

Capítulo 1

DEFORMAÇÃO

1.1 Introdução

De maneira geral, as forças aplicadas sobre um corpo provocam deformação sendo a sua determinação um dos principais objetivos na análise de problemas de mecânica. Neste capítulo, pretende-se apresentar o conceito de deformação, sem se preocupar com a natureza das forças envolvidas, as quais serão abordadas posteriormente.

Nas Figuras 1.1a) e b), ilustram-se, respectivamente, o estiramento de uma barra e a flexão de uma viga. Nestes dois casos, observam-se apenas variações nas dimensões dos corpos envolvidos, caracterizando um alongamento ou deformação normal. Já nas Figuras 1.1c) e d), tem-se, respectivamente, um torque aplicado a um eixo e a forma como os elementos longitudinais do eixo se comportam. Observa-se, neste caso, uma deformação de cisalhamento ou distorção, dada por uma variação angular representada por α .

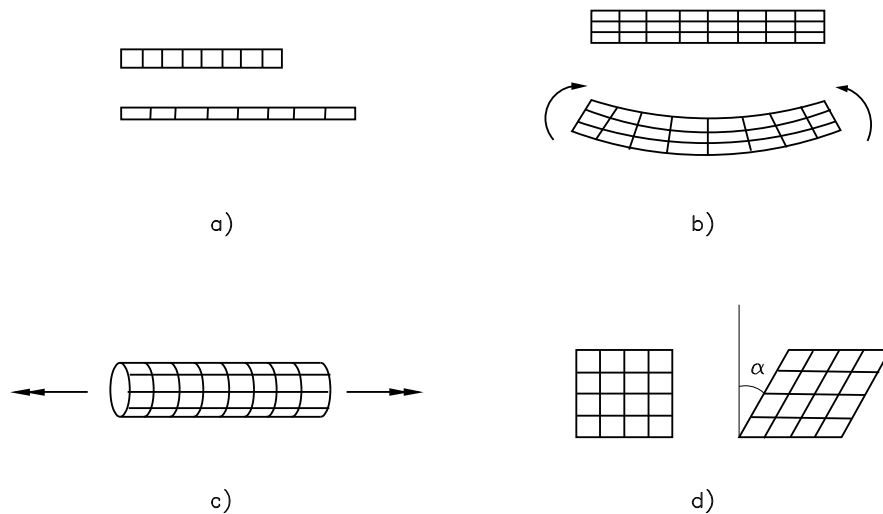


Figura 1.1: Deformações numa a) barra; b) viga; c) e d) eixo.

Como será discutido ao longo deste capítulo, a deformação, no caso geral, será descrita por um tensor. A partir da definição da cinemática, descrita por um campo vetorial de deslocamento ou velocidade, obtém-se as componentes de deformação através da derivação das componentes da cinemática.

O principal objetivo deste capítulo é apresentar um conceito de deformação suficientemente geral, podendo ser aplicado a vários problemas de mecânica. Para isso, inicialmente, caracterizam-se

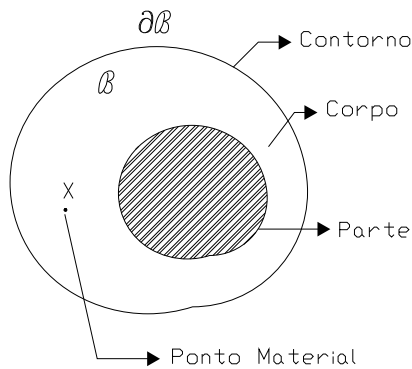


Figura 1.2: Configuração de referência \mathcal{B} e seu contorno $\partial\mathcal{B}$.

os conceitos de corpo, deformação, campo de deslocamentos e gradientes envolvidos. A partir daí, consideram-se as descrições material e espacial de problemas de mecânica, deduzindo medidas de deformação dadas, respectivamente, pelos tensores de Green e Almansi.

Assumindo que a ordem de grandeza dos deslocamentos e de seus gradientes é pequena, chega-se ao conceito de deformação infinitesimal, a qual é caracterizada por um tensor simétrico.

1.2 Caracterização da Deformação

Todo corpo tem como característica física o fato de ocupar regiões do espaço euclidiano \mathcal{E} . Assim, um corpo qualquer pode ocupar diferentes regiões em tempos distintos. Embora nenhuma destas regiões possa ser associada ao corpo, torna-se conveniente selecionar uma delas, denominada *configuração de referência* \mathcal{B} , identificando pontos do corpo com as suas posições em \mathcal{B} . Desta maneira, um corpo \mathcal{B} passa a ser uma região regular de \mathcal{E} , sendo os pontos $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ denominados *pontos materiais*. Qualquer subregião regular limitada de \mathcal{B} é chamada *parte*. Estes conceitos estão ilustrados na Figura 1.2.

Como um corpo pode ocupar diferentes regiões ao longo de um movimento, torna-se necessário a introdução de um parâmetro $t \in [t_0, t_f]$, designando uma certa configuração \mathcal{B}_t do corpo. Observa-se que em vários problemas t não representa necessariamente o tempo.

A partir daí, um corpo é deformado através de uma aplicação \mathbf{f}_t mapeando uma configuração \mathcal{B} numa outra \mathcal{B}_t ,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_t : \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{B}_t \\ \mathbf{X} &\rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{f}_t(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (1.1)$$

ou seja, levam-se pontos materiais $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ em pontos espaciais $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$.

Descreve-se a deformação a partir de um campo vetorial \mathbf{u}_t , definido a partir das posições que uma partícula ocupa antes e depois da deformação, sendo válido para todos pontos do corpo \mathcal{B} . Tomando-se a Figura 1.3, observa-se que,

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_t(\mathbf{X}) - \mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

ou ainda,

$$\mathbf{f}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}_t(\mathbf{X}) \quad (1.2)$$

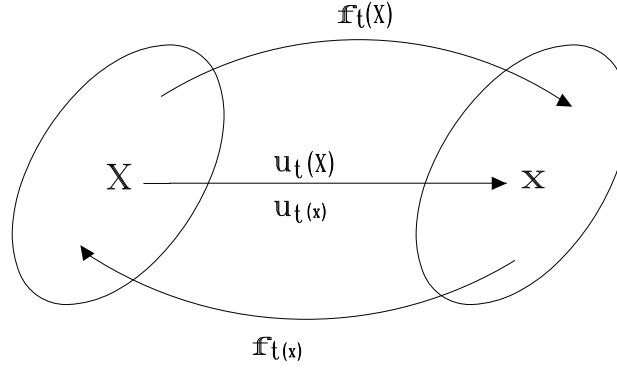


Figura 1.3: Campos vetoriais $\mathbf{u}_t(\mathbf{X})$ e $\mathbf{u}_t(\mathbf{x})$ caracterizando, respectivamente, a deformação $\mathbf{f}_t(\mathbf{X})$ e sua inversa $\mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{X})$.

O campo \mathbf{u}_t é denominado *campo de deslocamentos* relativo à configuração \mathcal{B} . Define-se o tensor $\mathbf{F}_t(\mathbf{X}) = \nabla \mathbf{f}_t(\mathbf{X})$ como gradiente de deformação. Logo, a partir de (1.2) tem-se que,

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{X}) = \nabla \mathbf{f}_t(\mathbf{X}) = \nabla \mathbf{X} + \nabla \mathbf{u}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_t(\mathbf{X}) \quad (1.3)$$

sendo \mathbf{I} o tensor identidade.

Por sua vez, o tensor $\nabla \mathbf{u}_t(\mathbf{X})$ é o gradiente de deslocamentos, sendo dado em componentes cartesianas como,

$$[\nabla \mathbf{u}_t] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Efetuada uma expansão de \mathbf{f}_t numa vizinhança próxima de um ponto $\mathbf{Y} \in \mathcal{B}$ arbitrário vem que,

$$\mathbf{f}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_t(\mathbf{Y}) + \mathbf{F}_t(\mathbf{Y})(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) + o(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \quad (1.5)$$

onde $o(\mathbf{X} - \mathbf{Y})$ representa termos com derivadas de ordem superior e serão desprezados nas análises a seguir.

1.3 Descrições Material e Espacial

Considere a barra ilustrada na Figura 1.4 deformada de um comprimento inicial L_0 para um comprimento final L . Como medida deste alongamento ou deformação empregam-se as seguintes expressões

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} \quad \varepsilon' = \frac{L - L_0}{L} \quad (1.6)$$

Estas relações adimensionais eliminam a influência dos comprimentos absolutos L_0 e L na medida de deformação. Observa-se que numericamente as expressões anteriores são diferentes, pois para $L = 2$ e $L_0 = 1$, tem-se $\varepsilon = 1$ e $\varepsilon' = \frac{1}{2}$. No entanto, para $L = 1.01$ e $L_0 = 1.00$, vem que $\varepsilon = \varepsilon' = 0.01$. Assim, para alongamentos infinitesimais, as medidas em (1.6) são iguais. No entanto, para alongamentos finitos, as expressões resultam em valores diferentes.

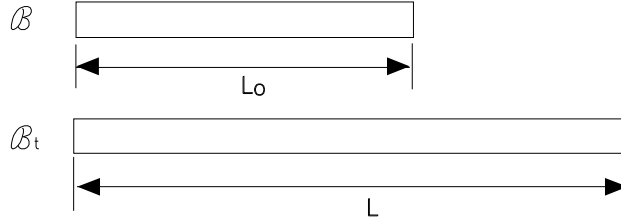


Figura 1.4: Barra alongada de um comprimento L_0 para L .

A partir de (1.6), verifica-se que a deformação ε é medida em relação ao comprimento inicial L_0 da barra, enquanto que ε' é calculada tomando-se o comprimento final L após o alongamento. As grandezas ε e ε' são, respectivamente, as descrições material e espacial do alongamento da barra. De forma geral, estas descrições são utilizadas no estudo da deformação e do movimento em problemas de mecânica.

Basicamente, na descrição material, observa-se o comportamento dos pontos materiais $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ ao longo do tempo. Tomando-se um ponto $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ e a expressão (1.1) vem que,

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_t(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (1.7)$$

Logo, a expressão anterior descreve a trajetória da partícula \mathbf{X} ao longo do tempo t , ou seja, o conjunto de posições $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ ocupadas por \mathbf{X} , com $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{X}$ onde t_0 indica o tempo inicial. Considerando todo o corpo \mathcal{B} , tem-se que

$$\mathcal{B}_t = \mathbf{x}(\mathcal{B}, t) \quad (1.8)$$

representa o movimento do corpo \mathcal{B} , isto é, o conjunto de regiões \mathcal{B}_t do espaço euclidiano \mathcal{E} ocupado por \mathcal{B} ao longo do tempo.

Tomando-se \mathbf{X} e \mathbf{x} em termos de componentes, ou seja, $\mathbf{X} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, expressa-se (1.7) como,

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_2 = x_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_3 = x_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad (1.9)$$

Quando um corpo está em movimento, grandezas associadas ao mesmo, tais como temperatura e velocidade, variam com o tempo. Estas variações podem ser descritas de formas material e espacial. Dada uma certa grandeza Φ , observam-se as seguintes características destas descrições:

- **material:** neste caso a grandeza Φ é expresso em função das partículas ou pontos materiais $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$, dados pelas coordenadas materiais X_1, X_2 e X_3 . Logo,

$$\Phi = \Phi(X_1, X_2, X_3, t)$$

Esta descrição também é conhecida como Lagrangeana ou de referência.

- **espacial:** a grandeza Φ é dada em função de uma posição espacial fixa e do tempo, ou seja,

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3, t)$$

Assim, observa-se como Φ varia numa posição fixa, definida por coordenadas espaciais (x_1, x_2, x_3) . As posições espaciais são ocupadas por diferentes partículas ao longo do tempo. Esta descrição é também conhecida como Euleriana.

No caso da deformação de corpos, a expressão (1.1) é a descrição material, sendo o campo de deslocamentos associado dado por (1.2). Como $\mathbf{f}_t(\mathbf{X})$ é biunívoca, existe a função inversa $\mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{x})$,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_t^{-1}: \mathcal{B}_t &\rightarrow \mathcal{B} \\ \mathbf{x} &\rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Neste caso, o campo vetorial $\mathbf{u}_t(\mathbf{x})$ associado é descrito como,

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{f}_t^{-1} = \mathbf{x} - \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \quad (1.11)$$

Verifica-se que as descrições material e espacial estão relacionadas pelo movimento. Logo, se o movimento é conhecido, uma descrição pode ser obtida a partir da outra.

Exemplo 1.1 *Seja o movimento de um corpo*

$$x_1 = X_1 + ktX_2 \quad x_2 = X_2 \quad x_3 = X_3 \quad (1.12)$$

e o campo de temperatura dado pela descrição espacial

$$\theta = x_1 + x_2 \quad (1.13)$$

1. *Encontrar a descrição material da temperatura.*
2. *Expressar a taxa de troca de temperatura nas descrições material e espacial.*

Solução:

1. *Substituindo (1.12) em (1.13), obtém-se,*

$$\theta = x_1 + x_2 = X_1 + (kt + 1)X_2$$

2. *Para uma certa partícula material X_i , a taxa de troca de temperatura é dada por,*

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{X_i \text{ fixo}} = kX_2 = kx_2$$

Nota-se que embora a descrição espacial da temperatura é independente do tempo, cada partícula experimenta variação em temperatura, pois a partícula flui de uma posição espacial para outra.

1.4 Descrição Material da Deformação

Como mencionado anteriormente, a expressão (1.1) consiste na descrição material da deformação. Deseja-se agora determinar uma medida da deformação. Para isso, considere a Figura 1.5 onde um elemento $d\mathbf{X}$ da configuração de referência \mathcal{B} , na vizinhança de \mathbf{X} , é deformado para o elemento $d\mathbf{x}$ em \mathcal{B}_t . Substituindo $\mathbf{X} = \mathbf{X} + d\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ em (1.5) e desprezando o termo de ordem $o(\cdot)$, vem que,

$$\mathbf{f}_t(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \mathbf{f}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{F}_t(\mathbf{X})(\mathbf{X} + d\mathbf{X} - \mathbf{X}) \Rightarrow \mathbf{x} + d\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{F}_t(\mathbf{X})d\mathbf{X} \Rightarrow d\mathbf{x} = \mathbf{F}_t d\mathbf{X} \quad (1.14)$$

Logo, o comprimento da fibra $d\mathbf{x}$ é dado por,

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F}_t d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}_t d\mathbf{X} = \mathbf{F}_t^T \mathbf{F}_t d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (1.15)$$

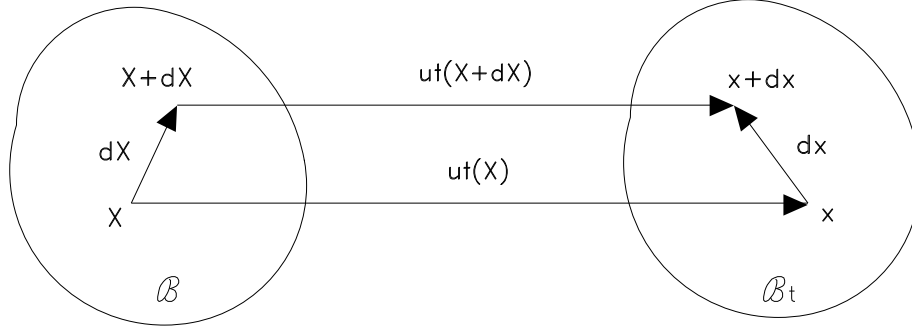


Figura 1.5: Descrições material ($\mathbf{u}_t(\mathbf{X})$) e espacial ($\mathbf{u}_t(\mathbf{x})$) da deformação.

Desta maneira, uma medida da deformação da fibra $d\mathbf{X}$ ao ser deformada para $d\mathbf{x}$ é calculada como,

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{F}_t^T \mathbf{F}_t d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{F}_t^T \mathbf{F}_t - \mathbf{I}) d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = 2\mathbf{E}^* d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (1.16)$$

onde \mathbf{E}^* é denominado *tensor de deformação de Green* e dado por,

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_t^T \mathbf{F}_t - \mathbf{I}) \quad (1.17)$$

Substituindo (1.3) em (1.17), verifica-se que,

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2} [(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_t)^T (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_t) - \mathbf{I}] = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_t + \nabla \mathbf{u}_t^T + \nabla \mathbf{u}_t^T \nabla \mathbf{u}_t) \quad (1.18)$$

Assim, as componentes de \mathbf{E}^* , com respeito a um sistema cartesiano, são dadas por,

$$E_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (1.19)$$

1.5 Descrição Espacial da Deformação

De forma análoga a seção anterior, pode-se deduzir uma medida de deformação considerando a descrição espacial. Para isso, seja $\mathbf{F}_t^{-1}(\mathbf{x}) = \text{grad } \mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{x})$ o gradiente da deformação inversa \mathbf{f}_t^{-1} , mapeando pontos espaciais $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ em pontos materiais $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$. Logo, a partir de (1.11) verifica-se que,

$$\mathbf{F}_t^{-1}(\mathbf{x}) = \text{grad } \mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{x}) = \text{grad } \mathbf{x} - \text{grad } \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{I} - \text{grad } \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) \quad (1.20)$$

sendo grad a notação para o gradiente em relação à variável espacial \mathbf{x} .

