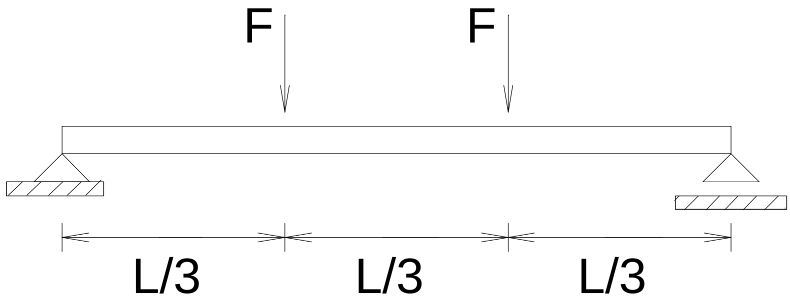
EM 421 - RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS I
Exame Data: 10/12/96
Profs. Marco Lúcio Bittencourt e Euclides de Mesquita Neto

GABARITO

1. **QUESTÃO (VALOR 6.0)** A viga abaixo mostrada deverá ser construída com um material cuja tensão normal admissível de trabalho é no máximo σ_{xxmax}=200 N/mm^2. O material do qual a viga será construída possui um módulo de elasticidade longitudinal (Young) E=2,0x10^6 N/mm^2. A viga deve suportar duas cargas concentradas F= 10.000 N ao longo de um vão L=6m. Por razões construtivas a seção transversal de viga deverá ser um retângulo com dimensões Bx2B. Para esta viga solicita-se: a) as equações de esforço cortante, momento fletor, deflexão angular (rotação) e deflexão linear (flecha), b) os diagramas da cortante e do momento fletor; c) as reações de apoio; d) a dimensão mínima B para que o requisito de tensão seja respeitado; e) a dimensão mínima B para que no ponto x=L/2 a flecha não ultrapasse o valor L/600.



SOLUÇÃO:

a) Equação do carregamento

$$q(x) = -F\left\langle x-\frac{L}{3}\right\rangle^{-1} - F\left\langle x-\frac{2}{3}.L\right\rangle^{-1}$$

b) Condições de contorno

$v(x=0)=0 \quad M_z(x=0)=0$

$v(x=L)=0 \quad M_z(x=L)=0$

c) Integração da equação diferencial

$$EI_z d^4v/dx^4 = q(x) = -F\left\langle x-\frac{L}{3}\right\rangle^{-1} - F\left\langle x-\frac{2}{3}L\right\rangle^{-1}$$

c.1) Primeira integração: cortante

$$V_y = EI_z\, d^3v/dx^3 = -F\left\langle x-\frac{L}{3}\right\rangle^{0} - F\left\langle x-\frac{2}{3}L\right\rangle^{0} + C_1$$

c.2) Segunda integração: momento fletor

$$M_z = EI_z\, d^2v/dx^2 = -F\left\langle x-\frac{L}{3}\right\rangle^{1} - F\left\langle x-\frac{2}{3}L\right\rangle^{1} + C_1 x + C_2$$

c.3) Terceira integração: rotação

$$E I_z dv/dx = -\frac{F}{2}\left\langle x-\frac{L}{3}\right\rangle^{2} - \frac{F}{2}\left\langle x-\frac{2}{3}L\right\rangle^{2} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

c.4) Quarta integração: deslocamento

$$E I_z v = -\frac{F}{6}\left\langle x-\frac{L}{3}\right\rangle^{3} - \frac{F}{6}\left\langle x-\frac{2}{3}L\right\rangle^{3} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

d) Determinação das constantes de integração.

