

Capítulo 8

Integração Numérica

8.1 Introdução

A utilização de coordenadas locais permite simplificar os limites de integração no cálculo das matrizes e vetores de carregamento dos elementos finitos. No entanto, nos casos gerais, não é possível obter uma expressão analítica para estas expressões. Desta forma, torna-se necessário aplicar técnicas de integração numérica.

Considerando o caso unidimensional, a integração numérica de $\int_a^b f(\xi) d\xi$ é efetuada tomando-se um polinômio $\varphi(\xi)$ através de alguns valores de $f(\xi)$ e usar $\int_a^b \varphi(\xi) d\xi$ como uma aproximação para $\int_a^b f(\xi) d\xi$. A posição dos pontos de amostragem e o número de valores para $f(\xi)$, determina a qualidade da aproximação de $\varphi(\xi)$ para $f(\xi)$, e portanto, o erro da integração numérica. Observa-se que para os elementos isoparamétricos adota-se $a = -1$ e $b = 1$.

A seguir apresentam-se as duas técnicas comumente utilizadas para calcular numericamente uma integral.

8.2 Integração de Newton-Cotes

Neste primeiro procedimento, toma-se a função calculada em pontos igualmente espaçados em seu domínio. Assim, para n pontos pode-se ajustar um polinômio de grau $n - 1$ e a função pode ser assim integrada exatamente como ilustrado na Figura 8.1. Esta técnica é conhecida como Newton-Cotes.

O valor da integral de uma função, definida no intervalo $[-1, 1]$, é obtida pela somatória de valores da função multiplicadas por um coeficiente de ponderação. Portanto,

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{l=1}^n H_l f(\xi_l) \quad (8.1)$$

Os coeficientes de ponderação H_l , para até 5 pontos de integração, estão dados na Tabela 8.1. Para $n = 2$ tem-se a regra do trapézio, ou seja,

$$I = \sum_{l=1}^2 H_l f(\xi_l) = \frac{1}{2}[f(-1) + f(1)]$$

e para $n=3$ a regra de Simpson,

$$I = \sum_{l=1}^3 H_l f(\xi_l) = I = \sum_{l=1}^2 H_l f(\xi_l) = \frac{1}{3}[f(-1) + 4f(0) + f(1)]$$

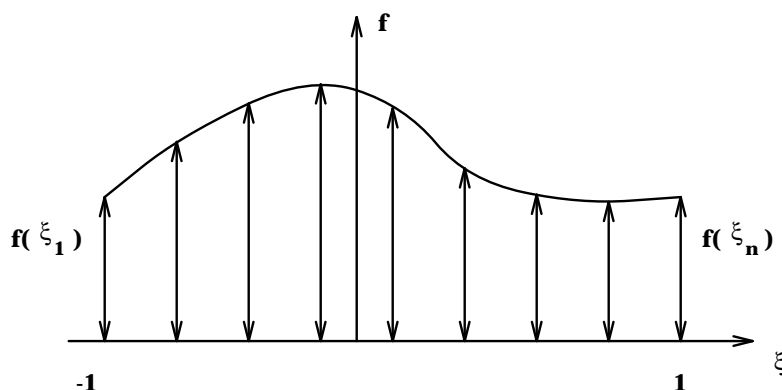


Figura 8.1: Pontos igualmente espaçados para a técnica de integração de Newton-Cotes.

n	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5
2	1	1	-	-	-
3	1/3	4/3	1/3	-	-
4	1/4	3/4	3/4	1/4	-
5	7/45	32/45	12/45	32/45	7/45

Tabela 8.1: Coeficientes de ponderação para as fórmulas de quadratura de Newton-Cotes.

8.3 Quadratura de Gauss-Legendre

Uma segunda técnica para integrar numericamente uma função é posicionar os pontos de amostragem, de tal forma a obter uma melhor precisão. Assim, tomando-se n pontos, tem-se $2n$ incógnitas, ou seja, ξ_l e $f(\xi_l)$, podendo-se ajustar um polinômio de grau $2n - 1$ para que a função seja integrada exatamente. Esta técnica é conhecida por quadratura de Gauss-Legendre.