Além disso, tem-se por analogia com (1.5),

$$\mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{y}) + \mathbf{F}_t^{-1}(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + o(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (1.21)$$

A partir da Figura 1.5, substituindo $\mathbf{x} = \mathbf{x} + d\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ na expressão anterior e desprezando $o(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ vem que,

$$\mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{f}_t^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_t^{-1}(\mathbf{x})(\mathbf{x} + d\mathbf{x} - \mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{X} + d\mathbf{X} - \mathbf{X} = \mathbf{F}_t^{-1}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \Rightarrow d\mathbf{X} = \mathbf{F}_t^{-1} d\mathbf{x} \quad (1.22)$$

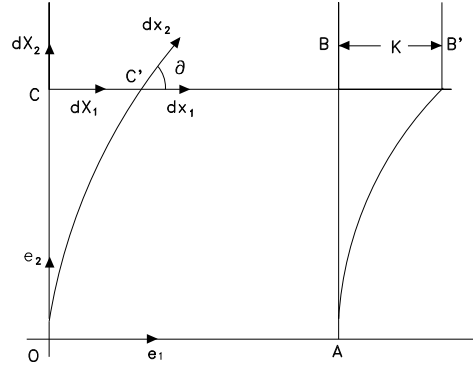


Figura 1.6: Quadrado unitário OABC deformado para OAB'C'.

Assim, a medida de deformação na descrição espacial é dada por,

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - \mathbf{F}_t^{-T} \mathbf{F}_t^{-1} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{F}_t^{-T} \mathbf{F}_t^{-1}) d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = 2\bar{\mathbf{E}} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \quad (1.23)$$

onde $\bar{\mathbf{E}}$ é o *tensor de deformação de Almansi*, ou seja,

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}_t^{-T} \mathbf{F}_t^{-1}) \quad (1.24)$$

Substituindo (1.20) em (1.24), tem-se que,

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{u}_t + \text{grad } \mathbf{u}_t^T - \text{grad } \mathbf{u}_t^T \text{ grad } \mathbf{u}_t) \quad (1.25)$$

ou em termos de componentes cartesianas,

$$\bar{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (1.26)$$

Exemplo 1.2 *Dadas as componentes de deslocamento*

$$u_1 = kX_2^2 \quad u_2 = u_3 = 0$$

Pede-se:

1. *Esboçar a forma deformada de um quadrado unitário OABC, onde o ponto O está na origem e com os lados OA e OC alinhados com os eixos x e y, respectivamente.*
2. *Determinar os vetores deformados (i.e., $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$) dos elementos materiais $d\mathbf{X}_1 = dX_1 \mathbf{e}_1$ e $d\mathbf{X}_2 = dX_2 \mathbf{e}_2$ localizados no ponto C.*
3. *Determinar a razão entre os comprimentos deformados e não-deformados dos elementos diferenciais (chamado alongamento) e a variação do ângulo entre os elementos do item anterior.*

Solução:

1. Seguindo o esquema da Figura 1.6, para a linha material OA, $X_2 = 0$ e portanto $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. Logo, a linha OA não sofre deslocamento. Para a linha material CB, $X_2 = 1$, $u_1 = k$ e portanto a linha é deslocada de k unidades para a direita. Para as linhas materiais OC e AB, $u_1 = kX_2^2$ e as linhas assumem uma forma parabólica. A forma final é dada então por OAB'C' na Figura 1.6.

2. Para o ponto material C , a matriz gradiente do deslocamento é

$$[\nabla \mathbf{u}_t] = \begin{bmatrix} 0 & 2kX_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{X_2=1}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_1 &= \mathbf{F}_t d\mathbf{X}_1 = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_t) d\mathbf{X}_1 \\ [d\mathbf{x}_1] &= \begin{bmatrix} 1 & 2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dX_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow d\mathbf{x}_1 = dX_1 \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_2 &= \mathbf{F}_t d\mathbf{X}_2 = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_t) d\mathbf{X}_2 \\ [d\mathbf{x}_2] &= \begin{bmatrix} 1 & 2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ dX_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2k dX_2 \\ dX_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow d\mathbf{x}_2 = 2k dX_2 \mathbf{e}_1 + dX_2 \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

3. A partir dos resultados do item anterior, tem-se,

$$\frac{|d\mathbf{x}_1|}{|d\mathbf{X}_1|} = 1 \quad \frac{|d\mathbf{x}_2|}{|d\mathbf{X}_2|} = \sqrt{(1+4k^2)} \quad \cos \theta = \frac{d\mathbf{x}_1}{|d\mathbf{x}_1|} \cdot \frac{d\mathbf{x}_2}{|d\mathbf{x}_2|} = \frac{2k}{\sqrt{(1+4k^2)}}$$

Se γ denota o decréscimo no ângulo, inicialmente reto, entre $d\mathbf{X}_1$ e $d\mathbf{X}_2$, então,

$$\cos \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) = \sin \gamma = \frac{2k}{\sqrt{(1+4k^2)}} \Rightarrow \gamma = \sin^{-1} \frac{2k}{\sqrt{(1+4k^2)}}$$

1.6 Deformação Infinitesimal

Em vários problemas práticos, a deformação de um corpo é tal que as componentes $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ e $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ do gradiente de deslocamento são bem menores que 1, por exemplo da ordem 10^{-4} . Assim, supondo que os deslocamentos e seus gradientes são suficientemente pequenos, ou seja,

$$\|\mathbf{u}_t\|, \|\nabla \mathbf{u}_t\|, \|\text{grad } \mathbf{u}_t\| < \xi \quad (1.27)$$

onde $\xi > 0$ é um valor pequeno, pode-se desprezar os termos de maior ordem $\nabla \mathbf{u}_t^T \nabla \mathbf{u}_t$ e $\text{grad } \mathbf{u}_t^T \text{grad } \mathbf{u}_t$ nos tensores de Green e Almansi frente aos termos $\nabla \mathbf{u}_t$ e $\text{grad } \mathbf{u}_t$, respectivamente.

Assim, igualando os termos do lado direito das expressões (1.16) e (1.23) e empregando (1.14) vem que,

$$\mathbf{E}^* d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \bar{\mathbf{E}} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \bar{\mathbf{E}} (\mathbf{F}_t d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F}_t d\mathbf{X}) = \mathbf{F}_t^T \bar{\mathbf{E}} \mathbf{F}_t d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{E}^* = \mathbf{F}_t^T \bar{\mathbf{E}} \mathbf{F}_t \quad (1.28)$$

Logo, substituindo (1.3) na equação anterior, obtém-se

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{F}_t^T \bar{\mathbf{E}} \mathbf{F}_t = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_t)^T \bar{\mathbf{E}} (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_t) = \bar{\mathbf{E}} + \nabla \mathbf{u}_t^T \bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{E}} \nabla \mathbf{u}_t + \nabla \mathbf{u}_t^T \bar{\mathbf{E}} \nabla \mathbf{u}_t = \bar{\mathbf{E}} + o(\bar{\mathbf{E}})$$

Desta maneira, sob a hipótese (1.27), os tensores de Green e de Almansi diferem por termos de ordem superior. Desprezando estes termos, conclui-se que $\nabla = \text{grad}$, ou seja, os gradientes material e espacial coincidem. Portanto,

$$\mathbf{E}^* = \bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_t + \nabla \mathbf{u}_t^T) = \mathbf{E} = (\nabla \mathbf{u}_t)^s \quad (1.29)$$

sendo \mathbf{E} o *tensor de deformação infinitesimal*. Observa-se ainda que \mathbf{E} é igual à parte simétrica de $\nabla \mathbf{u}_t$, ou seja, $\mathbf{E} = (\nabla \mathbf{u}_t)^s$. Neste caso, a equação (1.16) pode ser reescrita como,

$$d\mathbf{x}.d\mathbf{x} - d\mathbf{X}.d\mathbf{X} = 2\mathbf{E}d\mathbf{X}.d\mathbf{X} = 2d\mathbf{X}.\mathbf{E}d\mathbf{X} \quad (1.30)$$

As componentes de \mathbf{E} com respeito a um sistema cartesiano são dadas por,

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (1.31)$$

ou ainda matricialmente,

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

A partir de (1.29), observa-se que a deformação infinitesimal será rígida se a medida de deformação dada pelo tensor \mathbf{E} for nula. Como consequência, tem-se $\nabla \mathbf{u}_t = -\nabla \mathbf{u}_t^T$, ou seja, o gradiente do campo de deslocamentos correspondente a uma deformação rígida é um tensor antissimétrico. Denomina-se $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\{(\nabla \mathbf{u}_t - \nabla \mathbf{u}_t^T)\}$ como *tensor de rotação infinitesimal*.

Decompondo o gradiente do campo de deslocamentos na suas partes simétrica $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_t + \nabla \mathbf{u}_t^T)$ e antissimétrica $\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_t - \nabla \mathbf{u}_t^T)$, a expressão anterior pode ser reescrita como,

$$\mathbf{u}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_t(\mathbf{Y}) + \mathbf{E}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) + \mathbf{W}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) + o(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{B} \quad (1.33)$$

Logo, na vizinhança de \mathbf{Y} com erro $o(\mathbf{X} - \mathbf{Y})$, um campo de deslocamentos infinitesimal constante de uma parte correspondente a deformação e a rotação rígida local em cada ponto do corpo.

1.7 Interpretação das Componentes de Deformação

As componentes do tensor de deformação infinitesimal (1.32) possuem uma interpretação geométrica simples. Tomando, inicialmente, os termos da diagonal de \mathbf{E} , seja $d\mathbf{X} = (dS)\mathbf{n}$ um elemento material, na direção especificada pelo vetor unitário \mathbf{n} , de tamanhos original dS e deformado ds . A partir de (1.30), tem-se que,

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2(dS)^2 \mathbf{n}.\mathbf{E}\mathbf{n} \quad (1.34)$$

Para pequenas deformações, verifica-se que,

$$(ds)^2 - (dS)^2 = (ds - dS)(ds + dS) \approx 2dS(ds - dS)$$

e substituindo em (1.34) tem-se

$$\frac{ds - dS}{dS} = \mathbf{n}.\mathbf{E}\mathbf{n} \quad (1.35)$$

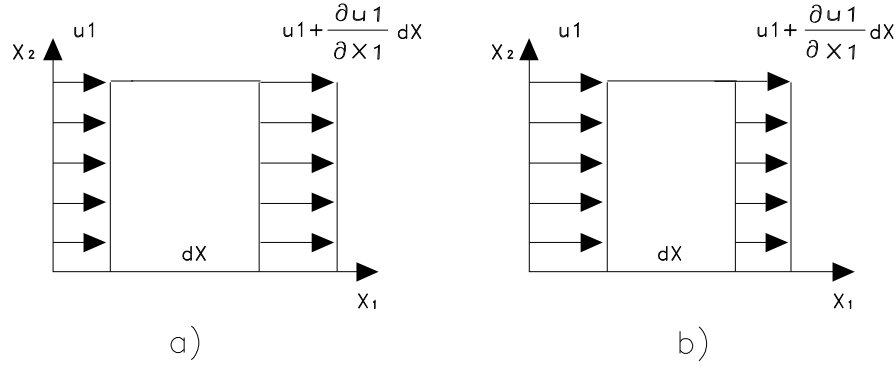


Figura 1.7: Interpretação da componente de deformação ε_{xx} : a) $\frac{\partial u_1}{\partial X_1} > 0$, b) $\frac{\partial u_1}{\partial X_1} < 0$.

Assim, a variação no comprimento ($ds - dS$) por unidade de comprimento inicial dS , conhecida como alongamento unitário ou deformação normal, de um elemento material $d\mathbf{X}$ é determinada a partir do tensor de deformação \mathbf{E} . Para $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1, \mathbf{n} = \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$, a equação (1.35) fornece,

$$\begin{aligned} E_{11} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}_1 = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} = \varepsilon_{xx} \\ E_{22} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}_2 = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} = \varepsilon_{yy} \\ E_{33} &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = \varepsilon_{zz} \end{aligned}$$

ou seja, tem-se, respectivamente, os alongamentos ou extensões unitários nas direções X_1, X_2, X_3 ou x, y, z . A Figura 1.7 ilustra o alongamento ε_{xx} para um elemento infinitesimal $d\mathbf{X}$, considerando $\frac{\partial u_1}{\partial X_1} > 0$ e $\frac{\partial u_1}{\partial X_1} < 0$, assim como $u_2 = u_3 = 0$.

Para interpretar os termos fora da diagonal principal do tensor \mathbf{E} , considere os elementos materiais $d\mathbf{X}_1 = (dS_1) \mathbf{m}$ e $d\mathbf{X}_2 = (dS_2) \mathbf{n}$, onde os vetores unitários \mathbf{m} e \mathbf{n} são perpendiculares entre si, implicando que $d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 = 0$. Logo, a partir de (1.30) vem que,

$$(ds_1)(ds_2) \cos \theta = 2(dS_1)(dS_2) \mathbf{m} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n} \quad (1.36)$$

onde θ é o ângulo entre os elementos deformados $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$.

Tomando $\theta = \pi/2 - \gamma$, então γ é a medida do decrescimento do ângulo entre $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$, conhecido como deformação de cisalhamento. Como $\cos(\pi/2 - \gamma) = \sin \gamma$ e para pequenas deformações $\sin \gamma \approx \gamma$, $\frac{ds_1}{dS_1} \approx 1$, $\frac{ds_2}{dS_2} \approx 1$, tem-se a partir de (1.36),

$$\gamma = 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n} \quad (1.37)$$

Considerando $\mathbf{m} = \mathbf{e}_1$ e $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$, vem que,

$$\gamma = 2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}_2 = 2E_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} = \gamma_{xy}$$

Assim, $2E_{12}$ representa o decrescimento do ângulo entre os elementos materiais $d\mathbf{X}_1$ e $d\mathbf{X}_2$ nas direções X_1 e X_2 . Analogamente, para as componentes $E_{13} = \gamma_{xz}$ e $E_{23} = \gamma_{yz}$. A Figura 1.8 ilustra a deformação γ_{xy} , observando que as derivadas $\frac{\partial u_1}{\partial X_2}$ e $\frac{\partial u_2}{\partial X_1}$ indicam, respectivamente, as inclinações nas direções vertical e horizontal. As componentes γ_{xy}, γ_{xz} e γ_{yz} são denominadas deformações de cisalhamento ou distorções, indicando uma deformação angular.

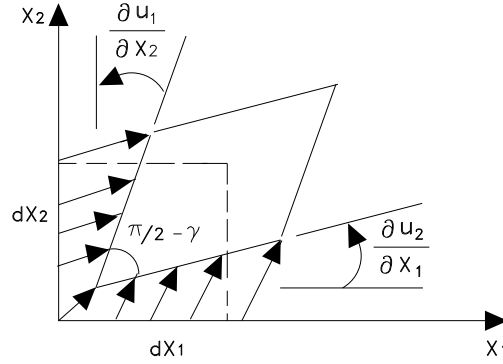


Figura 1.8: Interpretação da deformação de cisalhamento γ_{xy} .

Exemplo 1.3 Dadas as componentes de deslocamento

$$u_1 = kX_2^2 \quad u_2 = u_3 = 0 \quad k = 10^{-4}$$

1. Obter o tensor \mathbf{E} de deformação infinitesimal.
2. Usando o tensor de deformação \mathbf{E} , determinar o alongamento unitário para os elementos materiais $d\mathbf{X}_1 = dX_1\mathbf{e}_1$ e $d\mathbf{X}_2 = dX_2\mathbf{e}_2$ no ponto $C(0, 1, 0)$ da Figura 1.6. Determinar também a variação no ângulo entre estes dois elementos.
3. Comparar os resultados com aqueles do Exemplo 1.2.

Solução:

1. A partir da cinemática dada, o gradiente do campo de deslocamentos é dado por,

$$[\nabla \mathbf{u}_t] = \begin{bmatrix} 0 & 2kX_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$[\mathbf{E}] = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}_t + \nabla \mathbf{u}_t^T] = [\nabla \mathbf{u}_t]^S = \begin{bmatrix} 0 & kX_2 & 0 \\ kX_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. No ponto C , $X_2 = 1$, então,

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para os elementos $d\mathbf{X}_1 = dX_1\mathbf{e}_1$ e $d\mathbf{X}_2 = dX_2\mathbf{e}_2$, os alongamentos unitários são $E_{11} = 0$ e $E_{22} = 0$. O decréscimo no ângulo é dado por $2E_{12}$, isto é, $2k = 2 \times 10^{-4}$.

3. Dos resultados do Exemplo 1.2, tem-se,

$$\frac{|d\mathbf{x}_1| - |d\mathbf{X}_1|}{|d\mathbf{X}_1|} = 0 \quad \frac{|d\mathbf{x}_2| - |d\mathbf{X}_2|}{|d\mathbf{X}_2|} = \sqrt{(1 + 4k^2)} - 1 \quad \text{sen}\gamma = \frac{2k}{\sqrt{(1 + 4k^2)}}$$

Como $k = 10^{-4}$, tem-se,

$$\sqrt{(1 + 4k^2)} - 1 \simeq 1 + 2k^2 - 1 = 2k^2 = 2 \times 10^{-8}$$

e $\text{sen} \gamma = 2k = 2 \times 10^{-4}$ e assim $\gamma = 2 \times 10^{-4}$. Como 10^{-8} é desprezível se comparado a 10^{-4} , vê-se que os resultados do Exemplo 1.2 se reduzem a estes valores para k pequeno.

