EM 421 Resistênciados Materiais I
Gabaritoda Prova I

1. Questão (Valor 4,0). Considere o elemento estrutural mostrado na figura 1 abaixo e submetida aos torques concentrados e distribuídos indicados. Pede-se: a) determinar a reação de apoio no engastamento; b) empregando o método das seções, determinar as expressões do momento torçor em cada trecho de viga necessário. Até este ponto trabalhar algebricamente. Substituindo os valores indicados abaixo, pede-se: c) traçar o diagrama de momento torçor; d) determinar o ponto onde o momento torçor se anula. (Dados: L=2m, to=100N.m/m, T1=200N.m, T2=50N.m).

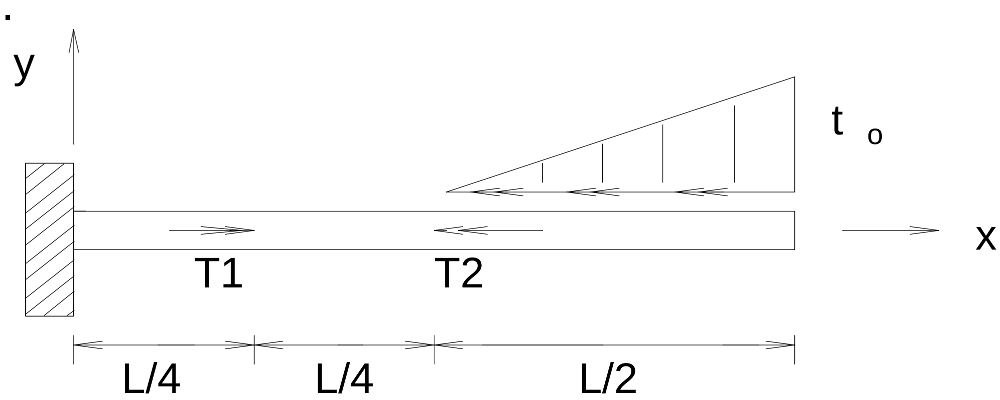
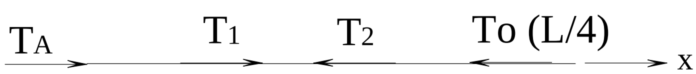


Figura 1.

á)Cálculodas Reações

. intensidade do torquedistribuído:Tx= -2to(x - L/2)/L

. DCL: Diagrama deCorpo Livre



. condição deequilíbrio:

1) $\Sigma M_x=0$: $T_A + T_1 - T_2 - t_0 \,.\, (L/4) = 0$

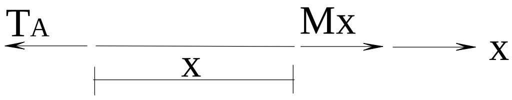
$T_A = T_2 - T_1 + t_0 \,.\, (L/4) = 50 - 200 + 100.(2/4)$

$T_A = -100$ N.m

b) Método das seções

b.1) corte no trecho: $0 < x < L/4$

. DCL: Diagrama deCorpo Livre



. equilíbrioda secção:

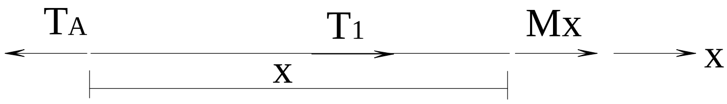
$$\Sigma M_x = 0 : -T_A + M_x = 0 \rightarrow M_x = T_A \rightarrow M_x = 100$$

. valores nos extremos do intervalo :

$X \rightarrow 0^+$: $M_x = +100$ N. m
$X \rightarrow L/4^-$: $M_x = +100$ N. m

b.2) corte no trecho $L/4 < x < L/2$

. DCL: Diagrama deCorpo Livre



. equilíbrioda secção:

