

Capítulo 5

Elementos Finitos Isoparamétricos

5.1 Sistemas de Referência Global e Local

Considere o elemento linear, ilustrado na Figura 5.1, com nós i e j , cujas coordenadas são x_i e x_j em relação ao sistema de referência X adotado. Deseja-se encontrar uma função $F(t)$ que transforme um ponto $x_i \leq \bar{x} \leq x_j$ para um ponto $-1 \leq \bar{\xi} \leq 1$, pertencente ao sistema de referência ξ . Como o elemento tomado possui 2 nós, a transformação $F(t)$ é dada pela equação de uma reta, ou seja,

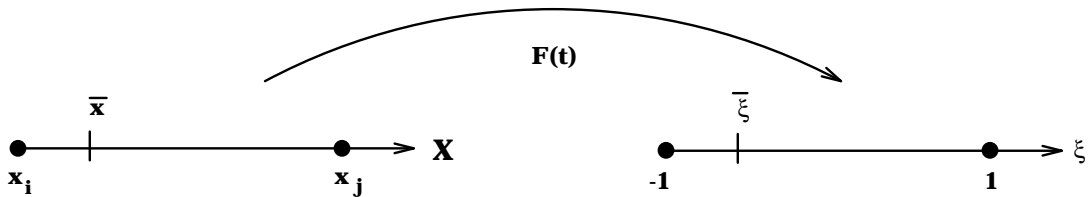


Figura 5.1: Mapeamento entre os sistemas de referência X e ξ .

$$F(t) = \alpha t + \beta \tag{5.1}$$

Aplicando-se a equação (5.1) aos pontos x_i e x_j vem que,

$$\begin{cases} F(x_i) = \alpha x_i + \beta = -1 \\ F(x_j) = \alpha x_j + \beta = 1 \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema de equações anterior obtém-se as constantes α e β . Logo,

$$\alpha = \frac{2}{x_j - x_i} \quad \beta = -\frac{x_j + x_i}{x_j - x_i}$$

e substituindo em (5.1) tem-se que,

$$F(t) = \frac{2}{x_j - x_i} t - \frac{x_j + x_i}{x_j - x_i} \tag{5.2}$$

Por exemplo, tomando-se $x_i = -10$, $x_j = 10$ e $\bar{x} = 5$, verifica-se que,

$$\bar{\xi} = F(\bar{x}) = \frac{2}{10 - (-10)} 5 - \frac{(10 - 10)}{10 - (-10)} = 0,5$$

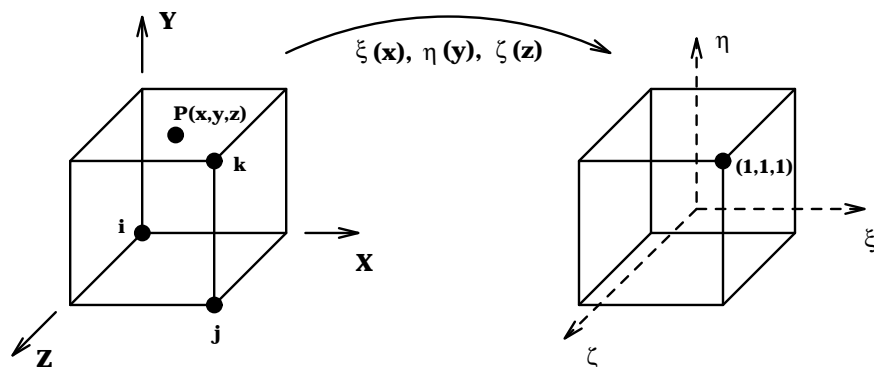


Figura 5.2: Transformação entre os sistemas de referência global e local.

No caso geral de um elemento sólido, tem-se 3 coordenadas cartesianas x, y, z as quais devem ser transformadas para as componentes ξ, η, ζ , respectivamente, como mostrado na Figura 5.2.

O sistema cartesiano xyz é denominado sistema global de referência, enquanto $\xi\eta\zeta$ define o sistema local. A vantagem de se utilizar um sistema local está relacionada à mudança dos limites de integração nas expressões para o cálculo das matrizes de massa e rigidez dos elementos finitos, assim como para os vetores de carregamento. Neste caso, os limites inferior e superior de integração passam para -1 e 1 , respectivamente.