Aplica-se, então, a equação (8.1) com os pontos de integração e os respectivos coeficientes de ponderação apresentados na Tabela 8.2. A disposição destes pontos está ilustrada na Figura 8.2.

n	ξ_l	H_l
1	0, 0	2, 00
2	$\pm 0, 57735\ 02691$	1, 00
3	0, 00000 00000 $\pm 0, 77459\ 66692$	8/9 5/9
4	$\pm 0, 86113\ 63115$ $\pm 0, 33998\ 10435$	0, 34785 48451 0, 65214 51548
5	0, 00000 00000 $\pm 0, 53846\ 93101$ $\pm 0, 90618\ 98459$	0, 56888 88888 0, 47862 86704 0, 23692 68850

Tabela 8.2: Pontos de integração e coeficientes de ponderação para a quadratura de Gauss-Legendre supondo um intervalo $(-1, 1)$.

A quadratura de Gauss é utilizada para o cálculo das matrizes dos elementos finitos pois obtém-se uma melhor precisão com um número menor de pontos de integração comparando-se com a técnica de Newton-Cotes.

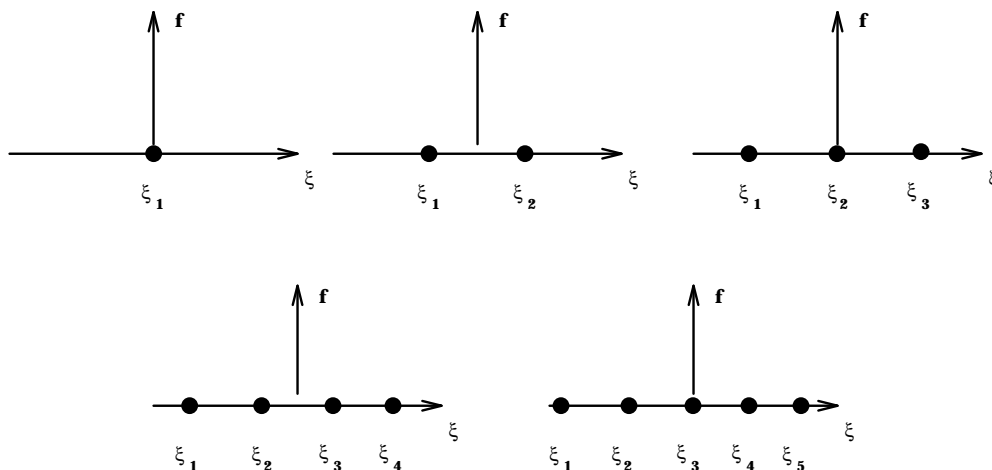


Figura 8.2: Pontos de integração para os elementos unidimensionais.

8.4 Exemplo de Aplicação

Para exemplificar o procedimento de integração numérica por Gauss-Legendre, seja $X_1 = \frac{1}{2}$, $X_2 = 1$ e $X_3 = \frac{3}{2}$ as coordenadas globais do elemento quadrático ilustrado na Figura 5.5. Através de (5.17) observa-se que a matriz do jacobiano é dada por,

$$[J] = \begin{bmatrix} N_{1\xi} & N_{2\xi} & N_{3\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

ou seja,

$$[J] = \sum_{i=1}^3 \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} X_i = \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} X_1 + \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} X_2 + \frac{dN_3(\xi)}{d\xi} X_3$$

As funções de forma deste elemento estão dadas em (5.8). Assim,

$$\begin{aligned} \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{2} \xi(\xi - 1) \right] = \xi - \frac{1}{2} \\ \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi} [1 - \xi^2] = -2\xi \\ \frac{dN_3(\xi)}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{2} \xi(\xi + 1) \right] = \xi + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e, portanto, $\det[J] = 1/2$.

A partir daí vem que,

$$[J] = \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} + (-2\xi)1 + \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Neste caso, tem-se que a função $f(\xi) = [B]^T [D] [B] |\det[J]|$ para a matriz de rigidez ou $f(\xi) = [N]^T [N] |\det[J]|$ para a matriz de massa. O número de pontos de integração depende do grau do

polinômio que ocorre nestes produtos. Verifica-se que para o termo $[N]^T[N]|\det[J]|$ utiliza-se um número maior de pontos que o termo $[B]^T[D][B]|\det[J]|$, pois a matriz $[B]$ contém as derivadas das funções de forma.

Verifica-se que a função $N_2^{(2)}(\xi)$ contém um termo ξ^2 . Portanto, neste caso o termo $[N]^T[N]$ originará um polinômio em ξ^4 e a ordem de integração necessária é determinada fazendo-se,

$$2n - 1 = 4 \quad \rightarrow \quad n = 2,5$$

Como n deve ser um inteiro, tomam-se 3 pontos de integração para o produto $[N]^T[N]$. No entanto, consideram-se 2 pontos para o termo $[B]^T[D][B]$ onde se encontram polinômios em ξ^2 .