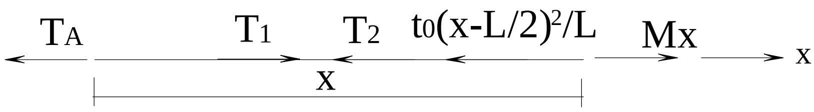
$$\Sigma M_x = 0 : -T_A + T_1 + M_x = 0 \rightarrow M_x = T_A - T_1$$
$$M_x = 100 - 200 = -100$$

. extremos do intervalo :

$X \rightarrow L/4^+$: $M_x = -100$ N. m
$X \rightarrow L/2^-$: $M_x = -100$ N. m

b.3) corte no trecho $L/2 < x < L$

. DCL: Diagrama deCorpo Livre



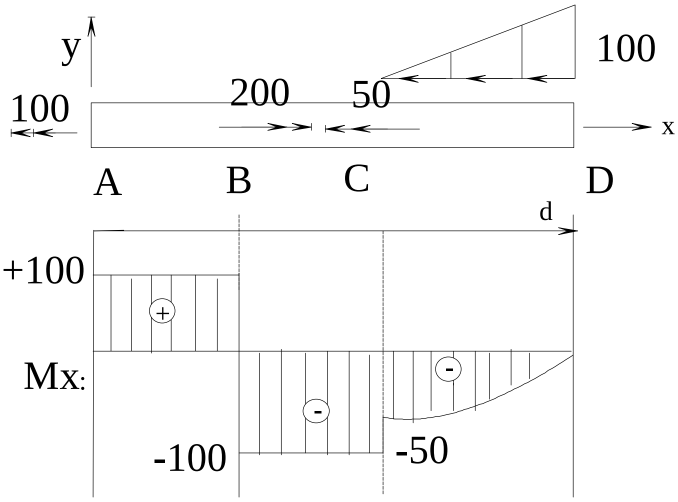
. equilíbrioda secção

$$\Sigma M_x = 0 : -T_A + T_1 - T_2 - \frac{t_0}{L/2} \cdot \frac{(x-L/2)^2}{2} + M_x = 0$$
$$M_x = T_A - T_1 + T_2 + \frac{t_0}{L} \cdot (x-L/2)^2$$
$$M_x = 100 - 200 + 50 + 100\,(x-1)^2$$
$$M_x = -50 + 50\,(x-1)^2$$

. extremos do intervalo :

$X \rightarrow L/2^+$: $M_x = -50$ N. m
$X \rightarrow L^-$: $M_x = -50 + 50\,(2-1)^2 = 0$

c)diagrama



d) determinação de d

$$x = d \rightarrow Mx = 0 :$$
$$-50 + 50 \,.\, (d - 1)^2 = 0 \rightarrow 50 \,.\, (d - 1)^2 = 50 \rightarrow (d - 1)^2 = 1 \rightarrow d = 2 \text{ m}$$

2. Questão (Valor 6,0). A viga mostrada na figura 2, abaixo, está em balanço na extremidade x=0 e simplesmente apoiada na extremidade x=L. Existem dois apoios simples nos pontos B e C. No ponto D existe uma rótula. Na extremidade A estão aplicados uma força concentrada F_{ay} e um momento M_{az}. Para esta viga, utilizando-se as equações diferenciais de equilíbrio, pede-se: a) a equação do carregamento q(x), b) as condições de contorno e restrição, c) as equações que possibilitam a determinação das constantes de integração. d)as expressões das reações de apoio. Até esta etapa proceda algebricamente. Na sequência substitua os valores numéricos e determine: e) as equações finais e valores representativos do esforço cortante $V_y(x)$ e do momento fletor $M_z(x)$ bem como os respectivos diagramas. (Dados: L=4m, Fay=250N, Maz=500N.m, qo=1500N/m)