Dado um ponto P de coordenadas (x, y, z) segundo o sistema global, verifica-se que para se obter este ponto no sistema local, basta aplicar a equação (5.2) para cada uma das componentes, ou seja,

$$\xi(x) = \frac{2}{x_j - x_i} t - \frac{x_j + x_i}{x_j - x_i}$$

$$\eta(y) = \frac{2}{y_k - y_j} t - \frac{y_k + y_j}{y_k - y_j}$$

$$\zeta(z) = \frac{2}{z_j - z_i} t - \frac{z_j + z_i}{z_j - z_i}$$

onde (x_i, y_i, z_i) , (x_j, y_j, z_j) e (x_k, y_k, z_k) são as coordenadas dos nós i, j, k , respectivamente, como pode ser visto na Figura 5.2.

No entanto, geralmente, o elemento finito possui uma forma distorcida no sistema global e deseja-se obter uma transformação para um sistema local onde os lados do elemento permaneçam retos, como apresentado na Figura 5.3. Esta transformação está baseada nas funções de forma, discutidas a seguir.

5.2 Funções de Forma

Considere o conjunto de pontos $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_a, \dots, \xi_b, \dots, \xi_n)$ definidos num sistema local de referência. O polinômio de Lagrange de ordem $n - 1$ associado ao ponto ξ_a é dado por,

$$l_a^{(n-1)}(\xi) = \frac{\prod_{b=1(b \neq a)}^n (\xi - \xi_b)}{\prod_{b=1(b \neq a)}^n (\xi_a - \xi_b)} = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{a-1})(\xi - \xi_{a+1}) \dots (\xi - \xi_n)}{(\xi_a - \xi_1)(\xi_a - \xi_2) \dots (\xi_a - \xi_{a-1})(\xi_a - \xi_{a+1}) \dots (\xi_a - \xi_n)} \quad (5.3)$$

Observa-se que o polinômio $l_a(\xi)$ apresenta a seguinte propriedade,

$$\begin{cases} l_a(\xi_a) = 1 & a = b \\ l_a(\xi_b) = 0 & a \neq b \end{cases}$$

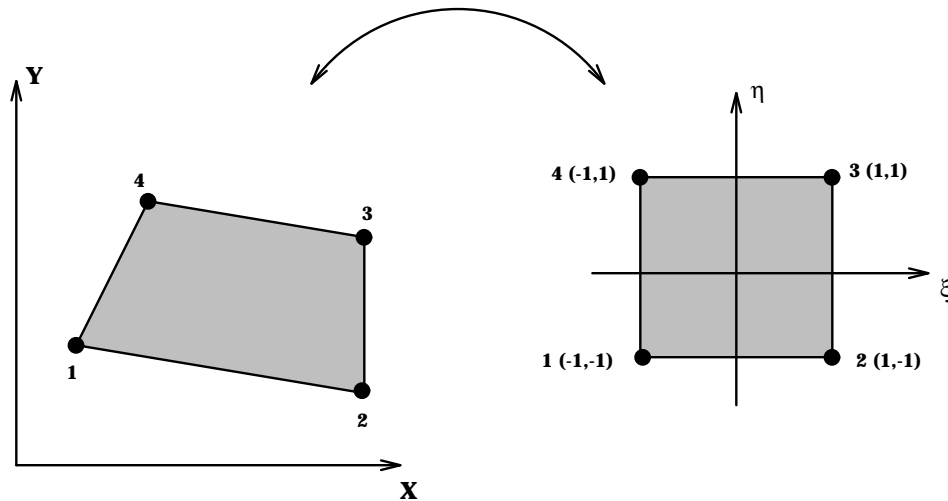


Figura 5.3: Transformação entre os sistemas de referência global e local utilizando funções de forma.

Logo,

$$l_a(\xi_b) = \delta_{ab} \quad (5.4)$$

onde δ_{ab} é tal que,

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se } a = b \\ 0 & \text{se } a \neq b \end{cases}$$

Deve-se associar uma função de forma para cada um dos nós de um elemento finito. Estas funções são tomadas como polinômios de Lagrange, cuja ordem depende do número de nós do elemento considerado. Para um elemento unidimensional com m nós, tem-se m funções de forma de ordens $m - 1$. Logo,

$$N_a^{(m-1)}(\xi) = l_a^{(m-1)}(\xi) \quad a = 1, \dots, m \quad (5.5)$$

Para elementos bidimensionais, basta tomar o produto tensorial dos polinômios de Lagrange. Portanto, para um elemento com m e n nós nas direções ξ e η , tem-se um total de mn funções dadas por,

$$N_a(\xi, \eta) = l_b^{(m-1)}(\xi)l_c^{(n-1)}(\eta) \quad a = 1, \dots, mn \quad (5.6)$$

Analogamente, para o caso tridimensional com m, n, p nós nas direções ξ, η, ζ , definem-se mnp funções da seguinte maneira,

$$N_a(\xi, \eta, \zeta) = l_b^{m-1}(\xi)l_c^{n-1}(\eta)l_d^{p-1}(\zeta) \quad a = 1, \dots, mnp \quad (5.7)$$

Nas expressões anteriores, os índices a, b, c, d são escolhidos de maneira conveniente como será mostrado nas seções seguintes.

