ 1/\sqrt{2} + \sigma_{22}\ 1/\sqrt{2} + \sigma_{23}\ 0 = 60\sqrt{2} \qquad (1.4b)$$
$$\sigma_{13}\ 1/\sqrt{2} + \sigma_{23}\ 1/\sqrt{2} + \sigma_{33}\ 0 = 20\sqrt{2} \qquad (1.4c)$$

$$\sigma_{11}\ 1/\sqrt{3} + 40\ \ 1/\sqrt{3} + \sigma_{13}\ 1/\sqrt{3} = 110/\sqrt{3} \qquad (1.5a)$$
$$40\ \ 1/\sqrt{3} + \sigma_{22}\ 1/\sqrt{3} + \sigma_{23}\ 1/\sqrt{3} = 190/\sqrt{3} \qquad (1.5b)$$
$$\sigma_{13}\ 1/\sqrt{3} + \sigma_{23}\ 1/\sqrt{3} + \sigma_{33}\ 1/\sqrt{3} = -10/\sqrt{3} \qquad (1.5c)$$

Uma análise do sistema acima indica que existem 6 equações e cinco incógnitas σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, σ_{13}, σ_{23}. O sistema tem solução imediata dada por:

$\sigma_{11}=\{100\}$, $\sigma_{22}=\{80\}$, $\sigma_{33}=\{-50\}$, $\sigma_{13}=\{-30\}$, $\sigma_{23}=\{70\}$

A forma do tensor com valores é:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 100 & 40 & -30 \\ 40 & 80 & 70 \\ -30 & 70 & -50 \end{bmatrix}$$

2) Componentes do vetor t_c que atua em um plano cuja normal é dada por

$n_c=\{0, 1/2, \sqrt{3}/2\}^T$

$$\{t_c\} = \sigma_{ij}\, n_{cj} = \begin{bmatrix} 100 & 40 & -30 \\ 40 & 80 & 70 \\ -30 & 70 & -50 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20-15\sqrt{3} \\ 40+35\sqrt{3} \\ 35-25\sqrt{3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.98 \\ 100.62 \\ -8.30 \end{Bmatrix}$$

Módulo do vetor t_c :

$|\underline{t}_c|=101.141$

Determinação do tensor normal t_{cn} e seu módulo $|t_{cn}|$

$\underline{t}_{cn}= (\underline{t}_c.\underline{n}_c)\ \underline{n}_c$

$\{t_{cn}\}= \{ 0; 21.56; 37.34\}^T$

$|t_{cn}| = 43.121$

Determinação do tensor tangencial t_{ct} e seu módulo $|t_{ct}|$

$\underline{t}_{ct}= \underline{t}_c - t_{cn}$

$\{t_{cn}\}= \{ -5.98; 79.06; -45.65\}^T$

$|t_{cn}| = 91.48$

GABARITO

2. QUESTÃO (Valor 4,0): No sistema de coordenadas inicial (descrição material) um contínuo foi submetido a deformações descrito pelo seguinte campo de deslocamentos: $\underline{u}(\underline{X})= \alpha\ \{3x^2y\ \underline{e}_1 + xyz^2\ \underline{e}_2 + 4zy\ \underline{e}_3\ \}$. Para este campo pede-se a determinação a) da matriz gradiente $u_{i,j} = \partial u_i/\partial X_j$, b) as componentes E_{ij} do tensor de Green, c) o valor da contante α para que no ponto P de coordenadas P(1,1,1) a parte não-linear da componente E_{12} do tensor de deformações represente somente 1% (1/100) da parte linear. d) Para este valor de α determine, sempre para o ponto P(1,1,1), o tensor de deformações infinitesimais de Cauchy $e_{ij}= 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}\ )$, e) o tensor de rotações infinitesimais $w_{i,j}=1/2(u_{i,j} - u_{j,i}\ )$, e o vetor de rotação Ω_i , f) a dilatação cúbica e_{kk} , g) o tensor deviatórico $e_{ij}^D = e_{ij} - \delta_{ij}\ e_{kk}/3$, h) calcule a dilatação cúbica do tensor deviatórico e_{kk}^D.