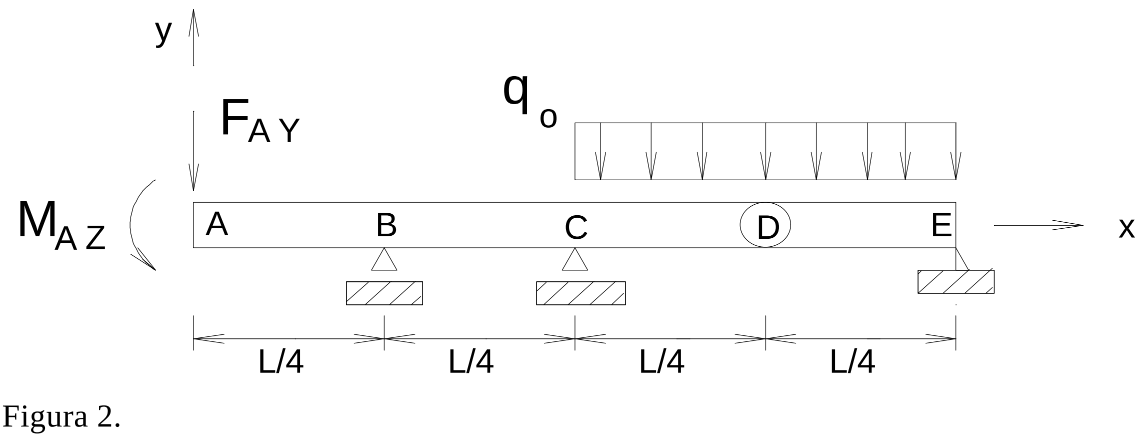


Figura 2.

Solução:

1) Equação docarregamento.

$q(x) = +R_{by}<x-L/4>^{-1} + R_{cy}<x-L/2>^{-1} - q_o<x-L/2>^0$ (1)

2) Condições decontorno

em x=0

$V_y(x=0) = -F_{ay}$ (2)

$M_z(x=0) = -M_{az}$ (3)

em x=L

$M_z(x=L) = 0$ (4)

3) Equações derestrição

em x=3L/4

$M_z(x=3L/4) = 0$ (5)

4) Integraçãoda equaçãodiferencial deequilíbrio

$d^2M_z(x)/dx^2 = q(x) = +R_{by}<x-L/4>^{-1} + R_{cy}<x-L/2>^{-1} - q_o<x-L/2>^0$ (6)

integrandouma vez emrelação a x

$dM_z(x)/dx = V_y(x) = +R_{by}<x-L/4>^0 + R_{cy}<x-L/2>^0 - q_o<x-L/2>^1 + C_1$ (7)

integrando maisuma vez emrelação a x

$M_z(x) = +R_{by}<x-L/4>^1 + R_{cy}<x-L/2>^1 - q_o<x-L/2>^2/2 + C_1x + C_2$ (8)

5) Determinaçãodas constantes deintegração

valores algébricos

(2) -> (7)

$V_y(x=0) = +R_{by}<0-L/4>^0 + R_{cy}<0-L/2>^0 - q_o<0-L/2>^1 + C_1 = -F_{ay}$

logo:

$+R_{by}(0) + R_{cy}(0) - q_o(0) + C_1 = -F_{ay}$ -> (9)

(3) -> (8)

$M_z(x=0) = +R_{by}<0-L/4>^1 + R_{cy}<0-L/2>^1 - q_o<0-L/2>^2/2 + C_1 0 + C_2 = -M_{az}$

logo:

$+R_{by}(0) + R_{cy}(0) - q_o(0)/2 + C_1 0 + C_2 = -M_{az}$ (10)

(4) em (7)

$M_z(x=L) = +R_{by}<L-L/4>^1 + R_{cy}<L-L/2>^1 - q_o<L-L/2>^2/2 + C_1 L + C_2 = 0$

logo

$+R_{by}(L-L/4)^1 + R_{cy}(L-L/2)^1 - q_o(L-L/2)^2/2 + C_1L + C_2 = 0$ (11)

da equação derestrição (5) em (8)

$M_z(x=3L/4) = +R_{by}<3L/4-L/4>^1 + R_{cy}<3L/4-L/2>^1 - q_o<3L/4-L/2>^2/2 + C_1 3L/4 + C_2 = 0$

logo

$+R_{by}(3L/4-L/4)^1 + R_{cy}(3L/4-L/2)^1 - q_o(3L/4-L/2)^2/2 + C_1 3L/4 + C_2 = 0$ (12)

O sistema algébrico a ser resolvido para determinação das constantes de integração e das reações de apoio é constituído pelas equações (9), (10),(11) e (12). A solução deste sistema, tal como fornecida pelo MATHEMATICA esta indicada abaixo. No final do presente texto existe uma listagem do arquivo ebeam07.ma utilizado para resolver este problema.