1.8 Exercício Resolvido

Dado o campo de deslocamentos,

$$\mathbf{u} = [(20X_1^2 X_2)\mathbf{e}_1 + 10(X_2^2 + X_3^2)\mathbf{e}_2 + (X_1 + 3X_3^3)\mathbf{e}_3] \times \alpha (cm)$$

Pede-se:

1. se $\alpha = 10^{-2}$, a matriz gradiente do campo de deslocamento $[\nabla \mathbf{u}_t]$;
2. o tensor de Green \mathbf{E}^* , incluindo termos lineares e não-lineares $\nabla \mathbf{u}_t^T \nabla \mathbf{u}_t$, comparando a contribuição que os termos não-lineares trazem para os componentes do tensor;
3. para $\alpha = 10^{-4}$, calcule o tensor de Green \mathbf{E}^* com os termos não-lineares e faça a mesma comparação do item anterior;
4. calcule, assumindo pequenas deformações, o tensor de Cauchy $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_t^T + \nabla \mathbf{u}_t)$;
5. calcule, o tensor de rotações infinitesimais $\mathbf{\Omega}$ e o vetor rotação ω ;
6. calcule a dilatação cúbica para o tensor linear de Cauchy ε_V ;
7. escreva o tensor deviatórico $\mathbf{E}^D = \mathbf{E} - \frac{\varepsilon_V}{3}\mathbf{I}$;
8. particularize os resultados acima para o ponto P(1,1,1);
9. para $\alpha = 10^{-2}$, determine a componente do deslocamento na posição (2,0,1) (original) na direção $\hat{\mathbf{e}} = 0.6\mathbf{e}_1 + 0.8\mathbf{e}_2$.

Solução:

1. Dado o campo de deslocamentos,

$$\mathbf{u} = [(20X_1^2 X_2)\mathbf{e}_1 + 10(X_2^2 + X_3^2)\mathbf{e}_2 + (X_1 + 3X_3^3)\mathbf{e}_3] \times \alpha (cm)$$

a matriz do gradiente do campo de deslocamentos é dada por (1.4),

$$[\nabla \mathbf{u}_t] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 40X_1 X_2 & 20X_1^2 & 0 \\ 0 & 20X_2 & 20X_3 \\ 1 & 0 & 9X_3^2 \end{bmatrix}$$

Considerando o ponto $P(1, 1, 1)$, tem-se que,

$$[\nabla \mathbf{u}_t] = 10^{-2} \begin{bmatrix} 40 & 20 & 0 \\ 0 & 20 & 20 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

2. O tensor de Green incluindo termos não-lineares é calculado a partir de (1.18). Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^* &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_t + \nabla \mathbf{u}_t^T + \nabla \mathbf{u}_t^T \nabla \mathbf{u}_t) \rightarrow [\mathbf{E}^*] = \frac{1}{2}([\nabla \mathbf{u}_t] + [\nabla \mathbf{u}_t]^T + [\nabla \mathbf{u}_t]^T [\nabla \mathbf{u}_t]) \\ [\mathbf{E}^*] &= \frac{1}{2} \left(\alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 20X_1^2 & 0 \\ 0 & 20X_2 & 20X_3 \\ 1 & 0 & 9X_3^2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 0 & 1 \\ 20X_1^2 & 20X_2 & 0 \\ 0 & 20X_3 & 9X_3^2 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2 \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 0 & 1 \\ 20X_1^2 & 20X_2 & 0 \\ 0 & 20X_3 & 9X_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 20X_1^2 & 0 \\ 0 & 20X_2 & 20X_3 \\ 1 & 0 & 9X_3^2 \end{bmatrix} \right) \\ [\mathbf{E}^*] &= \frac{1}{2} \left(\alpha \begin{bmatrix} 80X_1X_2 & 20X_1^2 & 1 \\ 20X_1^2 & 40X_2 & 20X_3 \\ 1 & 20X_3 & 18X_3^2 \end{bmatrix} + \alpha^2 \begin{bmatrix} 1600X_1^2X_2^2 + 1 & 800X_1^3X_2 & 9X_3^2 \\ 800X_1^3X_2 & 400(X_1^4 + X_2^2) & 400X_2X_3 \\ 9X_3^2 & 400X_2X_3 & 400X_3^2 + 81X_3^4 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Particularizando para o ponto $P(1, 1, 1)$

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}^*] &= \frac{1}{2} \left(\alpha \begin{bmatrix} 80 & 20 & 1 \\ 20 & 40 & 20 \\ 1 & 20 & 18 \end{bmatrix} + \alpha^2 \begin{bmatrix} 1601 & 800 & 9 \\ 800 & 800 & 400 \\ 9 & 400 & 481 \end{bmatrix} \right) \\ [\mathbf{E}^*] &= \begin{bmatrix} 0,40 & 0,10 & 0,005 \\ 0,10 & 0,20 & 0,10 \\ 0,005 & 0,10 & 0,09 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,08005 & 0,0400 & 0,00045 \\ 0,04000 & 0,0400 & 0,0200 \\ 0,00045 & 0,0200 & 0,02405 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, para $\alpha = 10^{-2}$ as componentes não-lineares possuem uma ordem de grandeza próxima dos valores lineares, não podendo ser desprezadas. Por exemplo, para o termo E_{11}^* observa-se que,

$$E_{11}^* = 0,40 + 0,08005 = 0,48005 \rightarrow \frac{0,08005}{0,40} \approx 20\%$$

3. Considerando agora $\alpha = 10^{-4}$ e o ponto $P(1, 1, 1)$ vem que,

$$10^{-4} \begin{bmatrix} 40 & 10 & 0,5 \\ 10 & 20 & 10 \\ 0,5 & 20 & 9 \end{bmatrix} + 10^{-8} \begin{bmatrix} 800,5 & 400 & 4,5 \\ 400 & 400 & 200 \\ 4,5 & 200 & 240,5 \end{bmatrix}$$

Neste caso, a parte não-linear pode ser desprezada, pois a sua contribuição não é significativa. Por exemplo, tomando a componente E_{11}^* novamente vem que,

$$E_{11}^* = 40 \times 10^{-4} + 8,005 \times 10^{-6} = 40,008 \times 10^{-4} \rightarrow \frac{8,005 \times 10^{-6}}{40 \times 10^{-4}} \approx 0,2\%$$

4. O tensor de Cauchy para pequenas deformações é dado por (1.29). Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_t + \nabla \mathbf{u}_t^T) \rightarrow [\mathbf{E}] = \frac{1}{2}([\nabla \mathbf{u}_t] + [\nabla \mathbf{u}_t]^T) \\
[\mathbf{E}] &= \frac{1}{2} \left(\alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 20X_1^2 & 0 \\ 0 & 20X_2 & 20X_3 \\ 1 & 0 & 9X_3^2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 0 & 1 \\ 20X_1^2 & 20X_2 & 0 \\ 0 & 20X_3 & 9X_3^2 \end{bmatrix} \right) \\
[\mathbf{E}] &= \alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 10X_1^2 & 0,5 \\ 10X_1^2 & 20X_2 & 10X_3 \\ 0,5 & 10X_3 & 9X_3^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para o ponto $P(1, 1, 1)$ e $\alpha = 10^{-4}$ verifica-se que,

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 0,004 & 0,001 & 0,00005 \\ 0,001 & 0,002 & 0,001 \\ 0,00005 & 0,001 & 0,0009 \end{bmatrix}$$

5. O tensor de rotações infinitesimais é definido como,

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_t - \nabla \mathbf{u}_t^T) \rightarrow [\mathbf{\Omega}] = \frac{1}{2}([\nabla \mathbf{u}_t] - [\nabla \mathbf{u}_t]^T) \\
[\mathbf{\Omega}] &= \frac{1}{2} \left(\alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 20X_1^2 & 0 \\ 0 & 20X_2 & 20X_3 \\ 1 & 0 & 9X_3^2 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 & 0 & 1 \\ 20X_1^2 & 20X_2 & 0 \\ 0 & 20X_3 & 9X_3^2 \end{bmatrix} \right) \\
[\mathbf{\Omega}] &= \alpha \begin{bmatrix} 0 & 10X_1^2 & -0,5 \\ -10X_1^2 & 0 & 10X_3 \\ 0,5 & -10X_3 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para o ponto $P(1, 1, 1)$ e $\alpha = 10^{-4}$ verifica-se que,

$$[\mathbf{\Omega}] = \begin{bmatrix} 0 & 0,001 & -0,00005 \\ -0,001 & 0 & 0,001 \\ 0,00005 & -0,001 & 0 \end{bmatrix}$$

O vetor de rotação ω é o vetor axial associado ao tensor antissimétrico $\mathbf{\Omega}$. Logo,

$$\omega = \Omega_{32}\mathbf{e}_1 + \Omega_{13}\mathbf{e}_2 + \Omega_{21}\mathbf{e}_3 \rightarrow \omega = -10\alpha X_3\mathbf{e}_1 - 0,5\alpha\mathbf{e}_2 - 10\alpha X_1^2\mathbf{e}_3$$

Para o ponto $P(1, 1, 1)$ e $\alpha = 10^{-4}$,

$$\omega = -0,001\mathbf{e}_1 - 0,00005\mathbf{e}_2 - 0,001\mathbf{e}_3$$

6. A dilatação é dada simplesmente pelo traço do tensor de pequenas deformações. Assim,

$$\varepsilon_V = \text{tr } \mathbf{E} = E_{ii} \rightarrow \varepsilon_V = (40X_1X_2 + 20X_2 + 9X_3^2)\alpha$$

Para o ponto $P(1, 1, 1)$ e $\alpha = 10^{-4}$,

$$\varepsilon_V = (40 + 20 + 9) \times 10^{-4} = 0,0069$$

7. O tensor deviatórico é expresso como,

$$\mathbf{E}^D = \mathbf{E} - \frac{\varepsilon_V}{3} \mathbf{I} \rightarrow [\mathbf{E}^D] = [\mathbf{E}] - \frac{\varepsilon_V}{3} [\mathbf{I}]$$

Portanto,

$$[\mathbf{E}^D] = \alpha \begin{bmatrix} 40X_1X_2 - \frac{\varepsilon_V}{3\alpha} & 10X_1^2 & 0,5 \\ 10X_1^2 & 20X_2 - \frac{\varepsilon_V}{3\alpha} & 10X_3 \\ 0,5 & 10X_3 & 9X_3^2 - \frac{\varepsilon_V}{3\alpha} \end{bmatrix}$$

Tomando o ponto $P(1, 1, 1)$ e $\alpha = 10^{-4}$, tem-se que,

$$[\mathbf{E}^D] = \begin{bmatrix} 0,004 - 0,0023 & 0,001 & 0,00005 \\ 0,001 & 0,002 - 0,0023 & 0,001 \\ 0,00005 & 0,001 & 0,0009 - 0,0023 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{E}^D] = \begin{bmatrix} 0,0017 & 0,001 & 0,00005 \\ 0,001 & -0,0003 & 0,001 \\ 0,00005 & 0,001 & -0,0014 \end{bmatrix}$$

8. A posição deformada do elemento material inicialmente no ponto $P(2, 0, 1)$ para $\alpha = 10^{-2}$ é dada por,

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 + 20\alpha X_1^2 X_2 \\ X_2 + 10\alpha(X_2^2 + X_3^2) \\ X_3 + \alpha(X_1 + 3X_3)^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0,1 \\ 1,05 \end{Bmatrix}$$

Por sua vez, o deslocamento \mathbf{u} associado é o seguinte,

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \Rightarrow \{\mathbf{u}\} = \{ 0 \quad 0,1 \quad 0,05 \}^T$$

O valor do deslocamento d na direção $\hat{\mathbf{e}} = 0,6\mathbf{e}_1 + 0,8\mathbf{e}_2$ é obtido pela projeção de \mathbf{u} ao longo de $\hat{\mathbf{e}}$. Portanto,

$$d = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}} = \{ 0 \quad 0,1 \quad 0,05 \} \cdot \begin{Bmatrix} 0,6 \\ 0,8 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0,08$$

Capítulo 2

TENSÃO

2.1 Introdução

No capítulo anterior, considerou-se o estudo da deformação de corpos. Assim, definida a cinemática do corpo, ou seja, as componentes do campo de deslocamentos, é possível determinar as componentes do tensor de deformação. No entanto, não se levou em conta as forças que causam o movimento e a deformação do corpo. Neste capítulo, discute-se a forma de representar as forças internas presentes num corpo, submetido a uma deformação causada por esforços externos.

De forma geral, aceita-se que a matéria é constituída de moléculas, as quais por sua vez consistem de átomos e partículas subatômicas. Apesar de na realidade haver espaços entre as moléculas de um corpo, a mecânica do contínuo está baseada na hipótese que a matéria é contínua. Assim, desprezam-se as descontinuidades entre as moléculas, aceitando-se a idéia de que a matéria pode ser representada por um meio contínuo. É possível, então, falar de uma partícula, caracterizada por um volume infinitesimal de matéria. Por sua vez, o conjunto de várias partículas constitui um corpo. Esta hipótese tem se mostrado válida no estudo de vários problemas de mecânica.

A partir daí, as forças internas são aquelas presentes entre as partículas de um corpo. Na teoria clássica de mecânica do contínuo, as forças internas são introduzidas através das forças de corpo e de superfície. Como será visto neste capítulo, descreve-se a força de superfície num ponto como um vetor de tensão, não considerando a curvatura da superfície neste ponto. Esta hipótese é conhecida como o teorema de Cauchy, constituindo-se num dos axiomas clássicos da mecânica do contínuo.

2.2 Forças de Corpo e de Superfície

Durante o movimento, as interações entre as partes de um corpo ou entre o corpo e seu ambiente são descritas por forças, as quais podem ser classificadas como:

- forças de corpo ou volume presentes nos pontos interiores de um corpo e impostas pelo seu ambiente;
- forças de contato entre partes separadas de um corpo;
- forças de contato exercidas sobre o contorno de um corpo pelo seu ambiente.

No primeiro caso, o ambiente aplica forças no interior do corpo \mathcal{B} . Exemplos clássicos são as forças de gravidade e eletromagnética, as quais são representadas por um campo vetorial \mathbf{b} sobre a trajetória $\mathcal{T} = (\mathbf{x}, t)$. Logo, $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ indica a força por unidade de volume exercida pelo ambiente em \mathbf{x} no instante t . Daí vem a denominação de *força de corpo ou volume*. Tomando uma parte \mathcal{P} de \mathcal{B} , tem-se que,

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b} dV \quad (2.1)$$

Para caracterizar as forças de contato, emprega-se a hipótese de Cauchy, a qual constitui num dos mais importantes axiomas da mecânica do contínuo. Cauchy assumiu a existência de uma densidade de força $\mathbf{s}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$ definida para cada vetor unitário \mathbf{n} e todo ponto (\mathbf{x}, t) ao longo da trajetória \mathcal{T} do movimento.

Para ilustrar esta hipótese, considere a Figura 2.1a), onde tem-se uma superfície orientada \mathcal{S} na configuração \mathcal{B}_t , com normal unitária positiva \mathbf{n} em \mathbf{x} . Distinguem-se dois lados da superfície \mathcal{S} através da normal \mathbf{n} , tomando-se como positivo, o lado para o qual a normal aponta. Assim, $\mathbf{s}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$ é a força por unidade de área sobre o material do lado negativo de \mathcal{S} exercida pelo material do lado positivo, ao longo da superfície \mathcal{S} . A hipótese de Cauchy é bastante sólida como mostrado na Figura 2.1b). Sendo \mathcal{C} uma outra superfície orientada tangente a \mathcal{S} em \mathbf{x} e com mesma normal unitária \mathbf{n} , tem-se que a força por unidade de área em \mathbf{x} é a mesma em \mathcal{C} como em \mathcal{S} .

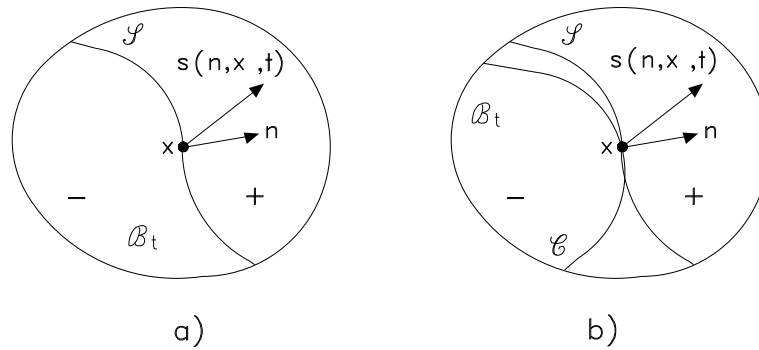


Figura 2.1: Hipótese de Cauchy.

Uma outra forma de mostrar a hipótese de Cauchy pode ser vista na Figura 2.2, onde toma-se uma superfície fechada \mathcal{S} num corpo ocupando a configuração \mathcal{B}_t . Considera-se, então, um elemento de área ΔS sobre a superfície \mathcal{S} , além de um vetor normal unitário \mathbf{n} , num ponto \mathbf{x} de ΔS , apontando para fora de ΔS . O lado positivo de ΔS exerce uma força $\Delta \mathbf{F}$ sobre a outra parte localizada no lado negativo da normal. Esta força $\Delta \mathbf{F}$ depende da localização e tamanho da área ΔS , assim como da orientação da normal \mathbf{n} .

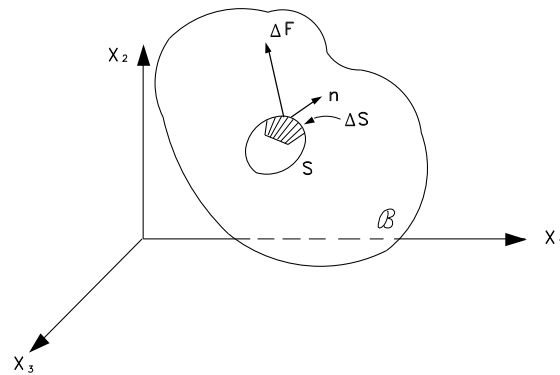


Figura 2.2: Formal alternativa para ilustrar a hipótese de Cauchy.

Assume-se então que quando ΔS tende a zero a relação $\Delta \mathbf{F}/\Delta S$ tende para um limite definido $d\mathbf{F}/dS$, e ainda que o momento da força agindo em ΔS em relação a qualquer ponto dentro da área se anula. Logo, o vetor limite é escrito como,

$$\mathbf{s}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} \quad (2.2)$$

O vetor limite $\mathbf{s}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$ é denominado *tração* ou *vetor tensão*, representando a força por unidade de área agindo na superfície \mathcal{S} no ponto \mathbf{x} e no instante t .