Solução:

1) **Determinação da matriz do gradiente do campo de deslocamentos.**
Dado o campo de deslocamentos $\underline{u}(\underline{X})= \alpha\ \{3x^2y\ \underline{e}_1 + xyz^2\ \underline{e}_2 + 4zy\ \underline{e}_3\ \}$, basta calcular as componentes de $u_{i,j} = \partial u_i/\partial X_j$, onde $u1 = \alpha 3x^2y$, $u2 = \alpha xyz^2$ e $u3 = 4zy$. Matricialmente,

$$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} 6xy & 3x^2 & 0 \\ yz^2 & xz^2 & 2xyz \\ 0 & 4z & 4y \end{bmatrix}$$

2) **Determinação das componentes do tensor de Green.**

As componentes do tensor de Green são dadas por,

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}\right)$$

Logo, tem-se que,

$$E_{11} = \frac{1}{2}\left(u_{1,1} + u_{1,1} + u_{1,1}u_{1,1} + u_{2,1}u_{2,1} + u_{3,1}u_{3,1}\right) = \frac{1}{2}\left(6xy + \quad 6xy + \quad {}^{2}(6xy)^2 + \quad {}^{2}(yz)^2 \right)$$

$$E_{12} = E_{21} = \frac{1}{2}\left(u_{2,1} + u_{1,2} + u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2} + u_{3,1}u_{3,2}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(yz^2 + 3x^2\right) + \quad {}^{2}\left(18x^3y + xyz^4\right)\right)$$

$$E_{13} = E_{31} = \frac{1}{2}\left(u_{2,3} + u_{3,2} + u_{1,1}u_{1,3} + u_{2,1}u_{2,3} + u_{3,1}u_{3,3}\right) = \frac{1}{2} \quad {}^{2}\left(6xy + 2xy^2z^3\right)$$

$$E_{22} = \frac{1}{2}\left(u_{2,2} + u_{2,2} + u_{1,2}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2} + u_{3,2}u_{3,2}\right) = \frac{1}{2}\left(2xz^2 + \quad {}^{2}\left(9x^4 + x^2z^4 + y^2z^2\right)\right)$$

$$E_{23} = E_{32} = \frac{1}{2}\left(u_{2,3} + u_{3,2} + u_{1,2}u_{1,3} + u_{2,2}u_{2,3} + u_{3,2}u_{3,3}\right) = \frac{1}{2}\left((2xyz + yz) + \quad {}^{2}\left(2x^2yz^3 + 16yz\right)\right)$$

$$E_{33} = \frac{1}{2}\left(u_{3,3} + u_{3,3} + u_{1,3}u_{1,3} + u_{2,3}u_{2,3} + u_{3,3}u_{3,3}\right) = \frac{1}{2}\left(8y + \quad {}^{2}\left(4x^2y^2z^2 + 16y^2\right)\right)$$

Matricialmente,

$$[\mathbf{E}^*] = \frac{1}{2}\left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T + (\nabla\mathbf{u})^T\nabla\mathbf{u}\right]$$

$$[\mathbf{E}^*] = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 6xy & 3x^2 & 0 \\ yz^2 & xz^2 & 2xyz \\ 0 & 4z & 4y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6xy & yz^2 & 0 \\ 3x^2 & xz^2 & 4z \\ 0 & 2xyz & 4y \end{bmatrix} + {}^{2}\begin{bmatrix} 6xy & yz^2 & 0 \\ 3x^2 & xz^2 & 4z \\ 0 & 2xyz & 4y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6xy & 3x^2 & 0 \\ yz^2 & xz^2 & 2xyz \\ 0 & 4z & 4y \end{bmatrix} \right)$$