Solução algébrica.

Rby = 2*Fay + (4*Maz)/L - (L*qo)/4, (13)
Rcy = -Fay - (4*Maz)/L + (5*L*qo)/8, (14)
C1 = -Fay, (15)
C2 = -Maz (16)

Solução numérica
(L=4m, q_o=1500 N/m, F_{ay}=250 N, M_{az}=500 N.m)

Rby = -500., (13a)
Rcy = 3000., (14a)
C1 = -250., (15a)
C2 = -500. (16a)

6) Equações finais.

Esforço Cortante, V_y(x)

Expressões algébricas

```
Vy[x_]:= C1                                          /; 0<=x<=L/4
Vy[x_]:= C1+Rby (x-L/4)^0                            /; L/4<x<=L/2
Vy[x_]:= C1+Rby (x-L/4)^0+Rcy (x-L/2)^0-qo (x-L/2)^1 /; L/2<x<=L
```

Expressões numéricas.

eps= 0.00001

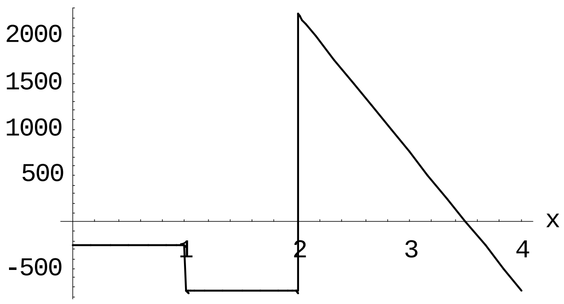
```
Vy[x_]:= -250                                                 /; 0<=x<=L/4
Vy[x_]:= -250+-500 (x-L/4)^0                                  /; L/4<x<=L/2
Vy[x_]:= -250+-500 (x-L/4)^0+3000 (x-L/2)^0-1500 (x-L/2)^1   /; L/2<x<=L
```

Valores

Vy[0]	={-250.}
Vy[1]	={-250.}
Vy[1+eps]	={-750.}
Vy[2]	={-750.}
Vy[2+eps]	={2249.98}≈2250
Vy[2.5]	={1500.}
Vy[3]	={750.}
Vy[3.5]	={0.}
Vy[4]	={-750.}

Gráficos

Vy[x]



Momento Fletor, $M_z(x)$

Expressões algébricas

Mz[x_]:= C1*x + C2 /; 0<=x<=L/4
Mz[x_]:= C1*x + C2+Rby (x-L/4)^1 /; L/4<x<=L/2
Mz[x_]:= C1*x + C2+Rby (x-L/4)^1+Rcy (x-L/2)^1-
qo (x-L/2)^2/2 /; L/2<x<=L

Expressões numéricas.

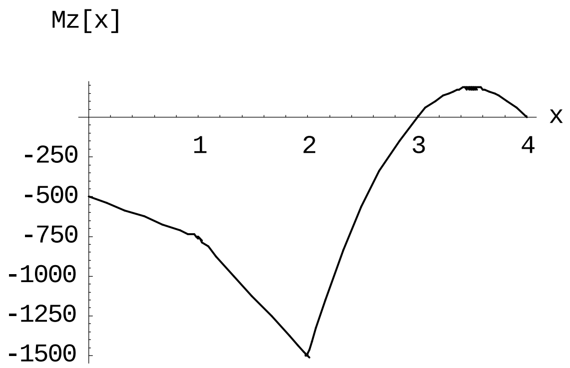
eps= 0.00001

Mz[x_]:= -250*x + -500 /; 0<=x<=L/4
Mz[x_]:= -250*x + -500+-500 (x-L/4)^1 /; L/4<x<=L/2
Mz[x_]:= -250*x + -500+-500 (x-L/4)^1+3000 (x-L/2)^1-
1500 (x-L/2)^2/2 /; L/2<x<=L