De forma geral, para determinar a força de contato entre duas partes \mathcal{P} e \mathcal{D} , ilustradas na Figura 2.3a), no instante t , basta integrar \mathbf{s} sobre a superfície de contato $\mathcal{S}_t = \mathcal{P}_t \cap \mathcal{D}_t$, ou seja,

$$\int_{\mathcal{S}_t} \mathbf{s}(\mathbf{n}_x, \mathbf{x}, t) dA_x = \int_{\mathcal{S}_t} \mathbf{s}(\mathbf{n}) dA \quad (2.3)$$

indicando a força exercida em \mathcal{P} por \mathcal{D} no instante t . Observa-se que \mathbf{n}_x é a normal unitária externa a $\partial \mathcal{P}_t$ em \mathbf{x} .

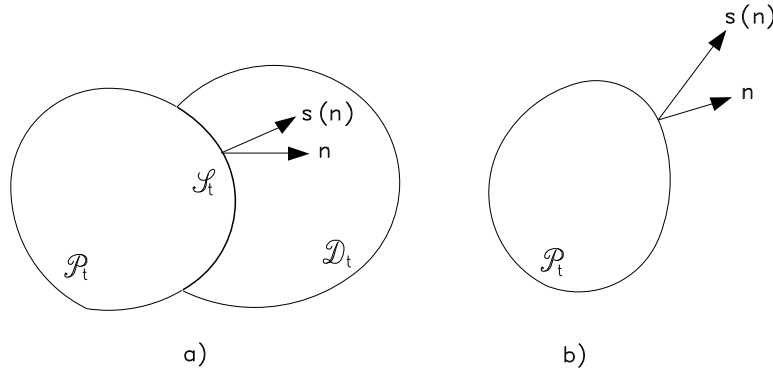


Figura 2.3: Forças de contato: a) entre superfícies de corpos; b) entre a superfície de um corpo e seu ambiente.

Para pontos no contorno de \mathcal{B}_t , a densidade $\mathbf{s}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$, com normal unitária \mathbf{n} no ponto \mathbf{x} em $\partial \mathcal{B}_t$, fornece a força por unidade de área aplicada pelo ambiente no corpo, sendo esta força usualmente referida como *tração superficial*. Logo, para qualquer parte \mathcal{P} de \mathcal{B} , como mostrado na Figura 2.3b), a força de contato total exercida em \mathcal{P} no instante t é dada por,

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{s}(\mathbf{n}) dA \quad (2.4)$$

A partir dos conceitos discutidos, seja \mathcal{N} o conjunto de todos os vetores unitários. Por um sistema de forças para um corpo \mathcal{B} durante um movimento com trajetória \mathcal{T} , entende-se o par de funções (\mathbf{s}, \mathbf{b}) ,

$$\mathbf{s} : \mathcal{N} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{V} \quad \mathbf{b} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{V}$$

com

1. $\mathbf{s}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$, para cada $\mathbf{n} \in \mathcal{N}$ e t , uma função suave de \mathbf{x} em \mathcal{B}_t , sendo \mathbf{s} denominada força de superfície;
2. $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, para cada t , uma função contínua de \mathbf{x} em \mathcal{B}_t , conhecida como força de corpo ou de volume.

2.3 Teorema de Cauchy

Um dos principais resultados da mecânica do contínuo é dado pelo teorema de Cauchy, estabelecendo que o vetor de tensão $\mathbf{s}(\mathbf{n})$ é linear em \mathbf{n} .

Teorema de Cauchy : Seja (\mathbf{s}, \mathbf{b}) um sistema de forças de um corpo \mathcal{B} durante um movimento. Portanto, uma condição necessária e suficiente para que as leis de balanço de momento sejam satisfeitas é que exista um campo tensorial \mathbf{T} , denominado *tensor de tensões ou de Cauchy*, tal que,

1. para qualquer vetor unitário \mathbf{n} ,

$$\mathbf{s}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}\mathbf{n}; \quad (2.5)$$

2. \mathbf{T} é simétrico;
3. \mathbf{T} satisfaz a equação de movimento

$$\operatorname{div}\mathbf{T} + \mathbf{b} = \rho\dot{\mathbf{v}} \quad (2.6)$$

Nas próximas 3 seções, as condições do teorema de Cauchy serão mostradas.

2.3.1 Tensor de tensão

Seja \mathbf{T} uma transformação tal que, se \mathbf{n} é um vetor normal unitário, o vetor de tensão é dado por (2.5). Deseja-se mostrar, aplicando para isso a lei de balanço de momento linear que \mathbf{T} é um tensor.

Considere então um pequeno tetraedro isolado do corpo \mathcal{B} , contendo um ponto $\mathbf{P} \in \mathcal{B}$ como um de seus vértices, conforme ilustrado na Figura 2.4. Pretende-se, então, fazer com que o tamanho do tetraedro vá para zero, de tal forma que no limite o plano inclinado ABC passe por \mathbf{P} . A partir da expressão (2.5), tem-se que o vetor de tensão na face PAB, cuja normal está na direção de $-\mathbf{e}_1$, é dada por,

$$\mathbf{s}(-\mathbf{e}_1) = \mathbf{s}_{-\mathbf{e}_1} = -\mathbf{s}(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{s}_{\mathbf{e}_1} = -\mathbf{T}\mathbf{e}_1 \quad (2.7)$$

Analogamente, para as faces PBC e PAC, tem-se, respectivamente,

$$\mathbf{s}(-\mathbf{e}_2) = \mathbf{s}_{-\mathbf{e}_2} = -\mathbf{s}(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{s}_{\mathbf{e}_2} = -\mathbf{T}\mathbf{e}_2 \quad (2.8)$$

$$\mathbf{s}(-\mathbf{e}_3) = \mathbf{s}_{-\mathbf{e}_3} = -\mathbf{s}(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{s}_{\mathbf{e}_3} = -\mathbf{T}\mathbf{e}_3 \quad (2.9)$$

Denotando por ΔA_1 , ΔA_2 , ΔA_3 e ΔA_n , respectivamente, como as áreas nas faces PAB, PBC, PAC e ABC, tem-se aplicando-se o balanço da quantidade de momento linear,

$$\mathbf{f}(\cdot, t) = \dot{\mathbf{i}}(\cdot, t) \rightarrow \mathbf{s}_{-\mathbf{e}_1}(\Delta A_1) + \mathbf{s}_{-\mathbf{e}_2}(\Delta A_2) + \mathbf{s}_{-\mathbf{e}_3}(\Delta A_3) + \mathbf{s}(\mathbf{n})(\Delta A_n) = (\Delta m)\ddot{\mathbf{a}} \quad (2.10)$$

Substituindo (2.5) e (2.7) a (2.9) na expressão anterior vem que,

$$-\mathbf{T}\mathbf{e}_1(\Delta A_1) - \mathbf{T}\mathbf{e}_2(\Delta A_2) - \mathbf{T}\mathbf{e}_3(\Delta A_3) + \mathbf{T}\mathbf{n}(\Delta A_n) = (\Delta m)\ddot{\mathbf{a}} \quad (2.11)$$

A massa $\Delta m = \rho\Delta V$ é proporcional ao volume ΔV do tetraedro, o qual por sua vez é calculado em função das dimensões Δx_1 , Δx_2 e Δx_3 , ou seja, $\Delta V = \frac{1}{6}(\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3)$. Assim, verifica-se que quando o tamanho do tetraedro aproxima-se de zero ($\Delta x_i \rightarrow 0$), o lado direito da equação anterior tende a

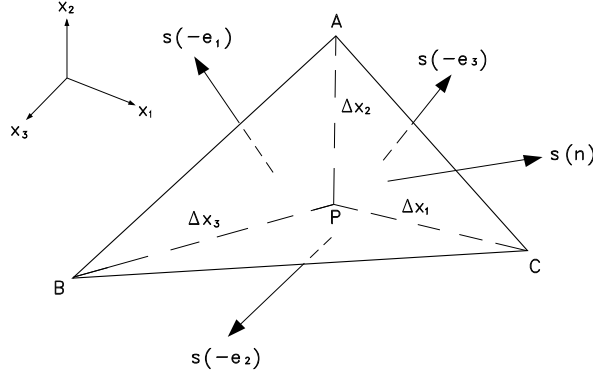


Figura 2.4: Tetraedro infinitesimal contendo o ponto **P**.

zero de forma mais rápida, podendo-se desprezar o termo envolvendo a aceleração $\ddot{\alpha}$. Portanto, da expressão (2.11),

$$-\mathbf{T}\mathbf{e}_1(\Delta A_1) - \mathbf{T}\mathbf{e}_2(\Delta A_2) - \mathbf{T}\mathbf{e}_3(\Delta A_3) + \mathbf{T}\mathbf{n}(\Delta A_n) = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

O vetor normal unitário do plano inclinado ABC é dado por,

$$\mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3 \quad (2.13)$$

Por sua vez, as áreas ΔA_1 , ΔA_2 e ΔA_3 são projeções de ΔA_n , ou seja,

$$\Delta A_1 = n_1\Delta A_n \quad \Delta A_2 = n_2\Delta A_n \quad \Delta A_3 = n_3\Delta A_n \quad (2.14)$$

Substituindo as relações anteriores em (2.12) e simplificando vem que,

$$\mathbf{T}(n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3) = n_1(\mathbf{T}\mathbf{e}_1) + n_2(\mathbf{T}\mathbf{e}_2) + n_3(\mathbf{T}\mathbf{e}_3) \quad (2.15)$$

Portanto, \mathbf{T} é uma transformação linear, sendo denominado *tensor de tensão*. A partir da equação (2.5), as componentes de \mathbf{s} estão relacionadas àquelas de \mathbf{T} e \mathbf{n} como,

$$s_i = T_{ij}n_j \quad (2.16)$$

ou matricialmente,

$$\{\mathbf{s}\} = [\mathbf{T}]\{\mathbf{n}\} \quad (2.17)$$

Desta maneira, se a matriz $[\mathbf{T}]$ é conhecida, o vetor tensão em qualquer plano inclinado, definido por sua normal \mathbf{n} , é calculado a partir da expressão (2.17). Conclui-se, então, que o estado de tensão num ponto é unicamente determinado pelo tensor de tensões. Além disso, conhecida uma matriz para \mathbf{T} , através de uma transformação de coordenadas, obtém-se qualquer outra matriz representando \mathbf{T} , como por exemplo no caso da determinação das tensões principais.

As componentes do tensor de tensão no ponto **P** estão mostradas na Figura 2.5a). As componentes T_{11} , T_{22} e T_{33} , também indicadas como σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{zz} , são denominadas *tensões normais*, respectivamente, nas direções X_1 , X_2 e X_3 . Os demais termos (T_{12} , T_{13} , T_{21} , T_{23} , T_{31} e T_{32}) são as componentes tangenciais, sendo conhecidas como *tensões de cisalhamento*. Usualmente, indicam-se as mesmas como τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} e τ_{zy} , respectivamente, como ilustrado na Figura 2.5b). Como as componentes de tensão representam força por unidade de área, as unidades empregadas são do tipo N/m^2 , Kgf/cm^2 , dentre outras.

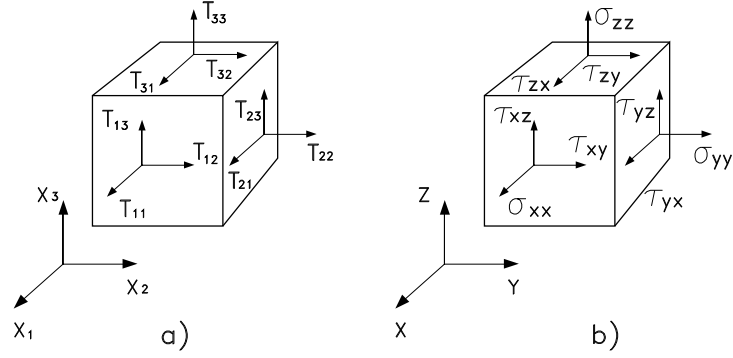


Figura 2.5: Componentes cartesianas do tensor de tensões.

2.3.2 Simetria do tensor de tensões

Aplicando o princípio de momento angular para um elemento diferencial de um corpo, torna-se possível mostrar que o tensor de tensões é geralmente simétrico.

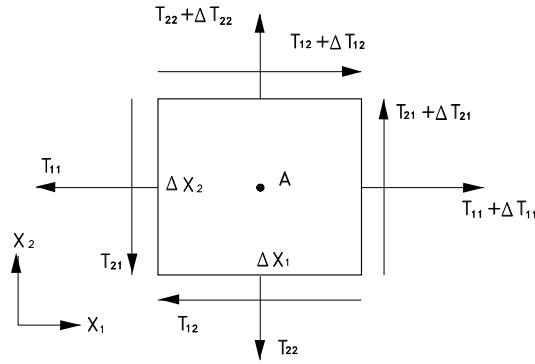


Figura 2.6: Diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal.

Considere, então, o diagrama de corpo livre de um paralelepípedo isolado de um corpo \mathcal{B} , como ilustrado na Figura 2.6. Calculando o momento das forças em relação a um eixo, paralelo a X_3 , passando pelo ponto central A , vem que,

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{x_3 A} &= T_{21}(\Delta X_2 \Delta X_3) \left(\frac{\Delta X_1}{2} \right) + (T_{21} + \Delta T_{21})(\Delta X_2 \Delta X_3) \left(\frac{\Delta X_1}{2} \right) \\ &\quad - T_{12}(\Delta X_1 \Delta X_3) \left(\frac{\Delta X_2}{2} \right) - (T_{12} + \Delta T_{12})(\Delta X_1 \Delta X_3) \left(\frac{\Delta X_2}{2} \right) \end{aligned}$$

Desprezando os termos contendo grandezas pequenas de alta ordem, tais como $\Delta T_{21} \Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3$, tem-se

$$\mathbf{m}_{x_3 A} = (T_{21} - T_{12}) \Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3 \quad (2.18)$$

Pelo balanço de momento angular para o elemento infinitesimal plano, tem-se,

$$\mathbf{m}_{x_3 A} = \mathbf{T}_I \dot{\omega} \quad (2.19)$$

onde \mathbf{T}_I é o tensor de inércia e $\dot{\omega}$ é a aceleração angular. Para o elemento infinitesimal da Figura 2.6, o termo do lado direito da expressão anterior se reduz a $T_{I33}\dot{\omega}_3$. Por sua vez, tem-se para o momento de inércia $T_{I33} = \rho\Delta X_1\Delta X_2\Delta X_3 [(\Delta X_1)^2 + (\Delta X_2)^2]$, onde ρ é a densidade.

Assim, a partir da equação (2.18),

$$(T_{21} - T_{12})\Delta X_1\Delta X_2\Delta X_3 = \rho\Delta X_1\Delta X_2\Delta X_3[(\Delta X_1)^2 + (\Delta X_2)^2]\dot{\omega}_3 \quad (2.20)$$

Simplificando a expressão anterior e desprezando o termo de ordem superior $[(\Delta X_1)^2 + (\Delta X_2)^2]$, vem que $T_{12} = T_{21}$. Analogamente, $T_{13} = T_{31}$ e $T_{23} = T_{32}$. Desta forma, o tensor de tensões \mathbf{T} é simétrico, pois $T_{ij} = T_{ji}$ ou ainda $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$.

2.3.3 Equação de movimento

Deseja-se agora determinar as equações diferenciais de movimento para qualquer meio contínuo em movimento. A condição básica é que cada partícula deve satisfazer a lei de balanço de momento linear.

A Figura 2.7 mostra um cubo elementar isolado de um meio contínuo na vizinhança de \mathbf{X} , estando os vetores de tensão agindo nas seis faces.

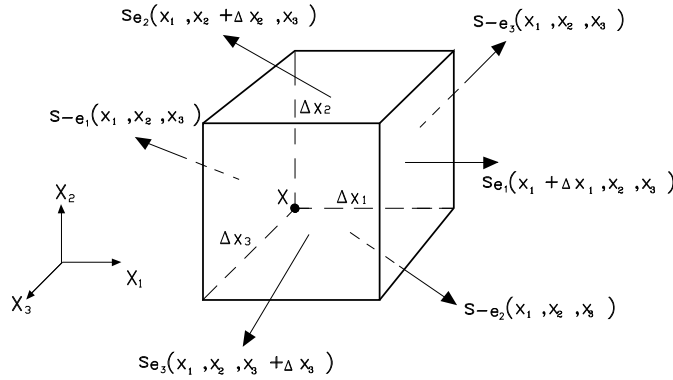


Figura 2.7: Elemento infinitesimal com as componentes de tensão.