5.3 Elementos Unidimensionais

5.3.1 Elemento Linear

Para ilustrar o processo de obtenção das funções de forma considere o elemento linear mostrado na Figura 5.4. Como neste caso, o elemento possui apenas dois nós, as funções são polinômios de primeiro grau, ou seja, equações de retas em ξ . Assim, a partir de (5.3) e (5.5) vem que,

$$N_1^{(1)}(\xi) = l_1^{(1)}(\xi) = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{\xi - 1}{-1 - (-1)} = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$N_2^{(1)}(\xi) = l_2^{(1)}(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\xi + 1}{-1 - (-1)} = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

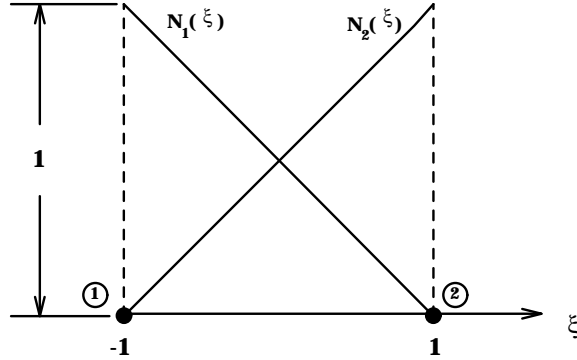


Figura 5.4: Elemento unidimensional linear.

De forma reduzida, tem-se que,

$$N_a^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + \xi_a \xi) \quad a = 1, 2 \quad (5.8)$$

onde $\xi_a = \pm 1$.

5.3.2 Elemento Quadrático

Da mesma forma, determinam-se as funções de forma para o elemento unidimensional quadrático da Figura 5.5. Como são três nós, tem-se três funções de ordem 2 e aplicando-se (5.3) e (5.5) vem que,

$$\begin{aligned} N_1^{(2)}(\xi) &= l_1^{(2)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi) \\ N_2^{(2)}(\xi) &= l_2^{(2)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = \frac{(\xi - 1)(\xi + 1)}{(0 + 1)(0 - 1)} = (1 - \xi^2) \\ N_3^{(2)}(\xi) &= l_3^{(2)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} = \frac{(\xi + 1)(\xi - 0)}{(1 + 1)(1 - 0)} = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi) \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} N_1^{(2)}(\xi) = \frac{1}{2}\xi_a(1 + \xi_a) & a = 1, 3 \\ N_2^{(2)}(\xi) = (1 - \xi^2) & a = 2 \end{cases} \quad (5.9)$$

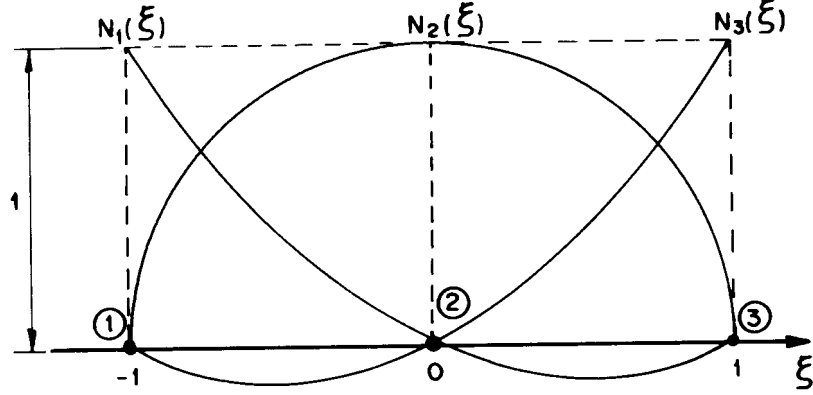


Figura 5.5: Elemento unidimensional quadrático.