- $x = 0 : E\,I_z v(0) = -\frac{F}{6}(0) + \frac{F}{6}(0) + C_1\,(0) + C_2\,(0) + C_3\,(0) + C_4 = 0$

logo: $C_4 = 0$

- $x = 0 : M_z\,(x = 0) = -F.0 - F.0 + C_1.0 + C_2$

logo:

$C_2 = 0$

- $x = L : M_z\,(x = L) = -F\left(L - \frac{L}{3}\right) - F\left(L - \frac{2L}{3}\right) + C_1\,L + C_2 = 0$

$-F\,\frac{2}{3}L - F\,\frac{1}{3}L + C_1\,L = 0$

logo:

$C_1 = F = 10000$

- $x = L : EI_zV(x = 0) = -\frac{F}{6}\left(L - \frac{L}{3}\right)^3 - \frac{F}{6}\left(L - \frac{2}{3}L\right)^3 + C_1\,\frac{L^3}{6} + C_3L = 0$

$-\frac{F}{6}\left(\frac{2L}{3}\right)^3 - \frac{F}{6}\left(\frac{L}{3}\right)^3 + F\,\frac{L^3}{6} + C_3\,L = 0$

$-\frac{F}{6}\,L^3\,\frac{8}{27} - \frac{F\,L^3}{6}\,\frac{1}{27} + F\,\frac{L^3}{6} + C_3\,L = 0$

$C_3 = \frac{F\,L^2}{6}\left(\frac{8}{27} + \frac{1}{27} - 1\right) = \frac{FL^2}{6}\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{2}{3}\,\frac{F.L^2}{6} = -\frac{F\,L^2}{9}$

$C_3 = -\frac{F\,L^2}{9} = -10000\,\frac{36}{9} = -40000$

e) Equações finais.

e.1) Constante:

$V_y(x) = -F<x - \frac{L}{3}>^0 - F<x - \frac{2}{3}.L>^0 + F$

$V_y(x) = -10000<x - 2>^0 - 10000<x - 4>^0 + 10000$

e.2) Momento Fletor:

$M_z\,(x) = -F<x - \frac{L}{3}>^1 - F<x - \frac{2}{3}L>^1 + F\,x$

$M_z\,(x) = -10000<x - 2>^1 - 10000<x - 4>^1 + 10000\,x$

e.3)Rotação:

$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI_z}\left[-\frac{F}{2}<x - \frac{L}{3}>^2 - \frac{F}{2}<x - \frac{2}{3}L>^2 + F\frac{x^2}{2} - \frac{F}{9}L^2\right]$

$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI_z}\left[-5000<x - 2>^2 - 5000<x - 4>^2 + 5000\,x^2 - 40000\right]$

e.4)Deslocamento:

$V = \frac{1}{EI_z}\left[-\frac{F}{6}<x - \frac{L}{3}>^3 - \frac{F}{6}<x - \frac{2}{3}L>^3 + \frac{F}{6}x^3 - \frac{F\,L^2}{9}\,x\right]$

$V = \frac{1}{EI_z}\left[-\frac{5000}{3}<x - 2>^3 - \frac{5000}{3}<x - 4>^3 + \frac{5000}{3}x^3 - 40000\,x\right]$

f)Diagramas:

- $0 < x < L/3 : V_y\,(x) = F : V_y(x \to 0^+) = 10000$ N

$V_y(x \to 2^-) = 10000$ N

$M_z\,(x) = F_x : M_z(x \to 0^+) = 0$

$M_z(x \to 2^-) = 20000$ N . m

- $L/3 < x < 2.L/3 : V_y(x) = -F + F = 0$

  $M_z(x) = -F(x - L/3) + F.x = +F.L/3 : M_z(x \to 2^+) = 20000$ N.m

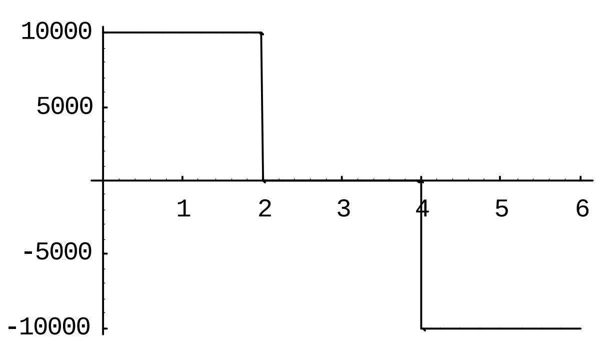
  $M_z(x \to 4^-) = 20000$ N.m

- $2L/3 < x < L : V_y(x) = -F - F + F = -F : V_y(x \to 4^+) = -10000$ N

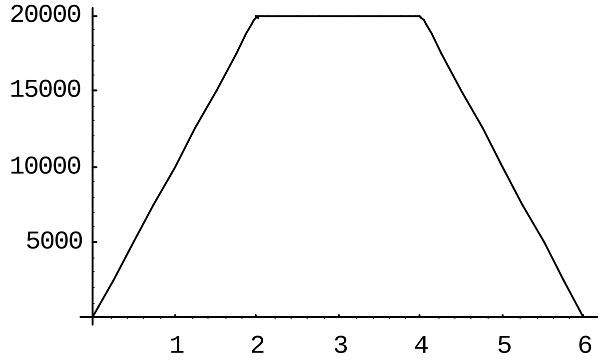
  $V_y(x \to 6^-) = -10000$ N

$$M_z(x) = -F(x - L/3) - F(x - 2L/3) + F x = -F x + F L = M_z(x \to 4^+) = 20000 \text{ N.m}$$

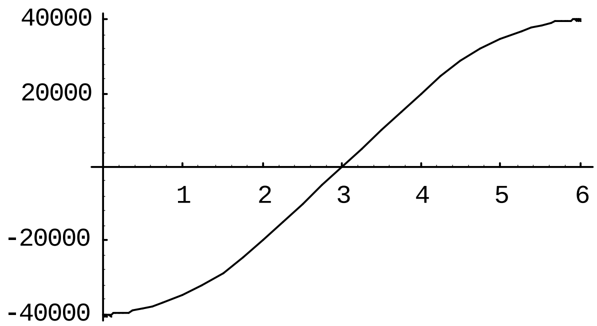
$$M_z(x \to 6^-) = 0$$



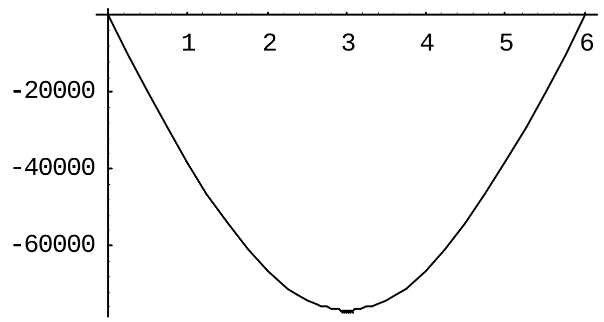
Cortante



Momento Fletor



Rotação



Deslocamento

g) Reações de apoio:

$R_{A\,y} = V_y(x = 0) = +10000$ N

$R_{D\,y} = V_y(x = L) = -10000$ N

h) Dimensionamento :

h.1) Secção + solicitada:

$x = 2^- : M_z = 20000$ N.m

$V_y = 10000$ N

h.2) Tensão máxima:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z}\, y = \frac{M_z}{W_z} = \bar{\sigma} \Rightarrow W_z = \frac{20000}{200.10^6} = 10^{-4} \ \text{m}^3$$

$$W_z = \frac{I_z}{y} = \frac{b.(2.b)^3/12}{b} = \frac{8.\,b^3}{12} = \frac{2.b^3}{3} = 10^{-4} \Rightarrow b^3 = 1{,}5.10^{-4}$$

$b = 5{,}31 \,.\, 10^{-2}$ m $= 5{,}31$ cm $= 53{,}13$ mm h.3) Flecha máxima:

- $V(x = L/2) = \frac{1}{EI_z}\left[-\frac{F}{6}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3}\right)^3 + \frac{F}{6}\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{F L^2}{9}\frac{L}{2}\right] = \frac{L}{600}$

$$= \frac{1}{EI_z}\left[-\frac{F}{6}\left(\frac{3L - 2L}{6}\right)^3 + \frac{F}{6}\left(\frac{L}{8}\right)^3 - \frac{F L^3}{18}\right] = \frac{L}{600}$$

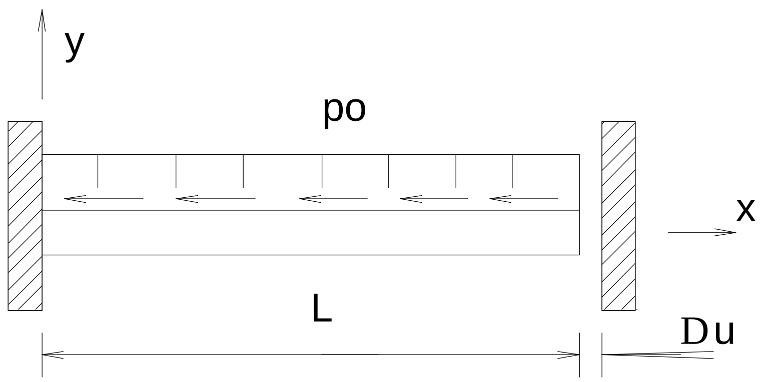
$$= I_z = 100\,\frac{F.L^2}{E}\left(\frac{1104}{51840}\right) = 100.\,\frac{10000.36}{2,0\,.\,10^{+12}}\left(\frac{1104}{51840}\right) = 3,83.10^{-6}\ m^3$$

$$= I_z = \frac{b}{12}(2.b)^3 = \frac{8}{12}b^4 = 3,83\,.10^{-6} \Rightarrow b = 4,89.\ 10^{-2}\ m = 48,96\ mm$$

- $V(x = L/2) = \frac{F.\ L^3}{6.E\ I_z}\left(\frac{1104}{5184}\right) \Rightarrow E.\ I_z\ V\ (x = L/2\ ) = 10000\ .\ 6^3\ .\ \left(\frac{1104}{5184}\right)$

$$E.\ I_z\ V\ (x = L/2\ ) = FL^3\,\frac{23}{648}$$

2. **QUESTÃO (VALOR 4.0)** Considere a barra abaixo mostrada. Ela está engastada em uma extremidade e possue uma folga de valor Du em relação à outra extremidade. A barra também está submetida a um carregamento uniformemente distribuido po. No processo de montagem esta barra será fixada na extremidade direita, sendo alongada do valor Du. Para este sistema pede-se: a) as equações e os diagramas de força normal Nx(x) e deslocamento axial u(x), b) a área A da seção transversal da barra, sabendo-se que a tensão normal máxima que o material suporta é σ_{xxmax}=50 N/mm^2 e seu módulo de Young E=2,0x10^6 N/mm^2. Dados: L = 2m , Du=L/2000, po= 10.000 N/m



SOLUÇÃO:

a) Equação do carregamento

$p(x) = -p_0$

b) Condições de Contorno

$x = 0\ :\ u_1 = 0$

$x = L :\ u_1 = D_u = \Delta u$

c) Integração da equação do deslocamento

$$EA\,\frac{d^2 u}{d X^2} = -\,p(x) = p_0$$

c.1) Primeira Integração: Força Normal

$$EA\,\frac{d u}{d X} = p_0 x + C_1$$

c.2) Segunda Integração : Deslocamento

$$EA\,U = p_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

d) Determinação de C_1 e C_2

- $x = 0 : EA\,u(x = 0) = p_0 \frac{0^2}{2} + C_1\,0 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$
- $x = L : EA\,u(x = L) = p_0 \frac{L}{2} + C_1 L + 0$