Sejam $\mathbf{b} = b_i\mathbf{e}_i$ a força de corpo, ρ a densidade em \mathbf{X} e $\dot{\mathbf{v}} = \dot{v}_i\mathbf{e}_i$ a aceleração da partícula correntemente na posição \mathbf{X} . Pela lei de balanço linear,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\cdot, t) &= \mathbf{l}(\cdot, t) \\ &= \left[\left(\frac{\mathbf{s}_{\mathbf{e}_1}(X_1 + \Delta X_1, X_2, X_3) - \mathbf{s}_{\mathbf{e}_1}(X_1, X_2, X_3)}{\Delta X_1} \right) + \left(\frac{\mathbf{s}_{\mathbf{e}_2}(X_1, X_2 + \Delta X_2, X_3) - \mathbf{s}_{\mathbf{e}_1}(X_1, X_2, X_3)}{\Delta X_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\mathbf{s}_{\mathbf{e}_3}(X_1, X_2, X_3 + \Delta X_3) - \mathbf{s}_{\mathbf{e}_3}(X_1, X_2, X_3)}{\Delta X_3} \right) \right] \Delta X_1\Delta X_2\Delta X_3 + \\ &= \mathbf{b}\Delta X_1\Delta X_2\Delta X_3 = (\rho\dot{\mathbf{v}})\Delta X_1\Delta X_2\Delta X_3 \end{aligned}$$

Dividindo-se por $\Delta X_1\Delta X_2\Delta X_3$ e tomando-se o limite para $\Delta X_i \rightarrow 0$, obtém-se,

$$\frac{\partial \mathbf{s}_{\mathbf{e}_1}}{\partial X_1} + \frac{\partial \mathbf{s}_{\mathbf{e}_2}}{\partial X_2} + \frac{\partial \mathbf{s}_{\mathbf{e}_3}}{\partial X_3} + \mathbf{b} = \rho\dot{\mathbf{v}}$$

Como $\mathbf{s}_{\mathbf{e}_j} = \mathbf{T}\mathbf{e}_j = T_{ij}\mathbf{e}_i$ vem que,

$$\frac{\partial(T_{i1}\mathbf{e}_i)}{\partial X_1} + \frac{\partial(T_{i2}\mathbf{e}_i)}{\partial X_2} + \frac{\partial(T_{i3}\mathbf{e}_i)}{\partial X_3} + \mathbf{b} = \rho\dot{\mathbf{v}}$$

Lembrando que \mathbf{e}_i é uma direção fixa, verifica-se que a expressão anterior é satisfeita se,

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} \mathbf{e}_i + b_i \mathbf{e}_i = \rho \dot{v}_i \mathbf{e}_i \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} + b_i - \rho \dot{v}_i \right) \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

Observa-se que $\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j}$ indica as componentes do divergente de \mathbf{T} . Assim, a expressão anterior pode ser reescrita como,

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad (2.22)$$

Estas equações são válidas para qualquer meio contínuo, seja sólido ou fluido, em movimento, sendo denominadas *equações de movimento de Cauchy*. Se a aceleração se anula, observa-se que,

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad (2.24)$$

Capítulo 3

EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

3.1 Introdução

Os conceitos de deformação e tensão apresentados anteriormente são válidos para qualquer meio contínuo. Na apresentação destes conceitos, nenhuma hipótese foi feita sobre o comportamento do material. Neste capítulo, apresentam-se as principais características de dois tipos de materiais, especificamente o sólido elástico linear e o fluido newtoniano.

3.2 Sólido Elástico Linear

Todo corpo apresenta uma certa deformação quando submetido à esforços externos. Quando o comportamento do material do corpo é tal que a deformação desaparece totalmente quando o carregamento é removido, este material é denominado elástico ou ainda que possui a propriedade de elasticidade. Os materiais metálicos a temperatura ambiente comportam-se como elásticos para pequenas deformações.

As propriedades características dos materiais elásticos são os módulos de elasticidade longitudinal (módulo de Young) e transversal, o coeficiente de Poisson e o módulo volumétrico. Estas propriedades elásticas são determinadas para cada material através de ensaios, tais como o ensaio de tração.

Estes ensaios utilizam corpos de prova cortados de um bloco de material. Quando os valores das propriedades são independentes da orientação do corpo de prova relativo ao bloco, o material é denominado isotrópico. Quando o comportamento depende da direção do corpo de prova, o material é denominado anisotrópico.

Além da possível dependência da orientação, as propriedades elásticas podem variar em uma vizinhança para outra. Neste caso, o material é não-homogêneo. Se as propriedades são as mesmas em todos os pontos do corpo, o material é homogêneo.

Os experimentos empregados para se levantar as propriedades de materiais elásticos possuem as seguintes características comuns:

- a relação entre o carregamento aplicado e a quantidade medindo a deformação é linear,
- a taxa de aplicação de carregamento não influencia o comportamento do material,
- as deformações desaparecem completamente quando o carregamento é removido,
- as deformações são pequenas.

As características anteriores serão empregadas para formular a equação constitutiva de um material ideal denominado sólido elástico linear ou sólido elástico de Hooke. A equação constitutiva relaciona a

tensão com as quantidades relevantes de deformação. Neste caso, como as deformações são pequenas e a taxa de aplicação do carregamento não tem efeito, a relação tensão-deformação pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{E}) \quad (3.1)$$

onde \mathbf{T} é o tensor de tensões de Cauchy e \mathbf{E} é o tensor de deformação infinitesimal com $\mathbf{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Se além disso, o comportamento é linear, tem-se a seguinte forma em termos de componentes,

$$\begin{aligned} T_{11} &= C_{1111}E_{11} + C_{1112}E_{12} + \dots + C_{1133}E_{33} \\ T_{12} &= C_{1211}E_{11} + C_{1212}E_{12} + \dots + C_{1233}E_{33} \\ &\vdots \\ T_{33} &= C_{3311}E_{11} + C_{3312}E_{12} + \dots + C_{3333}E_{33} \end{aligned} \quad (3.2)$$

As equações anteriores podem ser escritas na seguinte forma compacta

$$T_{ij} = C_{ijkl}E_{kl} \quad (3.3)$$

Como T_{ij} e E_{ij} são componentes de tensores de segunda ordem, tem-se que C_{ijkl} são componentes de um tensor de quarta ordem denominado tensor de elasticidade. Se o corpo é homogêneo, ou seja, as propriedades mecânicas são as mesmas para cada partícula, então as componentes C_{ijkl} são constantes (independentes da posição). A seguir considera-se apenas o caso de corpos homogêneos.

A equação (3.3) possui 81 coeficientes. Como tensor de deformação é simétrico ($E_{ij} = E_{ji}$), torna-se possível sempre combinar termos como $C_{1112}E_{12} + C_{1121}E_{21}$ em apenas um termo como $(C_{1112} + C_{1121})E_{21}$ de tal forma que $(C_{1112} + C_{1121})$ torna-se um único coeficiente. De forma equivalente, toma-se simplesmente $C_{1112} = C_{1121}$. Logo, devido a simetria do tensor de deformação tem-se

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (3.4)$$

A relação anterior permite reduzir o número de coeficientes independentes C_{ijkl} de 81 para 54.

Considera-se ainda apenas os casos onde o tensor de tensões é simétrico, ou seja,

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (3.5)$$

e como consequência

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (3.6)$$

A expressão anterior permite reduzir em 18 o número de coeficientes. Logo, para o caso geral de corpo elástico linear o número máximo de coeficientes é 36.

Assume-se que o conceito de elasticidade é associado com a existência de uma função de energia de deformação $U(E_{ij})$ tal que

$$T_{ij} = \frac{\partial U}{\partial E_{ij}} \quad (3.7)$$

Neste caso, pode-se mostrar ainda que

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (3.8)$$

o que permite reduzir o número de coeficientes de 36 para 21.

3.2.1 Sólido Elástico Linear Isotrópico

Um material é isotrópico se as suas propriedades mecânicas podem ser descritas sem referência a direção. Para um sólido elástico linear com respeito as bases \mathbf{e}_i e \mathbf{e}'_i tem-se respectivamente que

$$T_{ij} = C_{ijkl}E_{kl} \quad (3.9)$$

$$T'_{ij} = C'_{ijkl}E'_{kl} \quad (3.10)$$

Se o material é isotrópico, as componentes do tensor de elasticidade devem permanecer as mesmas independentes de como as bases retangulares são rotacionadas ou refletidas. Logo,

$$C_{ijkl} = C'_{jikl} \quad (3.11)$$

para qualquer transformação ortogonal de base. Um tensor que possui as mesmas componentes com respeito a toda base ortonormal é denominado tensor isotrópico. Um exemplo simples é o tensor identidade \mathbf{I} , cujas componentes dadas em função do delta de Kronecker δ_{ij} , são as mesmas para qualquer base Cartesiana.

A partir de δ_{ij} , pode-se definir 3 tensores isotrópicos de quarta ordem dados por

$$\begin{aligned} A_{ijkl} &= \delta_{ij}\delta_{kl} \\ B_{ijkl} &= \delta_{ik}\delta_{jl} \\ H_{ijkl} &= \delta_{il}\delta_{jk} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Pode-se mostrar que qualquer tensor isotrópico de quarta ordem pode ser representado como uma combinação linear dos tensores anteriores. Logo, para um material elástico linear isotrópico, o tensor de elasticidade C_{ijkl} pode ser escrito como a seguinte combinação linear de A_{ijkl} , B_{ijkl} e H_{ijkl}

$$C_{ijkl} = \lambda A_{ijkl} + \alpha B_{ijkl} + \beta H_{ijkl} \quad (3.13)$$

onde λ , α e β são constantes. Substituindo (3.13) em (3.9) vem que

$$T_{ij} = (\lambda A_{ijkl} + \alpha B_{ijkl} + \beta H_{ijkl})E_{kl} \quad (3.14)$$

Observa-se que

$$\begin{aligned} A_{ijkl}E_{kl} &= \delta_{ij}\delta_{kl}E_{kl} = \delta_{ij}E_{kk} = \delta_{ij}e \\ B_{ijkl}E_{kl} &= \delta_{ik}\delta_{jl}E_{kl} = E_{ij} \\ H_{ijkl}E_{kl} &= \delta_{il}\delta_{jk}E_{kl} = E_{ji} = E_{ij} \end{aligned} \quad (3.15)$$

A partir daí

$$T_{ij} = \lambda e\delta_{ij} + (\alpha + \beta)E_{ij} \quad (3.16)$$

Denotando $(\alpha + \beta)$ como 2μ tem-se que,

$$T_{ij} = \lambda e\delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \quad (3.17)$$

ou em notação direta

$$\mathbf{T} = \lambda e\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \quad (3.18)$$

onde $e = E_{kk} = E_{11} + E_{22} + E_{33}$ é denominada dilatação.

Em forma expandida, as relações anteriores são dadas por

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2\mu E_{11} \\
T_{22} &= \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2\mu E_{22} \\
T_{33} &= \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2\mu E_{33} \\
T_{12} &= 2\mu E_{12} \\
T_{13} &= 2\mu E_{13} \\
T_{23} &= 2\mu E_{23}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Estas expressões são as equações constitutivas para um sólido elástico linear isotrópico. As duas constantes de material λ e μ são conhecidas como coeficientes ou constantes de Lamé. Como as componentes E_{ij} são adimensionais, λ e μ possuem as mesmas dimensões do tensor de tensão, ou seja, força por unidade de área. Para um dado material as constantes de Lamé são determinadas através de experimentos adequados.

Adicionando as componentes de tensão T_{11} , T_{22} e T_{33} dadas previamente verifica-se que

$$\begin{aligned}
T_{11} + T_{22} + T_{33} &= (2\mu + 3\lambda)E_{11} + E_{22} + E_{33} \\
T_{kk} &= (2\mu + 3\lambda)E_{kk} = (2\mu + 3\lambda)e
\end{aligned} \tag{3.20}$$

A partir daí, a expressão (3.18) pode ser invertida como

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\mu}\mathbf{T} - \frac{\lambda}{2\mu}e\mathbf{I} = \frac{1}{2\mu}\mathbf{T} - \frac{\lambda T_{kk}}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}\mathbf{I} \tag{3.21}$$

ou em forma de componentes

$$E_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} T_{kk} \delta_{ij} \right] \tag{3.22}$$

onde $e = \left(\frac{1}{2\mu + 3\lambda} \right) T_{kk}$ é a dilatação volumétrica.

Se o estado de tensão é tal que apenas uma componente de tensão normal é não zero, denomina-se o mesmo como estado uniaxial de tensão. O estado uniaxial de tensão é uma boa aproximação para o estado de tensão numa barra cilíndrica para no ensaio de tensão. Tomando-se como \mathbf{e}_1 a direção axial e supondo que $T_{11} \neq 0$ e todas as outras componentes $T_{ij} = 0$, tem-se a partir de (3.22)

$$E_{11} = \frac{1}{2\mu} \left[T_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} T_{11} \right] = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} T_{11} \tag{3.23}$$

$$E_{22} = E_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} T_{11} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} E_{11} \tag{3.24}$$

$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0 \tag{3.25}$$

A relação T_{11}/E_{11} , correspondente a razão σ/ϵ_a do teste de tensão, é o módulo de Young ou de elasticidade E . Assim, da expressão anterior para E_{11} vem que

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \tag{3.26}$$

A razões $-E_{22}/E_{11}$ e $-E_{33}/E_{11}$, correspondente à razão entre as deformações axial ϵ_a e transversal ϵ_d do teste de tração, é denominado coeficiente de Poisson. A partir de (3.24) vem que

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (3.27)$$

Utilizando as expressões para E e ν em (3.20) obtém-se as equações constitutivas comumente usadas em engenharia

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{E}[T_{11} - \nu(T_{22} + T_{33})] \\ E_{22} &= \frac{1}{E}[T_{22} - \nu(T_{33} + T_{11})] \\ E_{33} &= \frac{1}{E}[T_{33} - \nu(T_{11} + T_{22})] \\ E_{12} &= \frac{1}{2\mu}T_{12} \\ E_{13} &= \frac{1}{2\mu}T_{13} \\ E_{23} &= \frac{1}{2\mu}T_{23} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Observa-se que apesar das equações anteriores utilizarem três constantes (μ , ν , E), apenas duas delas são independentes para material isotrópico. Eliminado λ a partir das expressões para E e ν vem que,

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.29)$$

Utilizando esta relação em (3.22) vem que

$$E_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)T_{ij} - \nu T_{kk}\delta_{ij}] \quad (3.30)$$

Se o estado de tensão é tal que apenas um par de tensões de cisalhamento é não zero, denomina-se o mesmo como estado de tensão de cisalhamento simples. Este estado de tensão pode ser descrito por $T_{12} = T_{21} = \tau$ e a partir de (3.29)

$$E_{12} = E_{21} = \frac{\tau}{2\mu} \quad (3.31)$$

Definindo o módulo de cisalhamento G como a razão da tensão de cisalhamento τ pelo decréscimo do ângulo entre elementos que inicialmente estão nas direções \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 tem-se que

$$\frac{\tau}{2E_{12}} = G \quad (3.32)$$

Comparando-se as duas expressões anteriores, observa-se que o coeficiente de Lamé μ é também o módulo de cisalhamento G .

3.3 Fluido Newtoniano

3.3.1 Fluidos

A principal característica de um fluido é apresentar uma deformação contínua quando submetido a tensões cisalhantes. Por exemplo, ao se colocar água entre duas placas paralelas, estando uma delas fixa e a outra submetida a uma tensão cisalhante, a água irá se deformar indefinidamente com o tempo, se a tensão cisalhante não for removida.

Desta forma, define-se um fluido como uma classe de materiais idealizados, os quais quando em movimento de corpo rígido (sendo o repouso um caso particular) não resistem a qualquer tensão cisalhante.

Matematicamente, quando um fluido está em movimento de corpo rígido, o vetor tensão \mathbf{t} num ponto do fluido, segundo um plano qualquer, é normal a este plano. Logo, sendo \mathbf{T} o tensor de tensões, tem-se para qualquer vetor normal \mathbf{n} ,

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n} \quad (3.33)$$

É possível mostrar que a magnitude λ do vetor de tensão é a mesma para qualquer plano passando sobre o ponto considerado. Desta maneira, em todos estes planos, não apenas a tensão cisalhante é nula, mas também as tensões normais são as mesmas. Denota-se esta tensão normal como $-p$, denominando-se a mesma como *pressão hidrostática*. Logo, para um fluido em movimento de corpo rígido, verifica-se que,

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} \quad (3.34)$$

3.3.2 Fluidos compressíveis e incompressíveis

Alguns fluidos, tais como a água e o mercúrio, são denominados líquidos, apresentando como principal propriedade o fato que a densidade permanece a mesma para um grande intervalo de valores de pressão. A partir daí, define-se um *fluido incompressível* como aquele onde a densidade ρ das partículas permanece a mesma em qualquer tempo, independente do estado de tensão. Logo, a seguinte relação é válida,

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (3.35)$$

onde D/Dt indica a derivada material.

Sendo \mathbf{v} o campo vetorial da velocidade do fluido, a equação de conservação da massa é dada por,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3.36)$$

Logo, substituindo (3.35) em (3.36), tem-se para um fluido incompressível,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3.37)$$

Se a densidade ρ do fluido é constante em todas as partículas, denomina-se o mesmo como *fluido homogêneo*. Todos os fluidos incompressíveis não precisam ter uma densidade espacial uniforme. Por exemplo, a concentração de sal na água nos oceanos varia com a profundidade. Neste caso, tem-se um *fluido não-homogêneo*.

Finalmente, substâncias, tais como o ar e o vapor, onde a densidade varia com a pressão são tratados como *fluidos compressíveis*. No entanto, observa-se que em certas situações, pode-se tratar a água e o ar, respectivamente, como fluidos compressível e incompressível.

3.3.3 Equação da hidrostática

A equação de equilíbrio estático de um meio contínuo, em termos do tensor de tensão \mathbf{T} , é dada por (2.23). Tomando \mathbf{b} como o campo vetorial das forças de corpo por unidade de massa vem que

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (3.38)$$

Substituindo (3.34) na expressão anterior, obtém-se a equação da hidrostática,

$$\nabla p = \rho \mathbf{b} \quad (3.39)$$

ou na forma de componentes,

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho b_i \quad (3.40)$$

No caso onde b_i são as componentes do peso por unidade de massa e tomando x_3 como o eixo vertical positivo para baixo, tem-se que,

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho g \quad (3.41)$$

As duas primeiras relações indicam que p é uma função apenas de x_3 . A última expressão fornece a diferença de pressão entre dois pontos 1 e 2 no líquido, ou seja,

$$p_2 - p_1 = \rho g h \quad (3.42)$$

sendo h a profundidade do ponto 2 relativa ao ponto 1. Logo, a pressão estática no líquido depende apenas da profundidade. A pressão é a mesma para qualquer partícula sobre um mesmo plano horizontal num fluido.