5.3.3 Elemento Cúbico

Seguindo o mesmo procedimento, determinam-se as funções de forma para o elemento de terceiro grau, ilustrado na Figura 5.6. Portanto,

$$\begin{aligned} N_1^{(3)}(\xi) &= l_1^{(3)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_4)} = \\ &= \frac{(\xi + 1/3)(\xi - 1/3)(\xi - 1)}{(-1 + 1/3)(-1 - 1/3)(-1 - 1)} = \frac{1}{16}(9\xi^2 - 1)(1 - \xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2^{(3)}(\xi) &= l_2^{(3)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_4)} = \\ &= \frac{(\xi + 1)(\xi - 1/3)(\xi - 1)}{(-1/3 + 1)(-1/3 - 1/3)(-1/3 - 1)} = \frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 - 3\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_3^{(3)}(\xi) &= l_3^{(3)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_4)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_4)} = \\ &= \frac{(\xi + 1)(\xi + 1/3)(\xi - 1)}{(1/3 + 1)(1/3 + 1/3)(1/3 - 1)} = \frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 + 3\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_4^{(3)}(\xi) &= l_4^{(3)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_4 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_2)(\xi_4 - \xi_3)} = \\ &= \frac{(\xi + 1)(\xi + 1/3)(\xi - 1/3)}{(1 + 1)(1 + 1/3)(1 - 1/3)} = \frac{1}{16}(9\xi^2 - 1)(1 + \xi) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} N_a^{(3)}(\xi) = \frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 + 3\xi) & a = 2, 3 \\ N_a^{(3)}(\xi) = \frac{1}{16}(9\xi^2 - 1)(1 + \xi) & a = 1, 4 \end{cases} \quad (5.10)$$

5.3.4 Elemento Quártico

Para o elemento quártico, mostrado na Figura 5.7, as funções de forma são determinadas de maneira análoga aos elementos anteriores. Assim,

$$\begin{aligned} N_1^{(4)}(\xi) &= l_1^{(4)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)(\xi - \xi_5)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_4)(\xi_1 - \xi_5)} = \\ &= \frac{(\xi + 1/2)(\xi - 0)(\xi - 1/2)(\xi - 1)}{(-1 + 1/2)(-1 + 0)(-1 - 1/2)(-1 - 1)} = -\frac{1}{6}\xi(4\xi^2 - 1)(1 - \xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2^{(4)}(\xi) &= l_2^{(4)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)(\xi - \xi_5)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_4)(\xi_2 - \xi_5)} = \\ &= \frac{(\xi + 1)(\xi + 0)(\xi - 1/2)(\xi - 1)}{(-1/2 + 1)(-1/2 - 0)(-1/2 - 1/2)(-1/2 - 1)} = \frac{4}{3}\xi(\xi^2 - 1)(1 - 2\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_3^{(4)}(\xi) &= l_3^{(4)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_4)(\xi - \xi_5)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_4)(\xi_3 - \xi_5)} = \\ &= \frac{(\xi + 1)(\xi + 1/2)(\xi - 1/2)(\xi - 1)}{(0 + 1)(0 + 1/2)(0 - 1/2)(0 - 1)} = (1 - \xi^2)(1 - 4\xi^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_4^{(4)}(\xi) &= l_4^{(4)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_5)}{(\xi_4 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_2)(\xi_4 - \xi_3)(\xi_4 - \xi_5)} = \\ &= \frac{(\xi + 1)(\xi + 1/2)(\xi - 0)(\xi - 1)}{(1/2 + 1)(1/2 + 1/2)(1/2 - 0)(1/2 - 1)} = -\frac{4}{3}\xi(1 - \xi^2)(1 + 2\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_5^{(4)}(\xi) &= l_5^{(4)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}{(\xi_5 - \xi_1)(\xi_5 - \xi_2)(\xi_5 - \xi_3)(\xi_5 - \xi_4)} = \\ &= \frac{(\xi + 1)(\xi + 1/2)(\xi - 0)(\xi - 1/2)}{(1 + 1)(1 + 1/2)(1 - 0)(1 - 1/2)} = \frac{1}{6}\xi(4\xi^2 - 1)(1 + \xi) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} N_a^{(4)}(\xi) = \frac{1}{6}\xi_a\xi(4\xi^2 - 1)(1 + \xi_a\xi) & a = 1, 5 \\ N_a^{(4)}(\xi) = \frac{4}{3}\xi_a\xi(\xi^2 - 1)(1 + 2\xi_a\xi) & a = 2, 4 \\ N_a^{(4)}(\xi) = (1 - \xi^2)(1 - 4\xi^2) & a = 3 \end{cases} \quad (5.11)$$

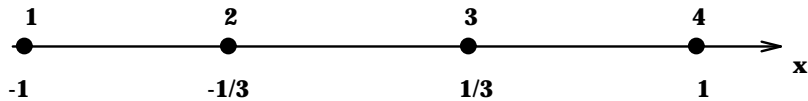


Figura 5.6: Elemento unidimensional cúbico.

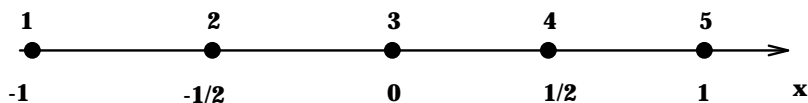


Figura 5.7: Elemento unidimensional quártico.