A matriz de massa deste elemento no sistema local de referência é determinada pela seguinte expressão,

$$[M] = \int_x \rho [N]^T [N] dx = \int_{-1}^1 \rho [N]^T [N] |\det[J]| d\xi$$

Como devem ser usados 3 pontos de integração, vem que,

$$[M] = \int_{-1}^1 \rho [N]^T [N] |\det[J]| d\xi = \rho \sum_{i=1}^3 H_i [N(\xi_i)]^T [N(\xi_i)] |\det[J]|$$

Assim, para um valor unitário de ρ tem-se,

$$[M] = \frac{1}{2} \left(H_1 [N(\xi_1)]^T [N(\xi_1)] + H_2 [N(\xi_2)]^T [N(\xi_2)] + H_3 [N(\xi_3)]^T [N(\xi_3)] \right) \quad (8.2)$$

Os pontos de integração e os coeficientes de ponderação estão dados na Tabela 8.2. Assim, para $\xi_1 = -0,774597$ verifica-se que,

$$\begin{aligned} N_1(\xi_1) &= \frac{1}{2}\xi_1(\xi_1 - 1) = 0,687299 \\ N_2(\xi_1) &= 1 - \xi_1^2 = 0,40 \\ N_3(\xi_1) &= \frac{1}{2}\xi_1(\xi_1 + 1) = -0,087298 \end{aligned}$$

e

$$f(\xi_1) = \begin{bmatrix} 0,687299 \\ 0,40 \\ -0,087298 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,687299 & 0,40 & -0,087298 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,472299 & 0,274896 & -0,059995 \\ 0,274896 & 0,160000 & -0,034919 \\ -0,059995 & -0,034919 & 0,007621 \end{bmatrix}$$

Efetuando o mesmo procedimento para $\xi_2 = 0,0$ e $\xi_3 = 0,774597$, obtém-se,

$$\begin{aligned} f(\xi_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ f(\xi_3) &= \begin{bmatrix} 0,007621 & -0,034919 & -0,059995 \\ -0,034919 & 0,16 & 0,274896 \\ -0,059995 & 0,274896 & 0,472299 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Substituindo $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$ e $f(\xi_3)$ em (8.2), multiplicando-se pelos coeficientes correspondentes e observando-se que $H_1 = H_3$, chega-se a seguinte expressão,

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{5}{9} \begin{bmatrix} 0,48 & 0,24 & -0,12 \\ 0,24 & 0,32 & 0,24 \\ -0,12 & 0,24 & 0,48 \end{bmatrix} + \frac{8}{9} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Portanto,

$$[M] = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \begin{bmatrix} 0,1333 & 0,0667 & -0,0333 \\ 0,0667 & 0,5333 & 0,0667 \\ -0,0333 & 0,0667 & 0,1333 \end{bmatrix}$$

A Tabela 8.3 apresenta o número de pontos de integração necessários para os elementos unidimensionais, para cada um dos termos presentes nas expressões das matrizes e vetores de carregamento dos elementos.

Elemento	$[N]^T[N]$	$[B]^T[B]$	$[B]$	$[N]^T$
Linear	2	1	1	2
Quadrático	3	2	1	2
Cúbico	4	3	1	2
Quártico	5	4	1	2

Tabela 8.3: Ordem de integração para os elementos unidimensionais.

8.5 Integração Numérica Bidimensional

A quadratura de Gauss-Legendre pode ser estendida para integrar funções de duas variáveis $f(\xi, \eta)$, ou seja,

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{8.3}$$

Esta integral pode ser calculada numericamente, considerando inicialmente apenas a integral interna e mantendo ξ constante. Tomando-se n_2 pontos na direção η e aplicando (8.1) vem que,

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\eta = \sum_{j=1}^{n_2} H_j f(\xi, \eta_j) = g(\xi) \tag{8.4}$$

onde $g(\xi)$ é uma função de ξ . Desta forma, para n_1 pontos de integração na direção ξ , a integral externa é dada por,

$$I = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{n_1} H_i g(\xi_i) \tag{8.5}$$

Substituindo (8.4) em (8.5) vem que,

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{n_1} H_i \left[\sum_{j=1}^{n_2} H_j f(\xi_i, \eta_j) \right]$$