$$[\mathbf{E}^*] = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 12xy & 3x^2 + yz^2 & 0 \\ 3x^2 + yz^2 & 2xz^2 & 2xyz + 4z \\ 0 & 2xyz + 4z & 8y \end{bmatrix} + {}^{2}\begin{bmatrix} 36x^2y^2 + y^2z^4 & 18x^3y + xyz^4 & 2xy^2z^3 \\ 18x^3y + xyz^4 & 9x^4 + x^2z^4 + 16z^2 & 2x^2yz^3 + 16yz \\ 2xy^2z^3 & 2x^2yz^3 + 16yz & 4x^2y^2z^2 + 16y^2 \end{bmatrix} \right)$$

3) Valor da constante para que no ponto P(1,1,1) a parte não-linear de E_{12} represente 1% da parte linear.

$$E_{12} = \frac{1}{2}\left[\left(3x^2 + yz^2\right) + {}^{2}\left(36x^2y^2 + y^2z^4\right)\right] \rightarrow E_{12} = 2 \quad + 9.5 \quad {}^{2} \rightarrow \frac{9.5 \quad {}^{2}}{2} = 0.01 \rightarrow \quad = 0{,}0021$$

4) Tensor de deformação infinitesimal

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \rightarrow [\mathbf{E}] = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T\right) \rightarrow [\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 6xy & \frac{1}{2}(3x^2 + yz^2) & 0 \\ \frac{1}{2}(3x^2 + yz^2) & xz^2 & xyz + 2z \\ 0 & xyz + 2z & 4y \end{bmatrix}$$

No ponto P(1,1,1)

$$[\mathbf{E}] = 0.0021\begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

5) Tensor de rotações infinitesimais

$$w_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right) \rightarrow [\mathbf{W}] = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}^T\right) \rightarrow [\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(3x^2 - yz^2) & 0 \\ \frac{1}{2}(-3x^2 + yz^2) & 0 & xyz - 2z \\ 0 & -xyz + 2z & 0 \end{bmatrix}$$

No ponto P(1,1,1)

$$[\mathbf{W}] = 0.0021\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6) Vetor rotação.

$$\Omega_i = -\frac{1}{2} e_{ijk} w_{jk} \rightarrow \begin{cases} \Omega_1 = -\frac{1}{2}\left(e_{123}w_{23} + e_{132}w_{32}\right) = -\frac{1}{2}\left[(+1)(-1) + (-1)(+1)\right] = +1 \\ \Omega_2 = -\frac{1}{2}\left(e_{312}w_{31} + e_{213}w_{13}\right) = -\frac{1}{2}\left[(+1)(0) + (-1)(0)\right] = 0 \\ \Omega_3 = -\frac{1}{2}\left(e_{312}w_{12} + e_{321}w_{21}\right) = -\frac{1}{2}\left[(+1)(+1) + (-1)(-1)\right] = -1 \end{cases} \rightarrow \{\Omega\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

7) Dilatação cúbica.

$$_{kk} = {}_{11} + {}_{22} + {}_{33} = (6+1+4) = 11 \quad = 0{,}0231$$

8) Tensor deviatórico.

$$^{D}_{ij} = {}_{ij} - {}_{ij}\frac{_{kk}}{3} \rightarrow \left[\mathbf{E}^D\right] = \begin{bmatrix} 6-11/3 & 2 & 0 \\ 2 & 1-11/3 & 3 \\ 0 & 3 & 4-11/3 \end{bmatrix}$$

9) Dilatação cúbica do tensor deviatórico.

$$^{D}_{kk} = {}^{D}_{11} + {}^{D}_{22} + {}^{D}_{33} = \left((6-11/3) + (1-11/3) + (4-11/3)\right) = 0$$

GABARITO

3. QUESTÃO (Valor 2,5): Determine, utilizando o método das seções os diagramas de esforço cortante $V_y(x)$ e momento fletor $M_z(x)$ para a viga abaixo mostrada. Escreva as expressões algebricamente e substituia os valores somente para a solução das mesmas. Dados: L=3m, q_o= 300N/m.