5.4 Elemento Bidimensional Linear

Considere o elemento quadrangular ilustrado na Figura 5.8. As funções de forma deste elemento são obtidas a partir de (5.6) e dos polinômios dados em (5.8), onde a relação entre os índices a,b,c está apresentada na Tabela 5.1 e pode ser observada na Figura 5.8. Portanto,

$$\begin{aligned}
 N_1^{(1)}(\xi, \eta) &= l_1^{(1)}(\xi)l_1^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\
 N_2^{(1)}(\xi, \eta) &= l_2^{(1)}(\xi)l_1^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\
 N_3^{(1)}(\xi, \eta) &= l_2^{(1)}(\xi)l_2^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\
 N_4^{(1)}(\xi, \eta) &= l_1^{(1)}(\xi)l_2^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)
 \end{aligned}$$

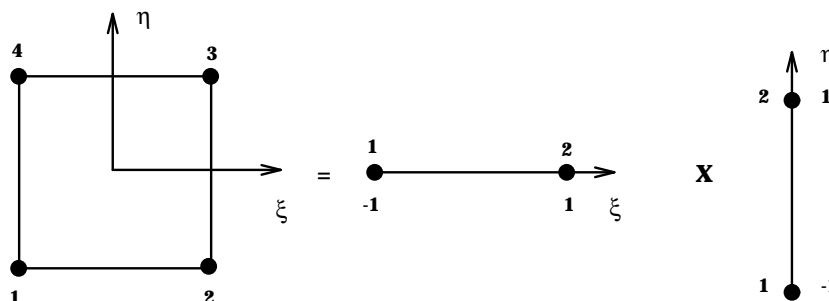


Figura 5.8: Elemento quadrangular linear.

a	1	2	3	4
b	1	2	2	1
c	1	1	2	2

Tabela 5.1: Relação entre os índices a,b,c para o elemento quadrangular linear.

Esta relações podem ser resumidas na seguinte expressão,

$$N_a(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta) \quad a = 1, 2, 3, 4 \tag{5.12}$$

onde $\xi_a = \pm 1$ e $\eta_a = \pm 1$.

Outros elementos planos podem ser obtidos aumentando-se, progressivamente, um nó para cada lado do quadrado, como ilustrado na Figura 5.9. Neste caso, verifica-se a presença de nós interiores,

aumentando-se assim o número de variáveis do elemento. Este conjunto de elementos assim obtidos pertencem à família lagrangeana.

Pode-se evitar a presença destes nós interiores. Define-se, desta forma os elementos finitos da família Serendipity discutidos nos capítulos seguintes.

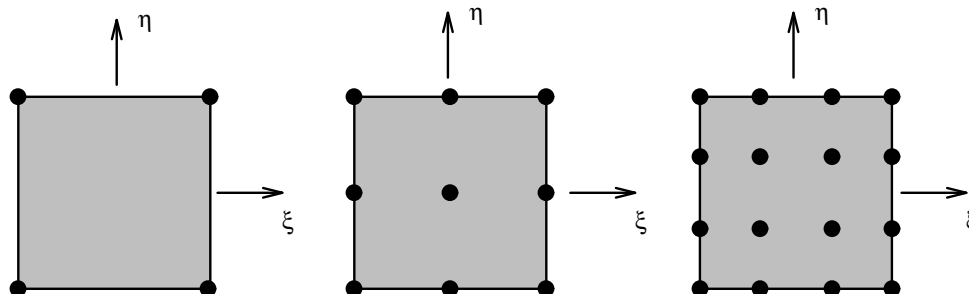


Figura 5.9: Elemento lagrangeanos quadrangulares.

5.5 Elementos Isoparamétricos

Ao se aplicar o MEF na análise de uma estrutura, deve-se interpolar a sua geometria, ou seja, as coordenadas dos pontos, assim como a grandeza a ser calculada, como por exemplo os deslocamentos nodais. Pode-se aplicar as funções de forma para efetuar estas interpolações. Neste caso, as três possibilidades ilustradas na Figura 5.10 pode ser adotadas, ou seja,

- o número de nós usados para definir a forma do elemento é menor que aquele aplicado para a interpolação da grandeza de interesse;
- utiliza-se o mesmo número de nós para interpolar a geometria e a grandeza;
- adota-se um número de nós maior para a interpolação da geometria.