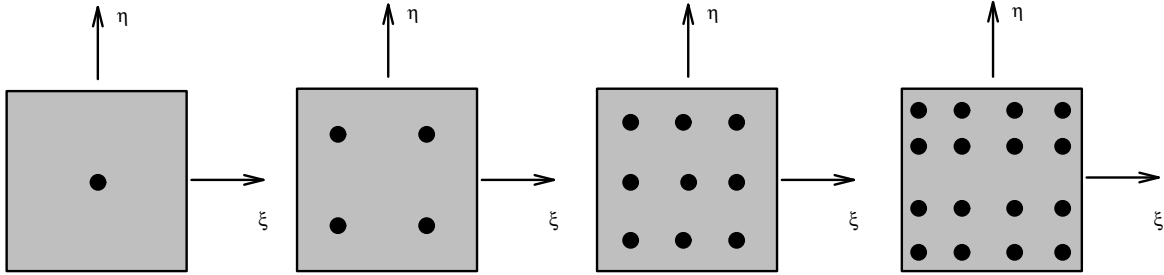


Figura 8.3: Pontos de integração para os elementos quadrangulares planos.

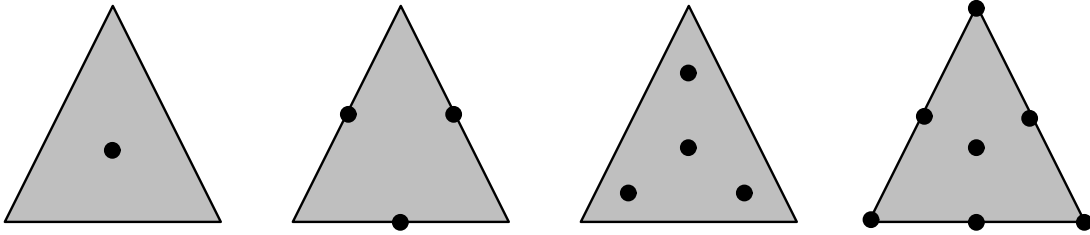


Figura 8.4: Pontos de integração para os elementos triangulares planos.

ou ainda,

$$I = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} H_i H_j f(\xi_i, \eta_j) \tag{8.6}$$

A somatória dupla em (8.6) pode ser escrita como uma somatória simples da seguinte forma,

$$I = \sum_{l=1}^{N_{int}} H_l f(\xi_l, \eta_l) \tag{8.7}$$

onde $N_{int} = n_1 n_2$ e $H_l = H_i H_j$ ($i = 1, \dots, n_1; j = 1, \dots, n_2$)

Para os elementos finitos quadrangulares planos, os pontos de integração e os coeficientes de ponderação são obtidos pela composição, nas direções ξ e η , daqueles determinados para o caso unidimensional ilustrados na Figura 8.2. Assim, a Tabela 8.4 apresenta estes valores para a ordem de integração até 4. Já a Tabela 8.5 contém o número de pontos de integração para os termos das matrizes e vetores dos elementos quadrangulares. A disposição destes pontos está ilustrada na Figura 8.3.

No caso dos triângulos, verifica-se que o processo de integração numérica é análogo, devendo-se observar que a função a ser integrada está especificada nas variáveis L_1 e L_2 . Portanto,

$$\int_0^1 \int_0^{1-L_2} f(L_1, L_2) |\det[J]| dL_1 dL_2 = \sum_{l=1}^{N_{int}} H_l g(L_1^l, L_2^l) \tag{8.8}$$

onde $g(\cdot)$ inclui o determinante do Jacobiano. A ordem de integração a ser empregada depende das potências presentes nas coordenadas L_1 e L_2 . Por exemplo, tomando-se o produto $L_1 L_2^2$, verifica-se que a soma dos expoentes é 3, devendo-se tomar uma integração de ordem 3. A Tabela 8.6 resume os pontos de integração e a respectiva ponderação. A Figura 8.4 ilustra a disposição deste pontos de integração.