$$E.A\,\Delta U = p_0 \frac{L}{2} + C_1 L \rightarrow C_1 = \frac{EA}{L}\Delta U - p_0 \frac{L}{2}$$

e) Equações Finais

e.1) Força Normal

$$EA \frac{du}{dX} = N(x) = p_0 x + \left(\frac{EA}{L}\Delta u - p_0 \frac{L}{2} \right)$$

e.2) Deslocamento

$$u = \frac{1}{EA}\left[p_0 \frac{x^2}{2} + \left(\frac{EA}{L}\Delta u - p_0 \frac{L}{2} \right)x \right]$$

f) Diagramas

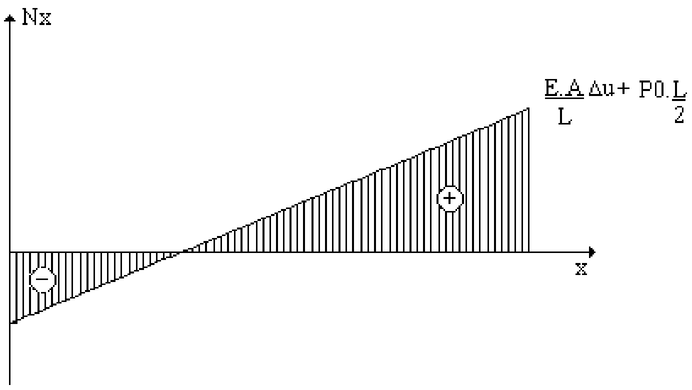
- $x \rightarrow 0^+ : N_x = \frac{EA}{L}\Delta u - p_0 \frac{L}{2}$

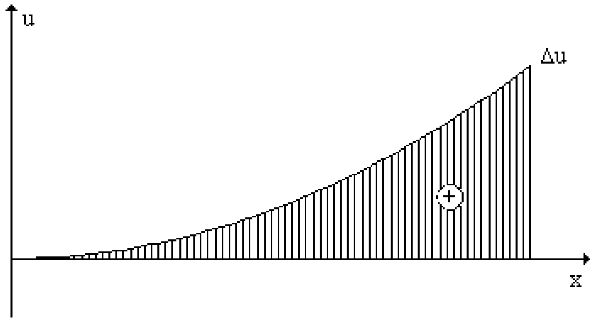
  $u = 0$

- $x \rightarrow L^- : N_x = p_0 L + \frac{EA}{L}\Delta u - p_0 \frac{L}{2}$

  $N_x = p_0 \frac{L}{2} + \frac{EA}{L}\Delta u$

  $u = \frac{1}{EA}\left[p_0 \frac{L^2}{2} + \left(\frac{EA}{L}\Delta u - p_0 \frac{L}{2} \right) L \right] = \Delta u$





g) Secção mais solicitada

$$x = L : N_x = \frac{E.A}{L}\,\Delta u \pm p_0\,\frac{L}{2}$$

h) Dimensionamento

$$\sigma = \frac{N_x}{A} = \bar{\sigma} \rightarrow \qquad A = \frac{\left(\frac{E\,.A}{L}\right)\Delta u \pm \left(p_0\,\frac{L}{2}\right)}{\bar{\sigma}}$$

$$A\,.\,\bar{\sigma} - \left(\frac{E.A}{L}\right).\,\Delta U = -\,p_0\,.\,\frac{L}{2}$$

$$A\,.\left(\bar{\sigma} - E.\,\frac{\Delta U}{L}\right) = -\,p_0\,.\,\frac{L}{2}$$

$$A = \frac{p_0\,.\,\frac{L}{2}}{\left(\bar{\sigma} - E.\,\frac{\Delta U}{L}\right)} = \frac{10000\,.\,(2/2)}{50 \times 10^{-6} - 2.0 \times 10^{-12}\,.(1/200)} = 1{,}05 \times 10^{-5}\ m^2 = 10{,}5\ mm^2$$