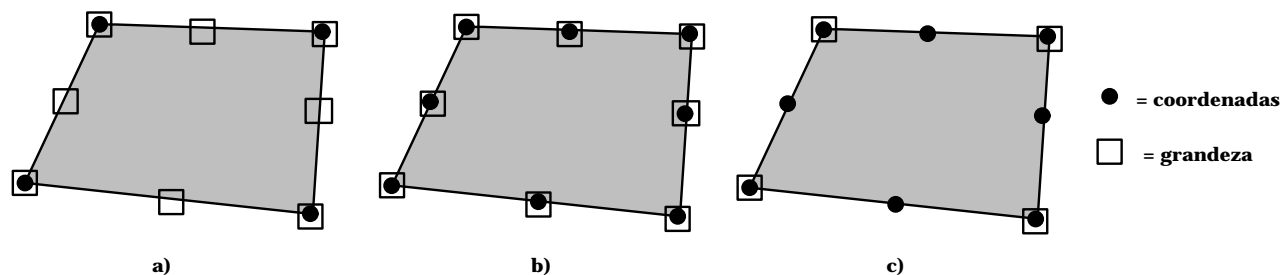


Figura 5.10: Elemento finitos subparamétricos, isoparamétricos e superparamétricos .

Estas três alternativas definem as classes dos elementos finitos subparamétricos, isoparamétricos e superparamétricos. Observa-se que os elementos subparamétricos são mais utilizados, pois em geral deseja-se interpolar com maior precisão o campo da grandeza a ser calculada, tais como deslocamentos, temperaturas, dentre outras. Neste texto, o interesse está no estudo dos elementos finitos isoparamétricos.

Denotando por x , y e z as coordenadas dos pontos em relação a um sistema global de referência, pode-se escrever as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
x(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{a=1}^n N_a(\xi, \eta, \zeta) X_a^e \\
y(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{a=1}^n N_a(\xi, \eta, \zeta) Y_a^e \\
z(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{a=1}^n N_a(\xi, \eta, \zeta) Z_a^e
\end{aligned} \tag{5.13}$$

onde n é o número de nós do elemento e X_e^a, Y_e^a, Z_e^a são as coordenadas cartesianas globais dos nós do elemento e .

Analogamente, os deslocamentos $\{u\}$, $\{v\}$ e $\{w\}$ dos pontos são dados por,

$$\begin{aligned}
u(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{a=1}^n N_a(\xi, \eta, \zeta) U_a^e \\
v(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{a=1}^n N_a(\xi, \eta, \zeta) V_a^e \\
w(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{a=1}^n N_a(\xi, \eta, \zeta) W_a^e
\end{aligned} \tag{5.14}$$

sendo U_e^a, V_e^a, W_e^a os deslocamentos nodais nas direções x, y, z , respectivamente, em relação ao sistema global de referência.

As transformações indicadas em (5.14) e (5.15) são baseadas nas funções de forma dos elementos e podem ser utilizadas para efetuar o mapeamento de um elemento distorcido num sistema global para uma forma regular no sistema local. Para exemplificar, considere o elemento quadrangular ilustrado na Figura 5.11.

Aplicando-se (5.14), obtém-se as coordenadas x, y dos pontos do elemento no sistema global, ou seja,

$$\begin{aligned}
x(\xi, \eta) &= N_1(\xi, \eta) X_1^e + N_2(\xi, \eta) X_2^e + N_3(\xi, \eta) X_3^e + N_4(\xi, \eta) X_4^e \\
y(\xi, \eta) &= N_1(\xi, \eta) Y_1^e + N_2(\xi, \eta) Y_2^e + N_3(\xi, \eta) Y_3^e + N_4(\xi, \eta) Y_4^e
\end{aligned}$$

Substituindo as expressões das funções de forma dadas em (5.12) e as coordenadas do ponto i ($\xi = -1; \eta = 0$) vem que,

$$\begin{aligned}
x_i &= x(-1, 0) = \frac{1}{2} \cdot 5 + 0 \cdot 30 + 0 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 10 = 7,5 \\
y_i &= y(-1, 0) = \frac{1}{2} \cdot 15 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot 25 = 20
\end{aligned}$$

Observa-se que as coordenadas do ponto i assim calculadas estão de acordo com a Figura 5.11. Portanto, identificam-se no sistema global as linhas de ξ e η constantes.

Assim, as funções de forma podem ser utilizadas não apenas para a interpolação da geometria e das grandezas de interesse em estudo, mas também para definir uma transformação entre os sistemas de referência global e local, facilitando o cálculo das matrizes dos elementos finitos.