3.3.4 Fluido em movimento

Se o fluido está se movimentando como um corpo rígido, a equação (3.38) deve incluir a aceleração \mathbf{a} . Logo,

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad (3.43)$$

Da mesma maneira, substituindo (3.34), vem que,

$$\nabla p + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad (3.44)$$

O movimento da partícula material \mathbf{X} é dado pelas posições \mathbf{x} ocupadas por \mathbf{X} ao longo do tempo t , ou seja,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad \text{com} \quad \mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{X}$$

onde t_0 é o tempo inicial. A partir daí, a velocidade \mathbf{v} da partícula \mathbf{X} no tempo t é dada pela seguinte derivada,

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_{\text{fixo}}} \quad (3.45)$$

A aceleração de uma partícula é a taxa de variação da velocidade \mathbf{v} da partícula. Portanto, a aceleração é a derivada material da velocidade mantendo o ponto material \mathbf{X} fixo, ou seja,

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_{\text{fixo}}} \quad (3.46)$$

Observa-se que na expressão (3.43), considera-se uma descrição espacial da aceleração, ou seja, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$. Assim, deve-se tomar a derivada material ou total em (3.46), obtendo-se,

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} \quad (3.47)$$

Substituindo a expressão anterior em (3.43), vem que,

$$\text{div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} \right] \quad (3.48)$$

3.3.5 Fluido newtoniano

Quando uma tensão de cisalhamento é aplicada a um sólido elástico, o mesmo se deforma de sua configuração inicial e alcança um estado de equilíbrio com uma deformação não-nula, a qual desaparece quando a tensão é removida.

No caso de um fluido sobre a mesma condição de carregamento, o mesmo se deformará de sua configuração inicial atingindo, eventualmente, um estado de equilíbrio, onde o fluido se deforma continuamente com uma taxa de deformação não-nula, a medida que a tensão vai sendo aplicada. Quando a tensão é removida, o fluido permanece exatamente no estado deformado que se encontrava antes da remoção da força.

Desta maneira, o estado de tensão num fluido, ao longo de um movimento cisalhante, é independente da deformação, mas é dependente da taxa de deformação cisalhante. Para fluidos deste tipo, nenhuma tensão de cisalhamento é necessária para manter uma dada deformação. Mas esta tensão deve estar presente para manter uma taxa de deformação de cisalhamento constante.

O estado de tensão num fluido em movimento de corpo rígido é dado pelo tensor isotrópico (3.34). No caso de um movimento geral, decompõe-se o tensor de tensões em duas partes,

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}' \quad (3.49)$$

onde as componentes de \mathbf{T}' dependem apenas da taxa de deformação, sendo nulas quando o fluido estiver em movimento de corpo rígido; p é um escalar cujo valor não depende explicitamente da taxa de deformação, sendo denominado *pressão*.

Define-se uma classe de materiais idealizados, denominada *fluidos newtonianos* ou *fluidos viscosos lineares*, através das seguintes hipóteses:

1. para qualquer ponto material, as componentes de \mathbf{T}' , em qualquer tempo, dependem linearmente das componentes do tensor taxa de deformação

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \right)$$

em qualquer tempo e de nenhuma outra quantidade cinemática, tais como taxas mais altas de deformação.

2. o fluido é isotrópico em qualquer configuração.

A partir destas hipóteses, pode-se escrever o *tensor de tensão viscosa* \mathbf{T}' como,

$$\mathbf{T}' = \lambda\Delta\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (3.50)$$

onde $\Delta = \text{tr } \mathbf{D} = D_{11} + D_{22} + D_{33}$, λ e μ são constantes do material, possuindo unidades de $(\text{Força})(\text{Tempo})/(\text{Comprimento})^2$. O coeficiente μ é a viscosidade do material, enquanto o termo $(\lambda + \frac{2}{3}\mu)$ representa a viscosidade volumétrica.

Logo, substituindo a expressão anterior em (3.49), tem-se a equação constitutiva para um fluido newtoniano,

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \lambda\Delta\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (3.51)$$

ou em forma de componentes

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (3.52)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} T_{11} &= -p + \lambda\Delta + 2\mu D_{11} \\ T_{22} &= -p + \lambda\Delta + 2\mu D_{22} \\ T_{33} &= -p + \lambda\Delta + 2\mu D_{33} \\ T_{12} &= 2\mu D_{12} \\ T_{13} &= 2\mu D_{13} \\ T_{23} &= 2\mu D_{23} \end{aligned}$$

3.3.6 Fluido newtoniano incompressível

Para um fluido incompressível, a relação (3.37) é válida, implicando que $\Delta = \text{tr } (\mathbf{D}) = 0$. Assim, a partir de (3.51), a equação constitutiva para um fluido newtoniano incompressível é dada por,

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (3.53)$$

Tomando-se o traço em ambos os lados da equação anterior e lembrando que o fluido é incompressível ($\text{tr } (\mathbf{D}) = 0$), vem que,

$$p = -\frac{1}{3}\text{tr } (\mathbf{T}) \quad (3.54)$$

Logo, para um fluido viscoso incompressível, a pressão possui o significado de tensão normal média de compressão. O valor de p não depende explicitamente de qualquer quantidade cinemática, sendo o seu valor indeterminado tomando-se apenas o comportamento mecânico do fluido. Desta maneira, como o fluido é incompressível, pode-se superpor qualquer pressão sob o mesmo, sem afetar o seu comportamento mecânico. Assim, a pressão num fluido incompressível é frequentemente conhecida como *pressão indeterminada*. Mas num dado problema, se condições de contorno para pressão estiverem prescritas, o campo de pressão será determinado.

Em termos de componentes, a equação constitutiva (3.53) é dada por,

$$\begin{aligned}T_{11} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\T_{22} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \\T_{33} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \\T_{12} &= \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \\T_{13} &= \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\T_{23} &= \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)\end{aligned}$$

Capítulo 4

FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS

4.1 Barra – Tração e Compressão

A barra é um elemento estrutural cuja principal característica geométrica é possuir o comprimento maior que as dimensões da seção transversal. Assim, considera-se a barra como um elemento unidimensional, analisando o seu comportamento ao longo da direção paralela à dimensão longitudinal, conforme mostrado na Figura 4.1. Neste texto, assume-se o caso de pequenas deformações e material elástico linear.

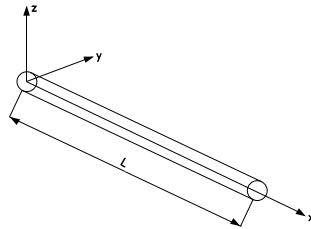


Figura 4.1: Barra de comprimento L juntamente com sistema de coordenadas.

Considere a barra da Figura 4.2a) submetida a ação de uma carga axial distribuída de intensidade variável $p(x)$. Seja o elemento de comprimento Δx obtido por cortes em duas seções perpendiculares A e B ao eixo da viga. Na Figura 4.2b), tem-se um DCL deste elemento indicando-se a carga distribuída e as forças normais nas seções A e B. Como a força normal pode variar entre A e B, indica-se a mesma como $N_x + \Delta N_x$ em B.

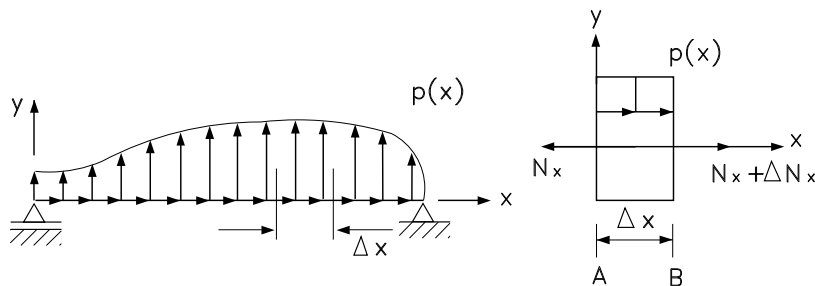


Figura 4.2: a) Viga submetida a uma força axial variável; b) elemento de viga.

Fazendo o equilíbrio do elemento de barra na direção x tem-se que,

$$\sum F_x = 0 : -N_x + N_x + \Delta N_x + p(x)\Delta x = 0 \rightarrow \frac{\Delta N_x}{\Delta x} = -p(x) \quad (4.1)$$

Tomando o limite para $\Delta x \rightarrow 0$ obtém-se,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta N_x}{\Delta x} = p(x) \rightarrow \frac{dN_x}{dx} = -p(x)$$

A expressão anterior representa a equação diferencial de equilíbrio para a força normal. Integrando esta equação, obtém-se,

$$N_x = - \int_0^x p(x)dx + C_1$$

onde x é uma secção arbitrária e C_1 é uma constante de integração arbitrária determinada a partir das condições de contorno.

Assim, a partir da integração da equação diferencial, obtém-se uma função descrevendo o comportamento da força normal ao longo de toda a viga.

A força normal N_x em função da tensão σ_{xx} para um material elástico isotrópico linear é dada por

$$N_x = \int_A \sigma_{xx} dydz \quad (4.2)$$

Devido a ação de movimento adotada, a única componente de tensão presente numa barra é $T_{11} = \sigma_{xx}$. Logo, a partir da lei de Hooke vem que,

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{E} [T_{11} - \nu(T_{22} + T_{33})] \rightarrow \epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ E_{22} &= \frac{1}{E} [T_{22} - \nu(T_{11} + T_{33})] \rightarrow \epsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ E_{33} &= \frac{1}{E} [T_{33} - \nu(T_{11} + T_{22})] \rightarrow \epsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ E_{12} &= E_{13} = E_{23} = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde E e ν são, respectivamente, o módulo de Young e o coeficiente de Poisson do material.

Partindo-se de (4.2), como a tensão σ_{xx} é constante em cada secção x da barra, tem-se que,

$$N_x(x) = \sigma_{xx}(x) \int_A dydz = \sigma_{xx}(x)A(x)$$

sendo $A(x)$ a área da secção transversal x . Logo, a partir da componente ϵ_{xx} em (4.3) vem que,

$$N_x(x) = E(x)A(x)\epsilon_{xx} = E(x)A(x)\frac{du_1(x)}{dx} \quad (4.4)$$

Procurando generalizar a formulação, assume-se também que o módulo de elasticidade pode variar em função de x , ou seja, $E = E(x)$, como no caso de uma barra constituída de partes com materiais distintos. Observa-se que a tensão σ_{xx} é constante em cada secção x , como ilustrado na Figura 4.3.

Substituindo a relação (4.4) na expressão (4.1), tem-se a equação diferencial em termos de deslocamentos,

$$\frac{d}{dx} \left(E(x)A(x)\frac{du_1(x)}{dx} \right) + p(x) = 0 \quad \text{em } x \in (0, L) \quad (4.5)$$

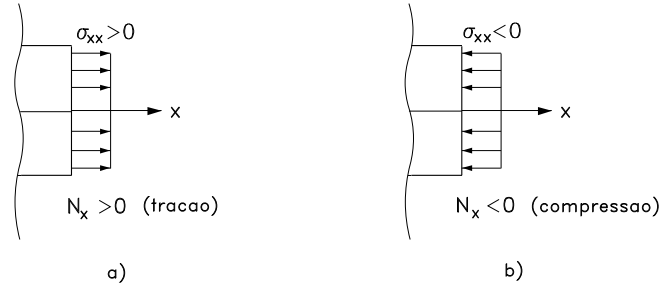


Figura 4.3: Tensão constante nos pontos de uma seção da barra: a) tração; b) compressão.

Para o caso onde o módulo de elasticidade e a área da seção são constantes, obtém-se,

$$EA \frac{d^2 u_1(x)}{dx^2} + p(x) = 0 \quad \text{em } x \in (0, L) \quad (4.6)$$

Observa-se que as condições de contorno dependem das vinculações presentes nas extremidades da barra, como ilustrado na Figura 4.4.

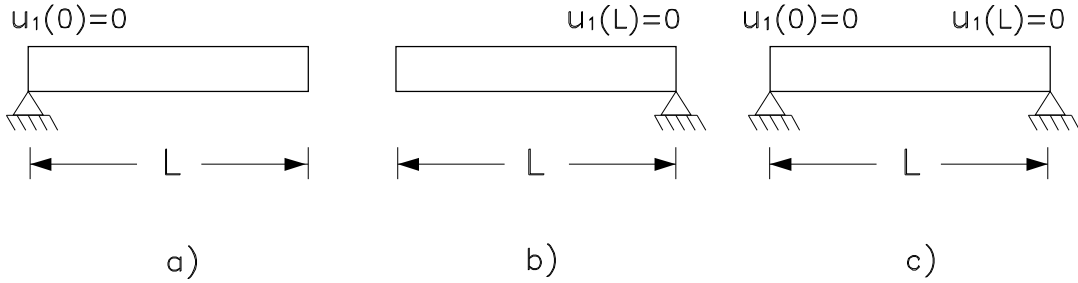


Figura 4.4: Condições de contorno em termos de deslocamento numa barra.

Tomando-se uma área A constante, a tração superficial σ_{xx} , ou seja, a tensão presente nas extremidades da barra, dá origem a uma força P em ambas as faces de magnitude,

$$P = \sigma_{xx} A \quad (4.7)$$

Sendo L o comprimento inicial da barra e ΔL o seu alongamento após a deformação, tem-se a partir de (4.3) e (4.7),

$$\sigma = \frac{P}{A} = E \epsilon_{xx} = E \frac{\Delta L}{L} \rightarrow \Delta L = \frac{PL}{AE} \quad (4.8)$$

Supondo que a barra possui seção circular com diâmetro inicial d , a variação Δd após a deformação é dada pelas componentes ϵ_{yy} e ϵ_{zz} em (4.3). Logo,

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \frac{\Delta d}{d} = -\frac{\nu}{E} \frac{P}{A} \rightarrow \Delta d = -\nu \frac{Pd}{AE} \quad (4.9)$$

onde o sinal $-$ indica a contração realmente esperada quando a barra está sob tração.

Para verificar se uma barra permanece na fase elástica, basta comparar se $\sigma_{xx} < \bar{\sigma}$, onde $\bar{\sigma}$ é a tensão normal admissível do material. Para dimensionar uma barra, impõe-se a condição que $\sigma_{xx} = \bar{\sigma}$, determinando-se a área da seção mínima para que a barra permaneça na fase elástica, ou seja,

$$A = \frac{P}{\bar{\sigma}} \quad (4.10)$$

4.2 Torção em Eixos Circulares

Como no caso de barras, o eixo também é um elemento estrutural com uma dimensão longitudinal predominante. Assume-se nesta formulação que os eixos são prismáticos circulares ou tubulares de seção constante. O interesse no estudo de eixos está relacionado apenas a ações de movimento originando torção das seções em torno da dimensão longitudinal.

A equação diferencial para o momento torçor é análoga ao da força normal. Ao invés de uma força axial de intensidade $p(x)$, como ilustrado na Figura 4.2, tem-se o momento torçor $t(x)$. O procedimento para obtenção da equação é o mesmo, chegando-se à seguinte expressão,

$$\frac{dM(x)}{dx} = -t(x) \quad (4.11)$$

O momento torçor ou longitudinal M_x na seção transversal é dado por

$$M_x = \int_A (-T_{12}z + T_{13}y) dA \quad (4.12)$$

como indicado na Figura 4.5.

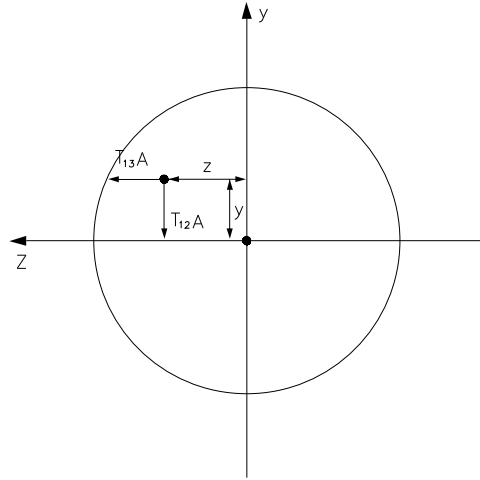


Figura 4.5: Resultante em termos de momento torçor na seção transversal do eixo (A =área da seção).

As únicas componentes de deformação presentes são as componentes de cisalhamento E_{12} e E_{13} dadas, respectivamente, por,

$$E_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad E_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)$$

Por sua vez, as componentes de deslocamento são $u_1 = 0$, $u_2 = -\theta(x)z$ e $u_3 = \theta(x)y$, as quais substituídas nas expressões anteriores resultam em,

$$E_{12} = -\frac{1}{2} \frac{d\theta}{dx} z \quad E_{13} = \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dx} y \quad (4.13)$$

Da lei de Hooke, as componentes de tensão de cisalhamento T_{12} e T_{13} estão relacionadas, respectivamente, a E_{12} e E_{13} através do módulo de cisalhamento μ ,

$$T_{12} = 2\mu E_{12} = -\mu \frac{d\theta}{dx} z \quad T_{13} = 2\mu E_{13} = \mu \frac{d\theta}{dx} y \quad (4.14)$$

Substituindo estas expressões na equação do momento torçor (4.12), verifica-se que,

$$M_x = \int_A \mu \left(\frac{d\theta}{dx} z^2 + \frac{d\theta}{dx} y^2 \right) dA = \mu \frac{d\theta}{dx} \int_A (y^2 + z^2) dA \rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{M_x}{\mu I_p} \quad (4.15)$$

onde $I_p = \int_A (y^2 + z^2) dA$ é o momento de inércia polar da seção transversal. Para seção circular de diâmetro d tem-se $I_p = \pi d^4/32$.