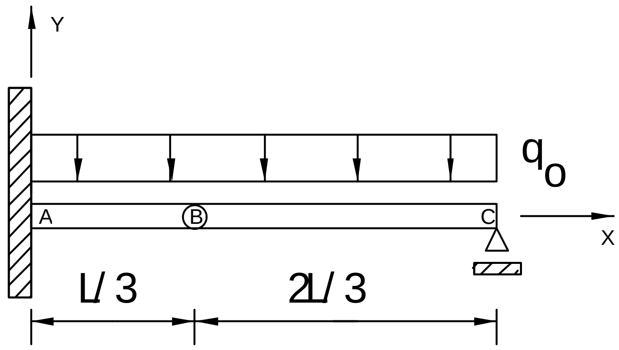

Figura 3.1: Viga com rótula no ponto B.

Solução:

1) Diagrama de corpo livre (DCL)

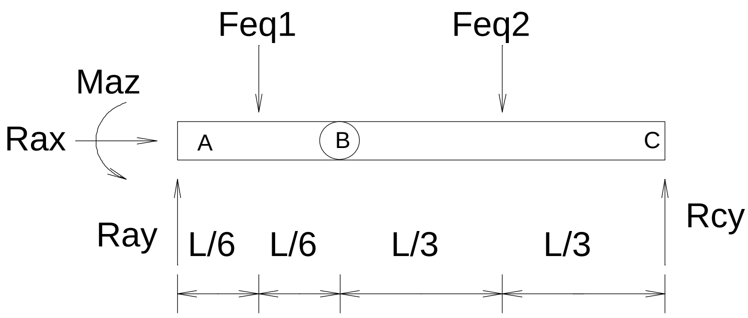

Figura 3.2: Diagrama de corpo livre (DCL)

Dados: q_o=300 N/m, L=3m

$F_{eq1}=q_o\, L/3 = 300(N)\ 3(m)/3=300(N)$ $\qquad$ $F_{eq2}=2\, q_o\, L/3 =2\ 300(N)\ 3(m)/3=600(N)$

2) Sistema de equações de equilíbrio

$\Sigma\, F_x=0 \qquad +R_{ax}=0 \qquad (1)$

$\Sigma\, M_{za}=0 \qquad +M_{az} - F_{eq1}\, L/6 - F_{eq2}\, 2\, L/3 + R_{cy}\, L = 0 \qquad (2)$

$+M_{az} - (qo\, L/3)\, L/6 - (2\, qo\, L/3)\, 2\, L/3 + R_{cy}\, L = 0$

$+M_{az} - qo\, L^2/18 - 4\, qo\, L^2/9 + R_{cy}\, L = 0 \qquad (2a)$

$\Sigma M_{zb}=0$ (considerandotodo o corpo)

$+M_{az} - R_{ay} L/3 + F_{eq1} L/6 - F_{eq2} L/3 + R_{cy} L/2 =0$ (3)

$+M_{az} - - R_{ay} L/3 + (q_o L/3) L/6 - (2 qo L/3) L/3 + R_{cy} L/2 =0$

$+M_{az} - - R_{ay} L/3 + q_o L^2/18 - 2 qo L^2/9 + R_{cy} L/2 =0$ (3a)

$\Sigma M_{zb}=0$ (considerandosomente aparte à direita da rótula)

$- F_{eq2} L/3 + R_{cy} 2L/3 =0$ (4)

$- (2q_o L/3) L/3 + R_{cy} 2L/3$

$- 2 q_o L^2/9 + R_{cy} 2L/3 = 0$ (4a)

O sistema algébricoque descreve oequilíbrio docorpo rígido emquestão é dado pelas equações (1), (2a), (3a) e (4a). Asolução, tal como fornecidapelo MATHEMATICA, se econtra abaixo.