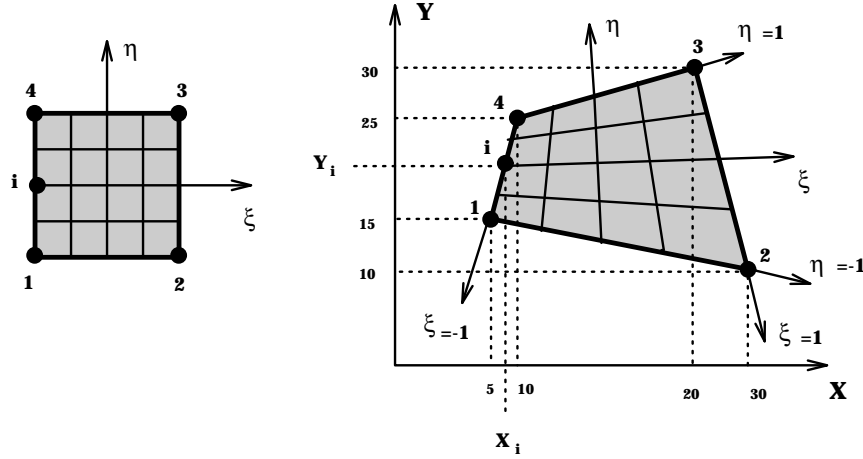


Figura 5.11: Exemplo de transformação entre os sistemas de referência local e global utilizando as funções de forma.

5.6 Jacobiano e Cálculo das Derivadas Globais

A expressão geral para o cálculo da matriz de rigidez dos elementos finitos, dada em (4.37) envolve derivadas das funções de forma em relação às coordenadas globais x, y, z , através da matriz de deformação $[B]$. Como as funções de interpolação estão expressas em coordenadas locais ξ, η, ζ , deve-se aplicar a regra da cadeia. Considerando, então, o nó a de um elemento vem que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_a}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_a}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_a}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_a}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_a}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_a}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_a}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_a}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} &= \frac{\partial N_a}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_a}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_a}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta}\end{aligned}$$

ou em forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_a}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x} \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ \frac{\partial N_a}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x} \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ \frac{\partial N_a}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (5.15)$$

A matriz $[J]$ é denominada Jacobiano da transformação. Assim, para se obter as derivadas das funções de forma em relação às coordenadas globais x, y, z deve-se inverter a matriz do Jacobiano. Logo,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x} \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} \\ \frac{\partial N_a}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_a}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

Utilizando-se as relações (5.14) chega-se a seguinte expressão para a matriz do Jacobiano,

$$\begin{aligned}
 [J] &= \begin{bmatrix} \sum_{a=1}^n \frac{\partial N_a}{\partial \xi} X_a & \sum_{a=1}^n \frac{\partial N_a}{\partial \xi} Y_a & \sum_{a=1}^n \frac{\partial N_a}{\partial \xi} Z_a \\ \sum_{a=1}^n \frac{\partial N_a}{\partial \eta} X_a & \sum_{a=1}^n \frac{\partial N_a}{\partial \eta} Y_a & \sum_{a=1}^n \frac{\partial N_a}{\partial \eta} Z_a \\ \sum_{a=1}^n \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} X_a & \sum_{a=1}^n \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} Y_a & \sum_{a=1}^n \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} Z_a \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n & Y_n & Z_n \end{bmatrix} \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

Demonstra-se ainda que o diferencial de volume dV , presente nas expressões para o cálculo das matrizes e vetores de carregamentos dos elementos finitos, pode ser escrito nas coordenadas locais ξ, η, ζ a partir do determinante do jacobiano da seguinte maneira,

$$dV = d\xi d\eta d\zeta |\det[J]| \quad (5.18)$$

Logo, as integrais de volume presentes nas relações para o cálculo das matrizes e dos vetores de carregamento dos elementos finitos podem ser expressa em função das variáveis locais. Tomando-se, por exemplo, a matriz de rigidez, observa-se que,

$$[\bar{K}_e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |\det[J]| d\xi d\eta d\zeta \quad (5.19)$$

Em geral, a integração indicada em (5.19) não pode ser efetuada analiticamente. Desta forma, deve-se empregar técnicas de integração numérica, as quais serão discutidas posteriormente.

Observa-se que o mapeamento entre coordenadas locais e globais pode não ser único nos casos onde o elemento finito apresentar-se muito distorcido. Para que o mapeamento seja único, o sinal do determinante do jacobiano deve permanecer inalterado para todos os pontos do domínio considerado.

Para o elemento quadrangular linear, os ângulos internos não devem ser superiores a 180° para evitar a distorção excessiva do elemento. Para o elemento quadrático, deve-se garantir ainda que a posição dos nós intermediários estejam no $1/3$ central de cada uma das faces. Este casos estão ilustrados na Figura 5.12. Para as funções de forma de maior grau, não é possível obter regras semelhantes, devendo-se, então, checar o sinal do determinante do jacobiano.