A partir daí, substituindo esta relação na equação diferencial do momento torçor, obtém-se,

$$\frac{d}{dx} \left(\mu I_p \frac{d\theta(x)}{dx} \right) + t(x) = 0 \quad (4.16)$$

Para um eixo de seção transversal constante de um mesmo material, verifica-se que,

$$\mu I_p \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + t(x) = 0 \quad (4.17)$$

constituindo-se na equação diferencial do eixo em termo do ângulo de torção $\theta(x)$. As condições de contorno, neste caso, são análogas ao caso de barra, ou seja, o ângulo de torção pode ser nulo nas extremidades.

Combinando as expressões em (4.14) com (4.15), vem que,

$$T_{12} = -\frac{M_x}{I_p} z \quad T_{13} = \frac{M_x}{I_p} y \quad (4.18)$$

verificando-se uma variação linear das componentes de cisalhamento na seção transversal.

Para um eixo de seção circular com diâmetro d , como o sistema de referência está colocado ao longo do centro de gravidade da seção, tem-se que as componentes T_{12} e T_{13} são iguais em módulo. A tensão de cisalhamento τ ao longo da direção circunferencial, ilustrada na Figura 4.6, é dada por,

$$\tau = \sqrt{T_{12}^2 + T_{13}^2} = \frac{M_x}{I_p} \sqrt{y^2 + z^2} = \frac{M_x}{I_p} \frac{d}{2} \quad (4.19)$$

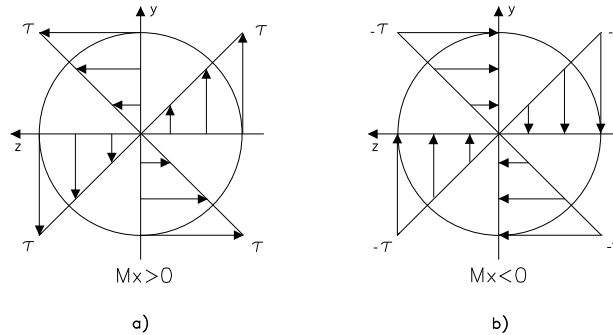


Figura 4.6: Distribuição da tensão de cisalhamento na seção de um eixo: a) $M_x > 0$; b) $M_x < 0$.

A expressão anterior pode ser reescrita como,

$$\tau = \frac{M_x}{I_p \frac{2}{d}} = \frac{M_x}{W_x} \quad (4.20)$$

definindo o módulo de resistência a torção da seção transversal do eixo, contendo todos os atributos geométricos relativos a seção.

Para dimensionar um eixo, basta determinar W_x , impondo-se que $\tau = \bar{\tau}$, onde $\bar{\tau}$ é a tensão de cisalhamento admissível do material do eixo. Logo,

$$\tau = \frac{M_x}{W_x} = \bar{\tau} \rightarrow W_x = \frac{M_x}{\bar{\tau}} \quad (4.21)$$

e o diâmetro é dado por,

$$W_x = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} \rightarrow d = \left(\frac{16W_x}{\pi} \right)^{1/3} \quad (4.22)$$

Por sua vez, para verificar se o eixo permanece na fase elástica, basta comparar se $\tau < \bar{\tau}$.

4.3 Flexão Pura

Na teoria clássica de Euler-Bernoulli, consideram-se vigas prismáticas uniformes (de seção transversal constante) com comprimento longitudinal como dimensão predominante. No caso de vigas, o interesse reside em ações de movimento chamadas *ações de flexão*, ou seja, deslocamentos transversais, na direção do eixo y , associados a rotações das seções transversais em torno do eixo z , de acordo com o sistema de coordenadas, sob o centro geométrico (CG) da seção, mostrado na Figura 4.7.

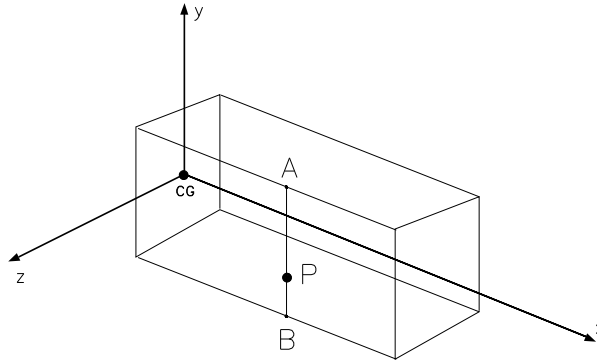


Figura 4.7: Sistema de coordenadas da viga.

Considere a viga da Figura 4.8a) submetida à ação de um carregamento distribuído transversal variável com a intensidade $q(x)$. Para que o elemento de viga de comprimento Δx , ilustrado na Figura 4.8b), esteja em equilíbrio as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 : & \quad V_y + q(x)\Delta x - (V_y + \Delta V_y) = 0 \rightarrow \frac{\Delta V_y}{\Delta x} = q(x) \\ \sum M_{zA} = 0 : & \quad (M_z + \Delta M_z) - V_y\Delta x - M_z - q(x)\Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0 \rightarrow \frac{\Delta M_z}{\Delta x} = V_y + q(x)\frac{\Delta x}{2} \end{aligned}$$

Tomando-se o limite para $\Delta x \rightarrow 0$, tem-se, respectivamente, as equações diferenciais de equilíbrio para a força cortante e momento fletor, ou seja,

$$\frac{dV_y}{dx} = q(x) \quad (4.23)$$

$$\frac{dM_z}{dx} = V_y \quad (4.24)$$

Substituindo-se (4.24) em (4.23) obtém-se,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dM_z}{dx} \right) = q(x) \rightarrow \frac{d^2 M_z}{dx^2} = q(x) \quad (4.25)$$

A integração das expressões anteriores permite obter as expressões da força cortante e do momento fletor ao longo da viga, facilitando a determinação dos diagramas.

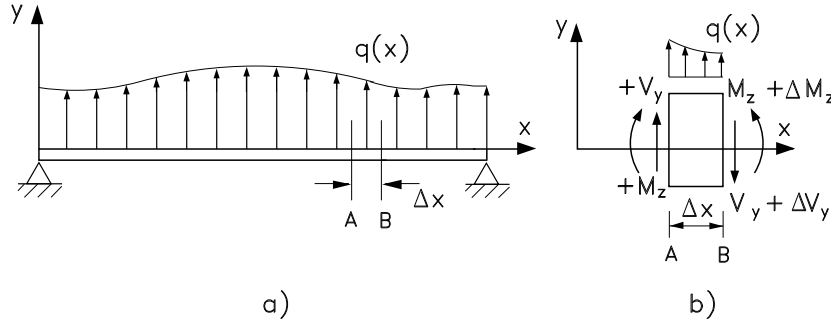


Figura 4.8: a) Viga submetida a carregamento transversal; b) elemento de viga.

O momento fletor M_z na seção transversal x da viga em torno do eixo z é dado por

$$M_z = - \int_A T_{11} y dA \quad (4.26)$$

A componente de tensão T_{11} pode ser calculada a partir da lei de Hooke. Logo,

$$T_{11} = E(x)E_{11} = -E(x) \frac{d^2 u_2(x)}{dx^2} y \quad (4.27)$$

sendo $u_2(x)$ a componente do campo de deslocamento relativo na direção vertical y .

Substituindo a expressão anterior em (4.26), reescreve-se o momento fletor M_z como,

$$\begin{aligned} M_z(x) &= - \int_A -E(x) \frac{d^2 u_2(x)}{dx^2} y^2 dA = E(x) \frac{d^2 u_2(x)}{dx^2} \int_A y^2 dA \\ M_z(x) &= E(x) I_z(x) \frac{d^2 u_2(x)}{dx^2} \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde $I_z(x) = \int_A y^2 dA$ é o momento de inércia de área da seção transversal x em relação ao eixo z . Para seção circular, tem-se $I_z = \frac{\pi d^4}{64}$; para seção retangular de base b e altura h , tem-se $I_z = \frac{bh^3}{12}$.

Tomando-se a equação diferencial do momento fletor indicada em (4.25) vem que,

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E(x) I_z(x) \frac{d^2 u_2}{dx^2} \right) - q(x) = 0 \quad (4.29)$$

Para uma viga de um mesmo material e seção transversal constante, a expressão anterior se reduz a,

$$EI_z \frac{d^4 u_2}{dx^4} - q(x) = 0 \quad (4.30)$$

Estas duas últimas expressões representam a equação diferencial de quarta ordem do deslocamento transversal da viga. Como solução, tem-se uma função fornecendo o deslocamento ao longo da viga. Para isso, deve-se integrar a equação diferencial quatro vezes, fornecendo, respectivamente, a expressão da cortante V_y , do momento fletor M_z , da rotação $\frac{du_2}{dx}$ e do deslocamento transversal u_2 . A Figura 4.9 ilustra as condições de contorno em termos de deslocamento e rotação, as quais podem estar presentes nas extremidades da viga.

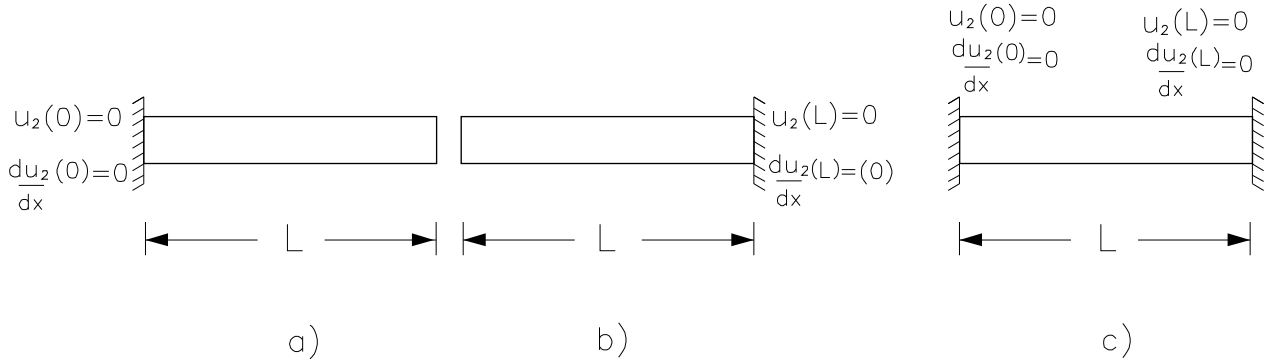


Figura 4.9: Condições de contorno na viga.

Combinando as equações (4.27) e (4.28), chega-se a uma expressão para a tensão normal $\sigma_{xx} = T_{11}$ na viga, ou seja,

$$\frac{d^2 u_2}{dx^2} = -\frac{\sigma_{xx}}{Ey} = -\frac{M_z}{EI_z} \rightarrow \sigma_{xx} = -\frac{M_z}{I_z} y \quad (4.31)$$

Da mesma maneira, a partir de (4.27), tem-se que a componente de deformação $\epsilon_{xx} = E_{11}$ associada a σ_{xx} é dada por,

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = -\frac{M_z}{EI_z} y$$

Verifica-se então que a tensão e a deformação variam linearmente com y na seção transversal da viga, atingindo o valor máximo no contorno da seção. Dependendo do sinal do momento fletor, as fibras da parte de cima da viga estarão em tração ou compressão, como ilustrado na Figura 4.10. Neste modelo de viga, consideram-se apenas seções transversais simétricas, segundo o eixo y , com flexão ao longo do plano de simetria definido pelo eixo z . Em geral, deseja-se calcular a tensão máxima σ_{max} , ou seja,

$$\sigma_{max} = \frac{M_{z_{max}}}{I_z} y_{max}$$

onde y_{max} é a coordenada do contorno da seção onde ocorre a máxima tensão e $M_{z_{max}}$ é o maior momento fletor em módulo ao longo da viga.

Pode-se reescrever a expressão anterior como,

$$\sigma_{max} = -\frac{M_{z_{max}}}{\frac{I_z}{y_{max}}} = -\frac{M_{z_{max}}}{W_z} \quad (4.32)$$

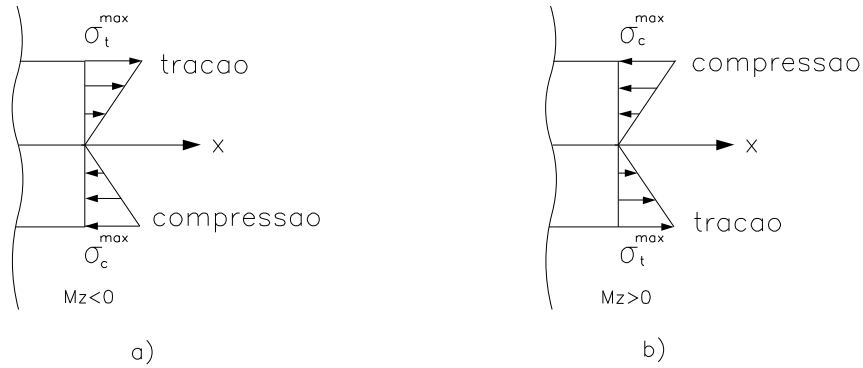


Figura 4.10: Tensões de tração e compressão numa seção transversal da viga: a) $M_z > 0$; b) $M_z < 0$.

onde $W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$ é o módulo de resistência a flexão da seção transversal da viga.

Para verificar se a viga permanece na fase elástica, compara-se σ_{max} com o valor de tensão admissível $\bar{\sigma}$ do material. No caso de dimensionamento, impõe-se a condição $\sigma_{max} = \bar{\sigma}$, determinando-se o módulo de resistência a flexão,

$$W_z = \frac{M_{zmax}}{\bar{\sigma}} \quad (4.33)$$

Torna-se necessário determinar a origem do eixo y na seção transversal da viga. Como se considera apenas a flexão pura, a resultante das forças na direção x em qualquer seção é nula, ou seja,

$$\sum F_x = 0 : \quad \int_A \sigma_{xx} dA = 0 \quad (4.34)$$

Substituindo-se (4.31) na expressão anterior e observando que M_z e I_z não variam com y e z ao longo de uma mesma seção x , vem que,

$$-\frac{M_z}{I_z} \int_A y dA = 0$$

O termo $M_{sz} = \int_A y dA$ representa o momento estático de área. Para que a equação seja nula é necessário que $M_{sz} = 0$, implicando que o eixo z , e portanto o sistema de referência indicado na Figura 4.7, passa pelo centro de gravidade da seção transversal da viga. O eixo z é denominado linha neutra da seção transversal e a união destas linhas define a superfície neutra, como indicado na Figura 4.11.

Dada a forma da seção, calculam-se as suas dimensões características a partir de W_z . Por exemplo, para uma seção circular de diâmetro d tem-se que,

$$W_z = \frac{\pi d^4/64}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32} \rightarrow d = \left(\frac{32W_z}{\pi} \right)^{1/3} \quad (4.35)$$

No caso de uma seção retangular de base b e altura h , vem que,

$$W_z = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6} \rightarrow bh^2 = 6W_z \quad (4.36)$$

e conhecendo-se a relação entre b e h , determinam-se os seus valores.

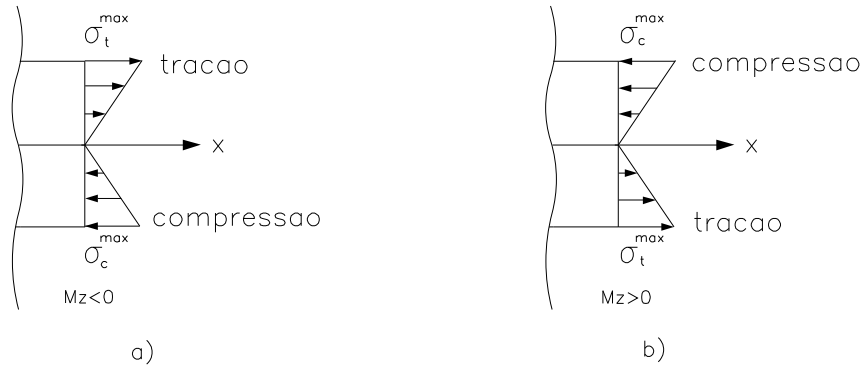


Figura 4.11: Linha e superfície neutras numa viga em flexão pura.

4.3.1 Exercício resolvido

A viga bi-engastada mostrada na Figura 4.12 deverá ser construída com um material cuja tensão normal admissível de trabalho é no máximo $\bar{\sigma} = 200\text{N/mm}^2$. O material do qual a viga será construída possui um módulo de elasticidade longitudinal (Young) $E = 2,0 \times 10^6\text{N/mm}^2$. A viga deve suportar uma carga uniformemente distribuída $q_0 = 10.000\text{N/m}$ ao longo de um vão $L = 5\text{m}$. Outro dado de projeto é que a flecha máxima não deve ultrapassar $v_{max} = L/1000$. Por razões construtivas a seção transversal de viga deverá ser um retângulo com dimensões $B \times 3B$, tal como mostrado. Para esta viga solicita-se: a) as equações e os diagramas de esforço cortante, momento fletor, deflexão angular (rotação) e deflexão linear (flecha), b) as reações de apoio, c) a dimensão mínima B para que os requisitos de tensão e deslocamento máximo sejam respeitados.

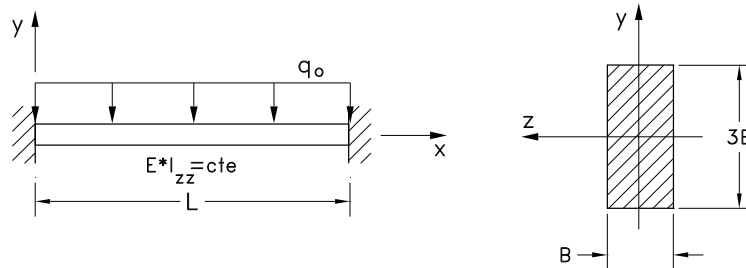


Figura 4.12: Viga bi-engastada.