Rax={0}
Ray={600.}
Rcy={300.}
Maz={450.}

3) Aplicação dométodo das seções.

Uma vez que não existe descontinuidade nocarregamento, basta uma única seção para descrevertodo o comportamento doesforço cortante $V_y(x)$ e momento fletor $M_z(x)$.

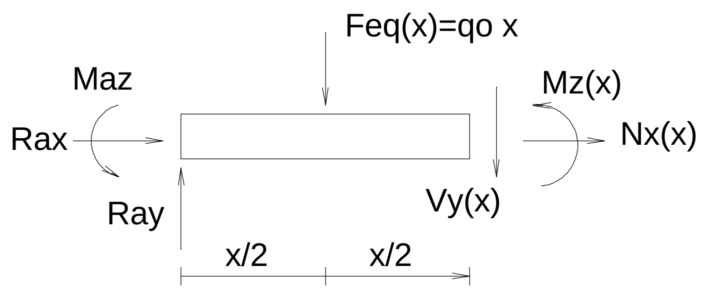

Figura 3.3: Diagrama deequilíbriopara a seção (AC).

Equações:

a) Força Normal

$+R_{ax} + N_x(x) =0$

$N_x(x) = 0$ (5)

b) Esforço Cortante

$+ R_{ay} - F_{eq}(x) - V_y(x) = 0$

$V_y(x) = +R_{ay} - q_o x$ (6a)

$V_y(x) = + 600 - 300 x$ (6b)

c) Momento Fletor

$+M_{az} - R_{ay}\, x + q_o\, x^2/2 + M_z(x) = 0$

$M_z(x) = -M_{az} + R_{ay}\, x - q_o\, x^2/2$ (7a)

$M_z(x) = -450 + 600\, x - 150\, x^2$ (7b)

Valores e Gráficos.

Esforço Cortante

Vy[0] ={600.}
Vy[0.5]={450.}
Vy[1.0]={300.}
Vy[1.5]={150.}
Vy[2.0]={0.}
Vy[2.5]={-150.}
Vy[3.0]={-300.}

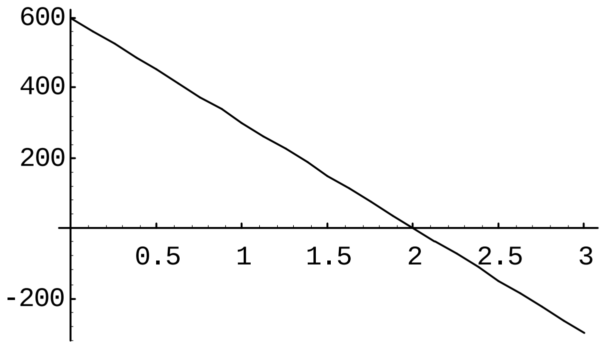

Figura 3.4: Diagrama de Esforço Cortante

Momento Fletor
Mz[0] ={-450.}
Mz[0.5]={-187.5}
Mz[1.0]={0.}
Mz[1.5]={112.5}
Mz[2.0]={150.}
Mz[2.5]={112.5}
Mz[3.0]={0.}

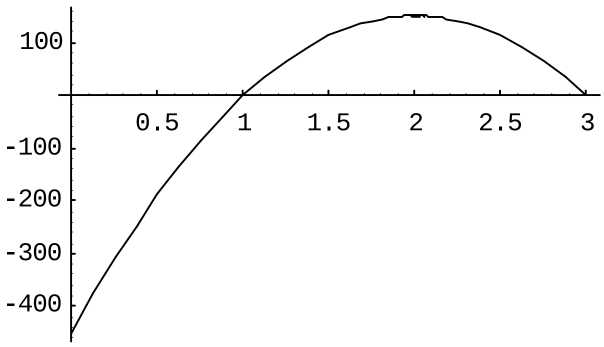

Figura 3.5: Diagrama de Momento Fletor