5.7 Dedução da Matriz de Rigidez de Barra Plana

A matriz de rigidez do elemento de barra plana, ilustrado na Figura 2.5, foi obtida nos capítulos anteriores considerando coeficientes de influência e aplicando-se a expressão (4.37). Neste último caso, as funções de interpolação dependiam da variável global x , como indicado em (4.50). Pretende-se agora deduzir esta mesma matriz, considerando, no entanto, as funções de forma segundo o sistema local de referência ξ .

A partir de (4.48), observa-se que o campo de deslocamentos u do elemento de barra possui variação linear. Como o elemento possui dois nós, a geometria pode ser interpolada por funções lineares. Assim, este elemento é isoparamétrico, podendo-se empregar então, as funções de forma do elemento linear dadas em (5.8). A partir das expressões (5.14) e (5.15), a geometria e os deslocamentos são interpolados como,

$$x(\xi) = \sum_{a=1}^2 N_a(\xi) X_a^e = N_1(\xi) \bar{X}_1 + N_2(\xi) \bar{X}_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \bar{X}_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi) \bar{X}_2 \quad (5.20)$$

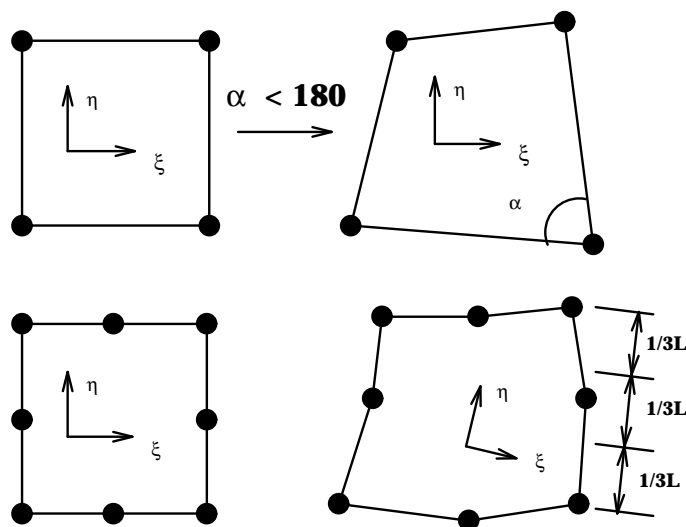


Figura 5.12: Condição para que os elementos quadrangulares linear e quadrático não apresentem distorção.

$$u(\xi) = \sum_{a=1}^2 N_a(\xi) U_a^e = N_1(\xi) \bar{U}_1 + N_2(\xi) \bar{U}_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \bar{U}_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi) \bar{U}_2 \quad (5.21)$$

onde \bar{X}_1 , \bar{X}_2 e \bar{U}_1, \bar{U}_2 denotam, respectivamente, as coordenadas e os deslocamentos dos nós 1 e 2 do elemento de barra.

A matriz de rigidez, segundo o sistema de referência local, pode ser calculada a partir de (4.37). Neste caso, tem-se que,

$$[\bar{K}_e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |\det[J]| A d\xi \quad (5.22)$$

sendo A a área da secção transversal.

A matriz de deformação será dada por,

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Para a determinação das derivadas globais na expressão anterior aplica-se (5.16). Logo,

$$\frac{\partial N_a}{\partial x} = [J]^{-1} \frac{\partial N_a}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_a}{\partial \xi} \right) \quad a = 1, 2 \quad (5.24)$$

Assim, através de (5.20) obtém-se,

$$[J] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2}(1 - \xi) \bar{X}_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi) \bar{X}_2 \right] = \frac{1}{2} (\bar{X}_2 - \bar{X}_1) = \frac{l}{2} \quad (5.25)$$

Substituindo (5.25) em (5.24), chega-se às derivadas globais indicadas na matriz $[B]$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} &= \frac{2}{l} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{l} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} &= \frac{2}{l} \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{l} \end{aligned}$$

Portanto, obtém-se a mesma expressão para a matriz $[B]$ dada em (4.51), ou seja,

$$\frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de elasticidade $[D]$ consiste apenas do módulo de elasticidade E , como pode ser verificado em (4.47). Assim, retornando-se a (5.22) vem que,

$$[\bar{K}_e] = \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |\det[J]| A d\xi = \int_{-1}^1 \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{l}{2} A d\xi = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Desta maneira, determina-se a mesma expressão anterior. No entanto, este procedimento é geral podendo ser estendido a vários tipos de elementos finitos, como será mostrado nos próximos capítulos.