1. Equação do carregamento: $q(x) = -q_0$
2. Condições de contorno

$$v(x=0) = 0 \quad v(x=L) = 0$$

$$\theta_z(x=0) = 0 \quad \theta_z(x=L) = 0$$
3. Integração da equação diferencial: $EI_z \frac{d^4 v}{dx^4} = -q_0$
 - 1ª integração: força cortante

$$EI_z \frac{d^3 v}{dx^3} = V_y(x) = -q_0 x + C_1$$

- 2ª integração: momento fletor

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = M_z(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

- 3ª integração: rotação

$$\theta_z(x) = -q_0 \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

- 4ª integração: deslocamento transversal

$$EI_z v(x) = -q_0 \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

4. Determinação das constantes de integração

$$EI_z v(0) = -q_0 \frac{(0)^4}{24} + C_1 \frac{(0)^3}{6} + C_2 \frac{(0)^2}{2} + C_3(0) + C_4 = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

$$\theta_z(0) = -q_0 \frac{(0)^3}{6} + C_1 \frac{(0)^2}{2} + C_2(0) + C_3 = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

$$EI_z v(L) = -q_0 \frac{L^4}{24} + C_1 \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} + C_3 L + C_4 = 0 \rightarrow -q_0 \frac{L^4}{24} + C_1 \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} = 0$$

$$\theta_z(L) = -q_0 \frac{L^3}{6} + C_1 \frac{L^2}{2} + C_2 L + C_3 = 0 \rightarrow -q_0 \frac{L^3}{6} + C_1 \frac{L^2}{2} + C_2 L = 0$$

Resolvendo o sistema constituído das duas equações anteriores, tem-se $C_1 = q_0 \frac{L}{2}$ e $C_2 = q_0 \frac{L^2}{12}$.

5. Equações finais

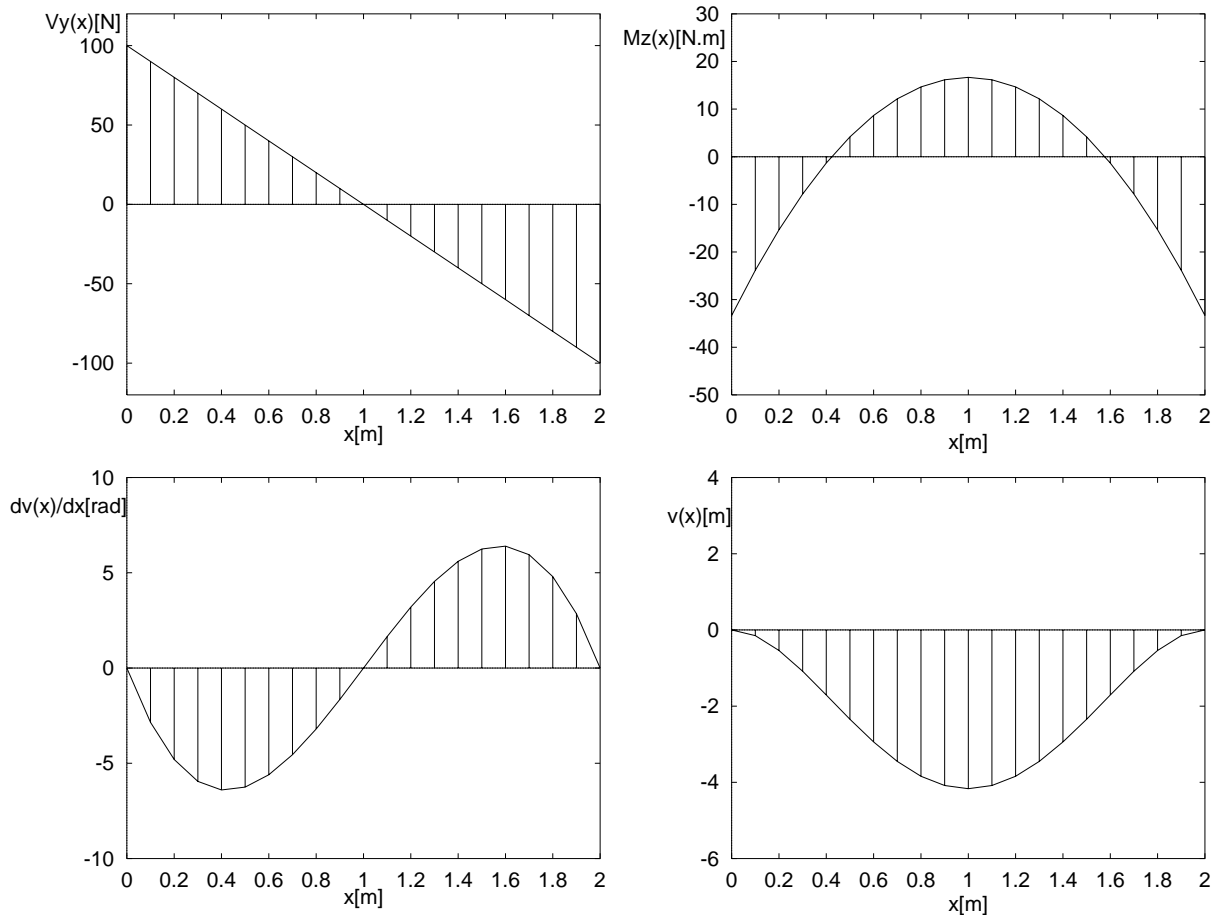
- força cortante: $V_y(x) = -q_0 x + q_0 \frac{L}{2}$

- momento fletor: $M_z(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 L \frac{x}{2} - q_0 \frac{L^2}{12}$

- rotação: $EI_z \theta_z(x) = -q_0 \frac{x^3}{6} + q_0 L \frac{x^2}{4} - q_0 L^2 \frac{x}{12}$

- deslocamento: $EI_z v(x) = -q_0 \frac{x^4}{24} + q_0 L \frac{x^3}{12} - q_0 L^2 \frac{x^2}{24}$

6. Diagramas da força cortante, momento fletor, rotação e deflexão



7. Reações nos apoios

$$\begin{aligned} \text{Forças:} \quad R_{Ay} &= V_y(x=0) = 25000N & R_{By} &= V_y(x=L) = 25000N \\ \text{Momentos:} \quad M_{Az} &= M_z(x=0) = -20833,4Nm & M_{Bz} &= M_z(x=L) = -20833,4Nm \end{aligned}$$

8. Dimensionamento

- Dimensionamento à tensão

O módulo de resistência da seção é dado por $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$. Por sua vez, $I_z = \frac{BH^3}{12} = \frac{B(3B)^3}{12} = \frac{9}{4}B^4$ e $y_{\max} = \frac{3}{2}B$. Logo, $W_z = \frac{3}{2}B^3$. No dimensionamento da seção, considera-se o módulo do momento fletor máximo. Logo,

$$\bar{\sigma} = \frac{M_{z \max}}{W_z} = \frac{M_{z \max}}{\frac{3}{2}B^3} \rightarrow B = \left(\frac{2M_{z \max}}{3\sigma_{z \max}} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{(2)(20833,4)(10^3)}{(3)(200)} \right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow B = 41,1mm$$

- Dimensionamento à flecha máxima

Do diagrama, tem-se que a flecha máxima ocorre em $x = \frac{L}{2}$. O valor da deflexão linear máxima é dado por,

$$EI_z v(x = \frac{L}{2}) = -q_0 \frac{(\frac{L}{2})^4}{24} + q_0 L \frac{(\frac{L}{2})^3}{12} - q_0 L^2 \frac{(\frac{L}{2})^2}{24} = -q_0 \frac{L^4}{384} \rightarrow v_{\max} = -q_0 \frac{L^4}{384EI_z}$$

Igualando o módulo deste resultado com a expressão da flexa máxima admissível, tem-se,

$$\frac{L}{1000} = q_0 \frac{L^4}{384EI_z} \rightarrow I_z = 1000q_0 \frac{L^3}{384E}$$

Substituindo a expressão para I_z em função de B , obtém-se,

$$I_z = \frac{9}{4}B^4 = 1000q_0 \frac{L^3}{384E} \rightarrow B = 29,16mm$$

Desta maneira, observa-se que, para este caso, deve-se tomar o valor da altura da seção dado pelo dimensionamento à tensão, ou seja, $B = 41,1mm$.

4.4 Sólido Elástico Linear

seja o campo de deslocamentos $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ definido sobre \mathcal{B} , com gradiente $\nabla \mathbf{u}$. Para um material elástico linear isotrópico, a relação entre tensão-deformação é dada pela lei de Hooke,

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{I} \quad (4.37)$$

onde,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (4.38)$$

é o tensor de deformações de Green.

O conjunto de equações (2.23), (4.37) e (4.38) forma um sistema completo de equações descrevendo a deformação de um corpo com material elástico linear e isotrópico. A solução desse sistema permite obter os deslocamentos, tensões e deformações nos pontos do corpo. Quando o corpo é homogêneo, μ e λ são constantes, estando relacionados ao módulo de elasticidade de Young E e ao coeficiente de Poisson ν através das expressões,

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$$

Assim, substituindo (4.38) em (4.37) vem que,

$$\mathbf{T} = \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \lambda\epsilon_V \mathbf{I} \quad (4.39)$$

sendo ϵ_V a dilatação volumétrica dada por,

$$\epsilon_V = \text{tr } \mathbf{E} = \text{tr } \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \text{tr } \nabla \mathbf{u} = \text{div } \mathbf{u}$$

Substituindo agora (4.39) na equação de equilíbrio (2.23), obtém-se,

$$\text{div} [\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \lambda\epsilon_V \mathbf{I}] + \mathbf{b} = \mathbf{0} \rightarrow \mu \text{div} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \text{div} (\lambda\epsilon_V \mathbf{I}) + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (4.40)$$

De forma geral dados os campos escalares ϕ e tensorial \mathbf{S} , a seguinte relação é válida,

$$\text{div}(\phi \mathbf{S}) = \phi \text{div} \mathbf{S} + \mathbf{S} \nabla \phi$$

e portanto $\text{div}(\lambda\epsilon_V \mathbf{I}) = \lambda \nabla \epsilon_V$.

Por sua vez verifica-se que,

$$\operatorname{div}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \operatorname{div} \nabla \mathbf{u} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (4.41)$$

onde $\Delta \mathbf{u}$ é o Laplaciano de \mathbf{u} e de forma geral $\operatorname{div}(\nabla \mathbf{v}^T) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v})$.

Logo, a expressão (4.40) pode ser reescrita como,

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla \epsilon_V + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (4.42)$$

sendo denominada *equação de Navier*.

Em termos de componentes a expressão anterior pode ser escrita como,

$$\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_i + (\mu + \lambda) \frac{\partial \epsilon_V}{\partial x} + b_i = 0 \quad (4.43)$$

4.5 Problemas Bidimensionais

Os problemas bidimensionais de elasticidade são divididos em estados planos de tensão e deformação e sólidos axissimétricos, dependendo de parâmetros como dimensões, restrições cinemáticas e carregamentos.

4.5.1 Estado plano de tensão

As hipóteses básicas para os problemas de estado plano tensão são:

- a espessura do corpo é pequena se comparada com as dimensões nas direções x e y ;
- não há forças agindo nas faces normais ao eixo z ;
- as componentes de forças de volume agem somente no plano xy e são independentes de z , isto é, $b_1 = b_1(x, y)$, $b_2 = b_2(x, y)$ e $b_3 = 0$;
- todas as forças agindo no corpo são planar e independentes de z , ou seja, $F_1 = F_1(x, y)$, $F_2 = F_2(x, y)$ e $F_3 = 0$.

Com estas hipóteses, assume-se que as componentes de tensão no plano z (T_{33} , T_{32} , T_{31}) são pequenas comparando-se com T_{11} , T_{22} e T_{12} . Além disso, a variação destas últimas em relação a z é desprezível, sendo função apenas de x e y . Logo,

$$T_{11} = T_{11}(x, y) \quad T_{22} = T_{22}(x, y) \quad T_{12} = T_{12}(x, y) \quad T_{33} = T_{32} = T_{31} = 0 \quad (4.44)$$

Deve-se observar, entretanto, que apesar destas hipóteses serem razoáveis para a prática da engenharia, as mesmas são apenas aproximadas, pois violam as equações de compatibilidade. Observa-se ainda que $u_3 \neq 0$ e a deformação $\epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z}$ pode ser determinada em função de T_{11} e T_{22} .

Tomando-se (4.44), simplificam-se as equações da elasticidade como,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11}(x, y) & T_{12}(x, y) \\ T_{12}(x, y) & T_{22}(x, y) \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1(x, y) \\ b_2(x, y) \end{Bmatrix}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial T_{11}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}(x, y)}{\partial y} + b_1(x, y) = 0 \\ \frac{\partial T_{12}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}(x, y)}{\partial y} + b_2(x, y) = 0 \end{cases} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{Tn} = \mathbf{F} \Rightarrow \begin{cases} T_{11}n_1 + T_{12}n_2 = F_1 \\ T_{12}n_1 + T_{22}n_2 = F_2 \end{cases} \quad (4.46)$$

Seguindo o mesmo esquema, a equação constitutiva (4.37) assume a seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{12} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\mu \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \epsilon_V & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_V & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_V \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

onde $\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x}$, $\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)$, $\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_2}{\partial y}$, $\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_3}{\partial y}$ e $\epsilon_V = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}$.

De (4.47), determina-se a deformação ϵ_{33} como,

$$2\mu \frac{\partial u_3}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) = 0 \Rightarrow \epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z} = -\frac{\lambda}{(\mu + \lambda)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \quad (4.48)$$

Assim, a equação de Navier pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\mu \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \end{array} \right\} + (\mu + \lambda) \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} b_1(x, y) \\ b_2(x, y) \end{array} \right\} = 0 \quad (4.49)$$

4.5.2 Deformação plana

Este modelo geralmente é usado para representar o comportamento de estruturas de grande comprimento, tais como tubulações. Por este motivo, os deslocamentos normais a essa direção podem ser assumidos como nulos. As hipóteses de deformação plana são:

- os deslocamentos das faces normais ao eixo z são nulos, pois a espessura do corpo é muito grande em comparação às dimensões representativas nas direções x e y .
- as forças de volume e aquelas aplicadas nas superfícies do corpo, normais às direções x e y , são independentes de z .

Com estas hipóteses tem-se,

$$u_1 = u_1(x, y) \quad u_2 = u_2(x, y) \quad u_3 = 0 \quad (4.50)$$

Isto significa que as deformações decorrentes de u_3 também se anulam, ou seja,

$$\epsilon_{33} = \epsilon_{23} = \epsilon_{13} = 0 \quad (4.51)$$

sendo as demais independentes de z , isto é $\epsilon_{11} = \epsilon_{11}(x, y)$, $\epsilon_{22} = \epsilon_{22}(x, y)$, $\epsilon_{12} = \epsilon_{12}(x, y)$. Neste caso, $T_{33} \neq 0$ e pode ser determinado a partir do valor das outras componentes.

Considerando as hipóteses (4.50) e (4.51), as seguintes simplificações são possíveis nas equações do caso sólido:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11}(x, y) & T_{12}(x, y) & 0 \\ T_{12}(x, y) & T_{22}(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & T_{33}(x, y) \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1(x, y) \\ b_2(x, y) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial T_{11}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}(x, y)}{\partial y} + b_1(x, y) = 0 \\ \frac{\partial T_{12}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}(x, y)}{\partial y} + b_2(x, y) = 0 \\ \frac{\partial T_{33}(x, y)}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (4.52)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{F} \Rightarrow \begin{cases} T_{11}n_1 + T_{12}n_2 = F_1 \\ T_{12}n_1 + T_{22}n_2 = F_2 \end{cases} \quad (4.53)$$

Seguindo o mesmo esquema, a equação constitutiva (4.37) assume a seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{12} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix} = 2\mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

$$+ \lambda \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

sendo \mathbf{E} o tensor de Green.

De (4.47) determina-se a componente de tensão T_{33} ,

$$T_{33} = 2\lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \quad (4.55)$$

A equação de Navier é exatamente a mesma obtida para tensão plana. De fato, a única diferença entre os dois casos são as condições de contorno usadas na resolução da equação de Navier.

4.6 Equação de Navier-Stokes para Fluido Incompressível

Aplicando a operação de divergência na expressão (3.53), vem que,

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = -\operatorname{div} (p\mathbf{I}) + 2\mu \operatorname{div} \mathbf{D} = -\nabla p + \mu \operatorname{div} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$$

Como $\operatorname{div} (\nabla \mathbf{v}^T) = \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v})$ e lembrando que o fluido é incompressível ($\operatorname{div} (\mathbf{v}) = 0$), a expressão anterior torna-se,

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = -\nabla p + \mu \operatorname{div} (\nabla \mathbf{v}) \quad (4.56)$$

Substituindo esta relação na equação de movimento de um meio contínuo, dada em (3.48), obtém-se a equação de Navier-Stokes descrevendo o movimento de um fluido newtoniano incompressível,

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{b} - \nabla p + \mu \operatorname{div} (\nabla \mathbf{v}) \quad (4.57)$$

Em termos de componentes de velocidade, a expressão anterior é escrita como,

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) &= \rho b_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) v_1 \\ \rho \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) &= \rho b_2 - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) v_2 \\ \rho \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) &= \rho b_3 - \frac{\partial p}{\partial x_3} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) v_3 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Tem-se 4 incógnitas nestas 3 equações, ou seja, as componentes de velocidade (v_1, v_2, v_3) e a pressão p . Para resolver esta indeterminação, emprega-se a condição (3.37) para um fluido incompressível, obtida da equação de continuidade. Esta expressão possui a seguinte forma em termos de componentes,

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad (4.59)$$