$(n_1 \times n_2)$	Grau de precisão	(ξ_l, η_l)	H_l
(1×1)	1	(0.000, 0.000)	4, 0
(2×2)	3	(-0.577..., -0, 577...)	1, 0
		(0.577..., -0, 577...)	1, 0
		(0.577..., 0, 577...)	1, 0
		(-0.577..., 0, 577...)	1, 0
(3×3)	5	(-0.774..., -0.774...)	25/81
		(0.000..., -0.774...)	40/81
		(0.774..., -0.774...)	25/81
		(-0.774..., 0.000...)	40/81
		(0.000..., 0.000...)	40/81
		(0.774..., 0.000...)	40/81
		(-0.774..., 0.774...)	25/81
		(0.000..., 0.774...)	40/81
		(0.774..., 0.774...)	25/81
(4×4)	7	(-0.861..., -0.861...)	0, 121...
		(0.339..., -0.861...)	0, 226...
		(0.339..., -0.861...)	0, 226...
		(0.861..., -0.861...)	0, 121...
		(-0.861..., -0.339...)	0, 226...
		(-0.339..., -0.339...)	0, 425...
		(0.339..., -0.339...)	0, 425...
		(0.861..., -0.339...)	0, 226...
		(-0.861..., 0.339...)	0, 226...
		(-0.339..., 0.339...)	0, 425...
		(0.339..., 0.339...)	0, 425...
		(0.861..., 0.339...)	0, 226...
		(-0.861..., 0.861...)	0, 121...
		(-0.339..., 0.861...)	0, 226...
		(0.339..., 0.861...)	0, 226...
(0.861..., 0.861...)	0, 121...		

Tabela 8.4: Pontos de integração e coeficientes de ponderação para elementos quadrangulares planos.

Elemento	$[N]^T[N]$ n_1, n_2	$[B]^T[B]$ n_1, n_2	$[N]^T$ n_1, n_2
Linear	2,2	1,1	1,1
Quadrático	3,3	2,2	2,2
Cúbico	4,4	3,3	2,2
Quártico	5,5	4,4	3,3

Tabela 8.5: Ordem de integração para os elementos quadrangulares planos.

n	H_l	L_1	L_2
1	0.5	1/3	1/3
3	4/6	1/6	1/6
	1/6	4/6	1/6
	1/6	1/6	4/6
7	0.0629	0.1012	0.1012
	0.0629	0.7974	0.1012
	0.0629	0.1012	0.7974
	0.0662	0.4701	0.0597
	0.0662	0.4701	0.4701
	0.0662	0.0597	0.4701
	0.1125	0.3333	0.3333
13	0.0533	0.0651	0.0651
	0.0533	0.8697	0.0651
	0.0533	0.0651	0.8697
	0.0771	0.3128	0.0486
	0.0771	0.6384	0.3128
	0.0771	0.0486	0.6384
	0.0771	0.6384	0.0486
	0.0771	0.3128	0.6384
	0.0771	0.0486	0.3128
	0.1756	0.2603	0.2603
	0.1756	0.4793	0.2603
	0.1756	0.2603	0.4793
	-0.149	0.3333	0.3333

Tabela 8.6: Pontos de integração e coeficientes de ponderação para elementos triangulares planos.

8.6 Integração Numérica Tridimensional

No caso tridimensional, deseja-se calcular a seguinte integral,

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \tag{8.9}$$

O procedimento é análogo ao caso anterior. Assim, tomando-se n_1, n_2 e n_3 pontos nas direções ξ, η, ζ , respectivamente, pode-se integrar (8.9) como,

$$I = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} H_i H_j H_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \tag{8.10}$$

A expressão anterior pode ser escrita como uma somatória simples da seguinte forma,

$$I = \sum_{l=1}^{N_{int}} H_l f(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) \tag{8.11}$$

onde $N_{int} = n_1 n_2 n_3$ e $H_l = H_i H_j H_k$ ($i = 1, \dots, n_1; j = 1, \dots, n_2; k = 1, \dots, n_3$).

A Tabela 8.7 apresenta os pontos de integração (L_1, L_2, L_3) e as respectivas ponderações para tetraedros.

n	H_l	L_1	L_2	L_3
1	1/6	1/4	1/4	1/4
4	1/24	$(5 - \sqrt{5})/20$	$(5 - \sqrt{5})/20$	$(5 - \sqrt{5})/20$
	1/24	$(5 - \sqrt{5})/20$	$(5 - \sqrt{5})/20$	$(5 + 3\sqrt{5})/20$
	1/24	$(5 - \sqrt{5})/20$	$(5 + 3\sqrt{5})/20$	$(5 - \sqrt{5})/20$
	1/24	$(5 + 3\sqrt{5})/20$	$(5 - \sqrt{5})/20$	$(5 - \sqrt{5})/20$
5	-2/15	1/4	1/4	1/4
	3/40	1/6	1/6	1/6
	3/40	1/6	1/6	1/2
	3/40	1/6	1/2	1/6
	3/40	1/2	1/6	1/6

Tabela 8.7: Pontos de integração para os tetraedros.