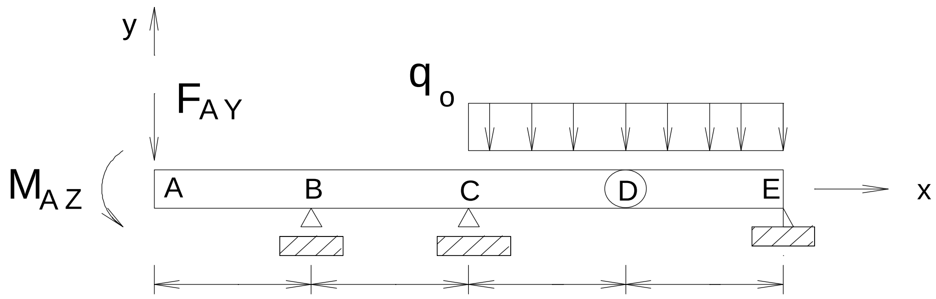
Valores

Mz[0] ={-500.}
Mz[1] ={-750.}
Mz[2] ={-1500.}
Mz[2.5] ={-562.5}
Mz[3] ={0.}
Mz[3.5] ={187.5}
Mz[4] ={0.}

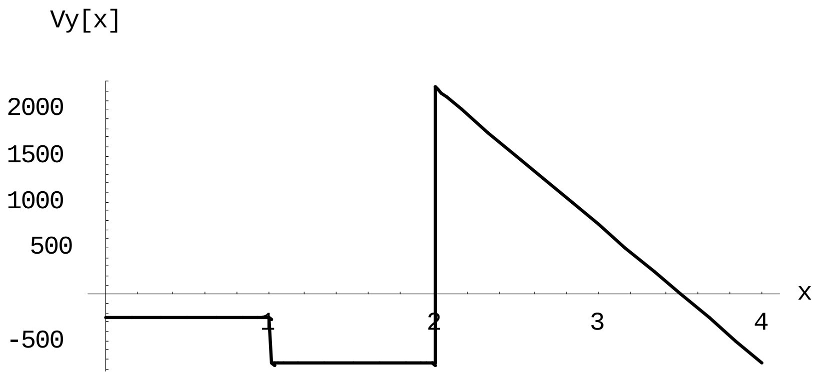
Gráficos



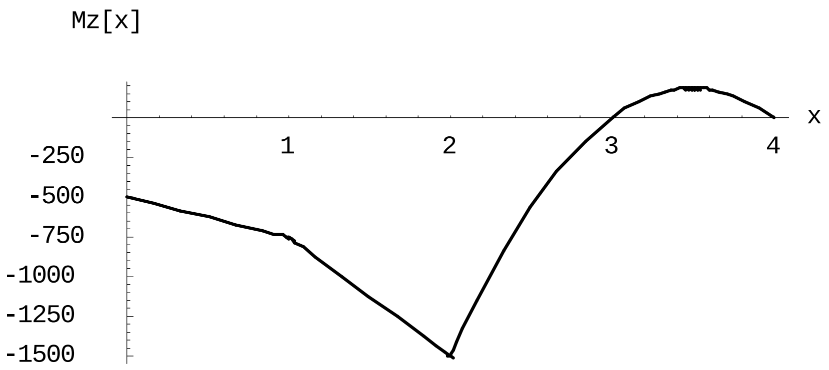
Resumo



y
F$_{AY}$
q$_o$
M$_{AZ}$
A
B
C
D
E
x



Vy[x]
2000
1500
1000
500
-500
1
2
3
4
x



Mz[x]
-250
-500
-750
-1000
-1250
-1500
1
2
3
4
x